Мавзу:

Чизиқсиз математик моделлар ва уларни ечиш усуллари

Режа:

1. Чизиқсиз математик модел ва трансцендент тенглама ҳақида тушунча .
2. Оралиқни тенг иккига бўлиш усули.
3. Ватарлар усули.
4. Уринмалар усули.
5. Оддий итерация усули.

Чизиқсиз математик модел ва трансцендент тенглама

Таъриф. Агар масаланинг модели чизиқли бўлмаган математик муносабатлар орқали ифодаланса, бу моделга *чизиқсиз математик модел* деб аталади.

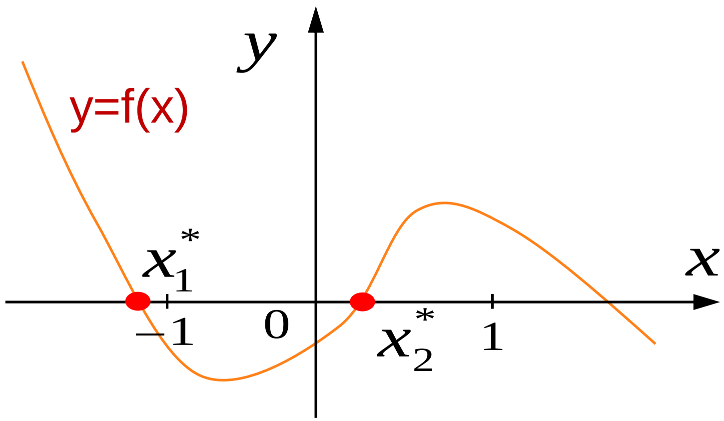
Таъриф. Берилган тенгламани *алгебраик алмаштириш-лар* ёрдамида алгебраик тенгламага келтириш мумкин бўлмаса, бу тенглама *трансцендент тенглама* деб аталади.

***Алгебраик алмаштиришлар*:**

- ❑ тенгламанинг иккала томонига бир хил алгебраик ифодани қўшиш;
- ❑ тенгламанинг иккала томонини нолдан фарқли бир хил алгебраик ифодага кўпайтириш;
- ❑ тенгламанинг иккала томонини бир хил рационал кўрсаткичли даражага ошириш.

$f(x)=0$ тенглама илдизлари ҳақида тушунча

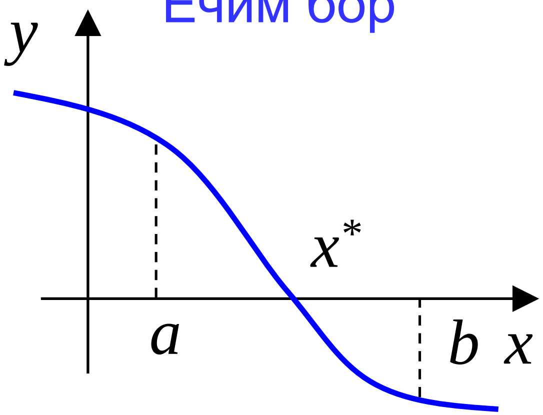
Таъриф. Агар $x=x_1$ берилган тенгламани рост тенгликга айлантирса, x_1 бу тенгламанинг *илдизи* ёки *ечими* деб аталади.



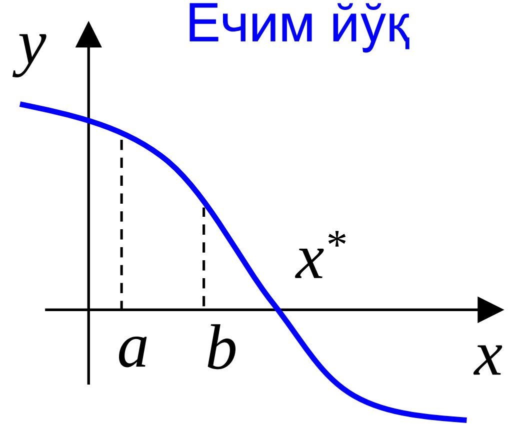
Теорема. Агар $f(x)$ функция – $[a;b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, оралиқнинг четки нуқталарида турли хил ишоралар қабул қилса ва функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи шу оралиқда ўз ишорасини сақласа, $f(x)=0$ тенглама $[a;b]$ оралиқда *ягона ечимга* эга бўлади.

[a, b] ораликда ечимларни аниқлаш.

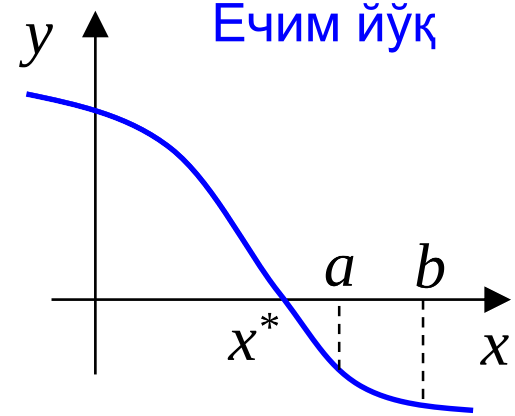
Ечим бор



Ечим йўқ



Ечим йўқ



$$f(a) > 0$$
$$f(b) < 0$$

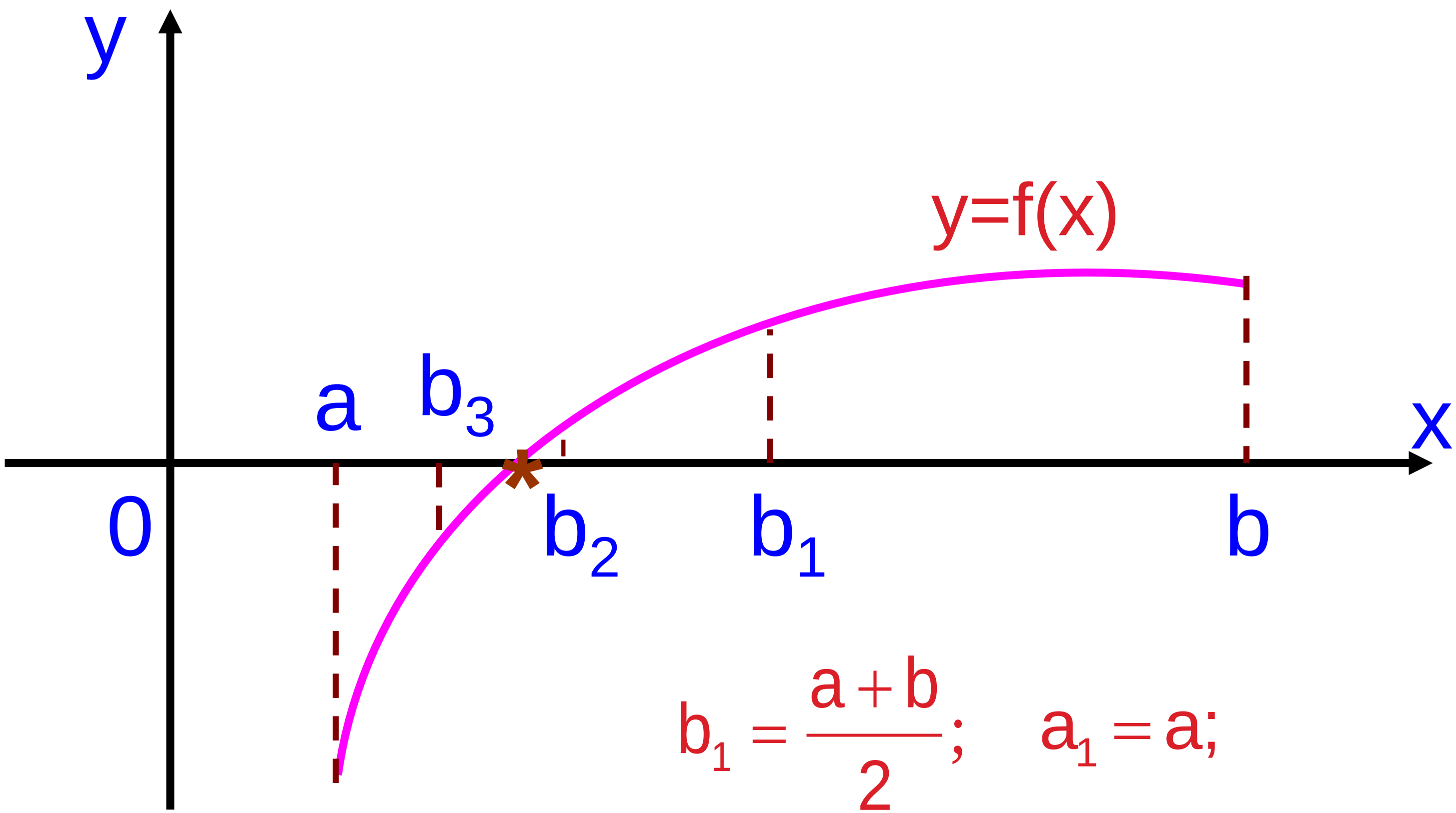
$$f(a) > 0$$
$$f(b) > 0$$

$$f(a) < 0$$
$$f(b) < 0$$

$$f(a)\,f(b) < 0$$

$$f(a)\,f(b) > 0$$

Ораликни тенг иккига бўлиш усули



$$b_1 = \frac{a+b}{2}; \quad a_1 = a;$$

$$b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}; \quad a_2 = a; \quad b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2};$$

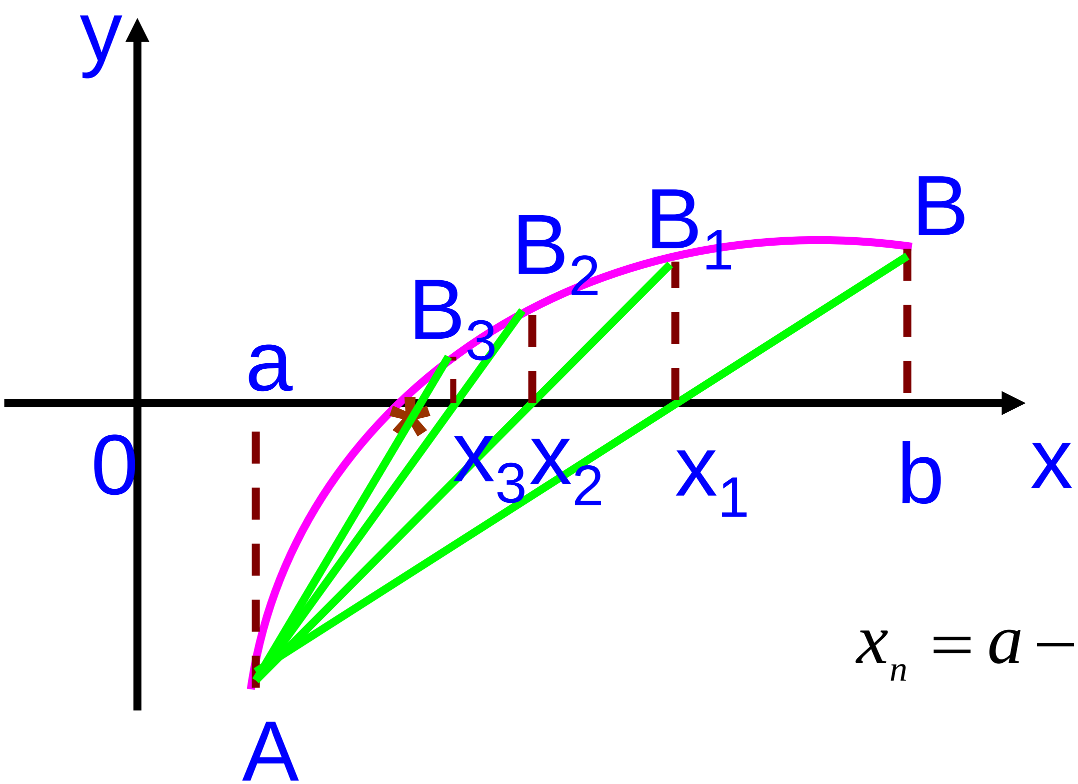
Мисол

Ораликқни тенг иккига бўлиш усули ёрдамида $2x^3-11x^2+2x+15=0$ тенгламанинг *[0,2; 4]* ораликдаги илдизини *ε=0,001* аникликда ҳисобланг.

a	*b*	*c*	*f(a)*	*f(b)*	*f(c)*
0.200	4.000	2.100	14.9760	-25.0000	-10.7880
0.200	2.100	1.150	14.9760	-10.7880	5.7943
1.150	2.100	1.625	5.7943	-10.7880	-2.2148
1.150	1.625	1.388	5.7943	-2.2148	1.9406
1.388	1.625	1.506	1.9406	-2.2148	-0.1095
1.388	1.506	1.447	1.9406	-0.1095	0.9237
1.447	1.506	1.477	0.9237	-0.1095	0.4090
1.477	1.506	1.491	0.4090	-0.1095	0.1502
1.491	1.506	1.499	0.1502	-0.1095	0.0205
1.499	1.506	1.503	0.0205	-0.1095	-0.0444
1.499	1.503	1.501	0.0205	-0.0444	-0.0120
1.499	1.501	1.500	0.0205	-0.0120	0.0043

$x \approx 1.500$

Ватарлар усули



$$x_n = a - \frac{x_{n-1} - a}{f(x_{n-1}) - f(a)} \cdot f(a)$$

$$\left(x_n = b - \frac{x_{n-1} - b}{f(x_{n-1}) - f(b)} \cdot f(b) \right)$$

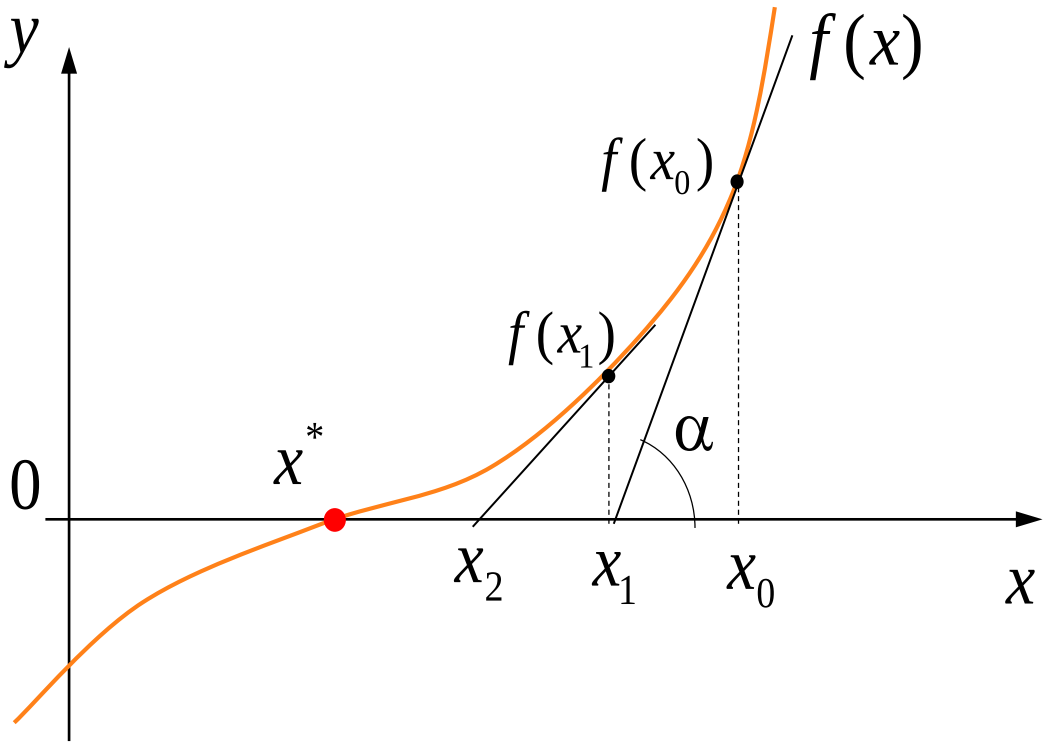
Мисол

Ватарлар усули ёрдамида $11x^2+2x-26=0$ тенгламанинг $[0; 4]$ оралиқдаги илдизини $\varepsilon=0,005$ аниқликда ҳисобланг.

x_n	$f(x_{n-1})$
0.0000	-26,0000
0,5652	-21,3554
0,9742	-13,6122
1,2142	-7,3547
1,3381	-3,6281
1.3979	-1,7103
1.4257	-0,7891
1.4385	-0,3605
1.4443	-0,1639
1.4470	-0,0744
1.4482	-0,0337
1.4487	-0,0153
1,4490	-0,0069

$x \approx 1.4490$

Уринмалар усули(Ньютон усули)



$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Мисол

Урунмалар усули ёрдамида $2x^3-11x^2+2x+15=0$ тенглама илдизини тақрибий ҳисобланг($x_0=3;$ $\varepsilon=0,001$).

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f(x_i)/f'(x_i)$	$x_i- f(x_i)/f'(x_i)$
3.000000	-24.000000	-10.000000	2.400000	0.600000
0.600000	12.672000	-9.040000	-1.401770	2.001770
2.001770	-9.031855	-17.996441	0.501869	1.499901
1.499901	0.001733	-17.499604	-0.000099	1.500000

$x \approx 1.500$

Итерация усули

Мақсад: $f(x) = 0 \qquad x = ?$

Эквивалент алмаштиришлар:

$b \cdot f(x) = 0$ агар $b \neq 0$ тенглама ечими ўзгармайди:

$$x + b \cdot f(x) = x$$

$$x = \varphi(x), \qquad \varphi(x) = x + b \cdot f(x)$$

Ечиш усули:

x_0 – бошланғич яқинлашиш (масалан график ёрдамида)

$$x_k = \varphi(x_{k-1}) = x_{k-1} + b \cdot f(x_{k-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

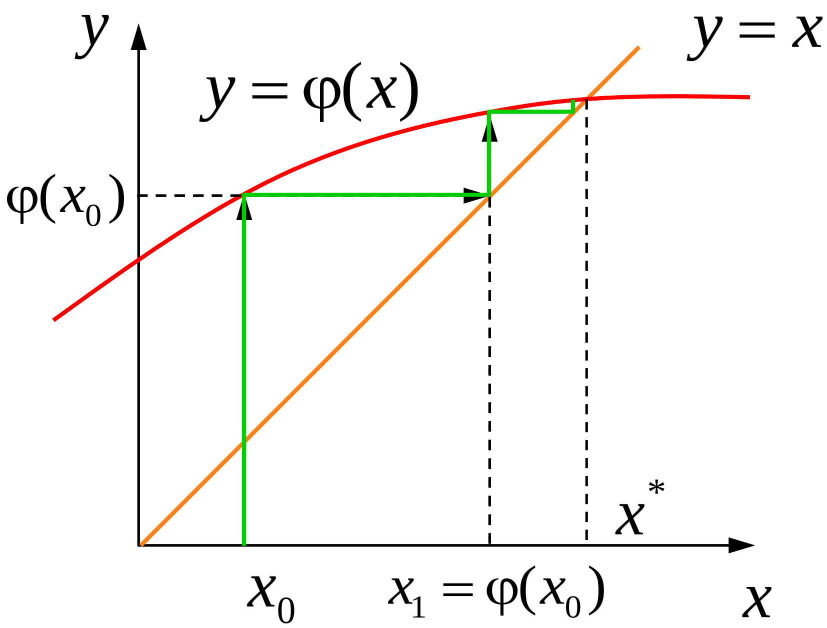
Муаммо:

- *b* ни қандай танлаш керак?
- ҳар доим ечимни топиш мумкинми?

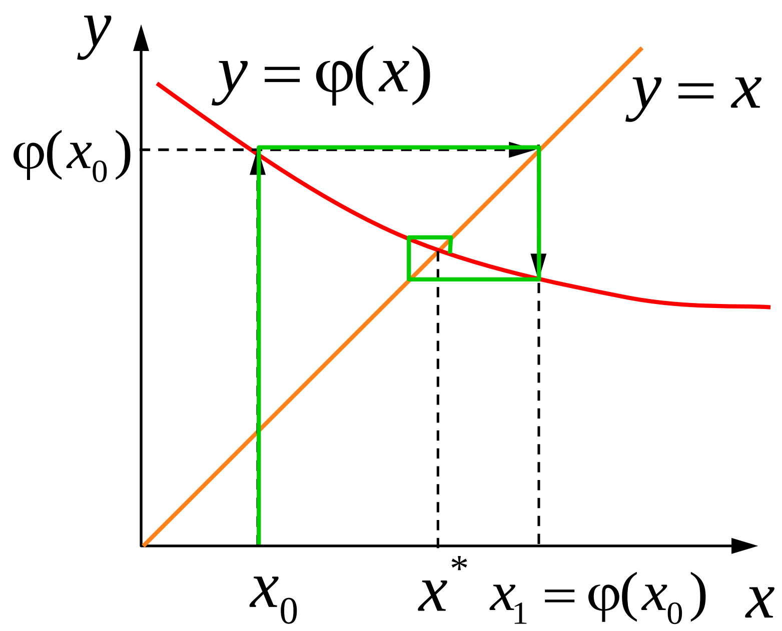
Итерация жараёнининг яқинлашиши:

Яқинлашувчи итерацион жараён: $x_0, x_1, \ldots$ кетма-кетлик аниқ ечимга яқинлашади.

$$x^* = \varphi(x^*) \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots \to x^*$$



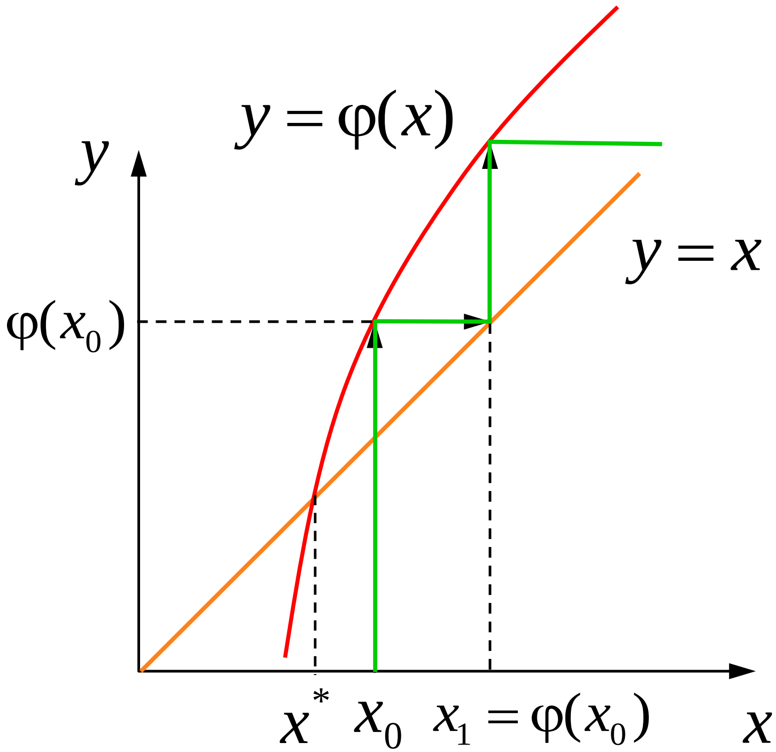
бир томонлама яқинлашиш



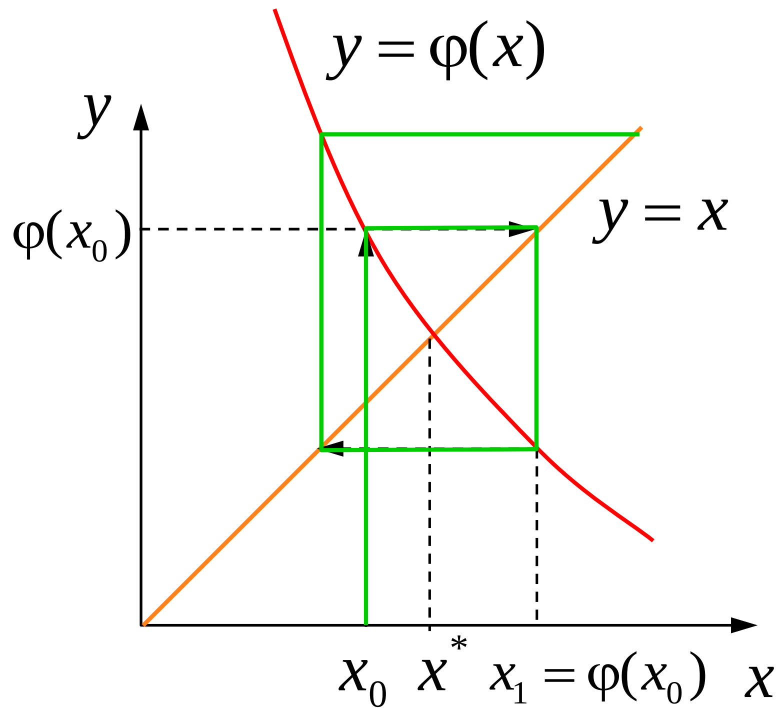
икки томонлама яқинлашиш

Итерация жараёнининг ўзоқлашиши:

Ўзоқлашувчи итерацион жараён: $x_0, x_1, \ldots$ кетма-кетлик чексиз ўсади ёки камаяди ва у аниқ ечимга яқинлашмайди.



бир томонлама ўзоқлашиш

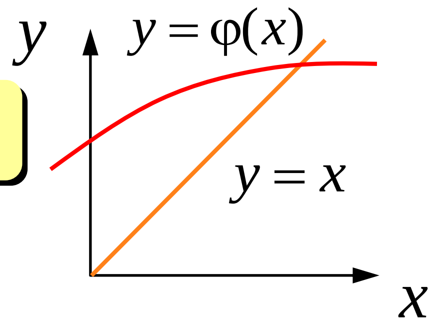


икки томонлама ўзоқлашиш

Итерация жараёнининг яқинлашиши нимага боғлиқ?

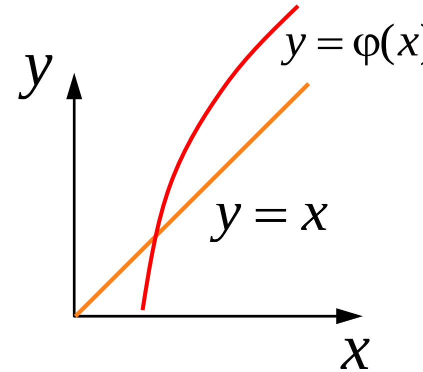
яқинлашувчи

$$0 < \varphi'(x) < 1$$

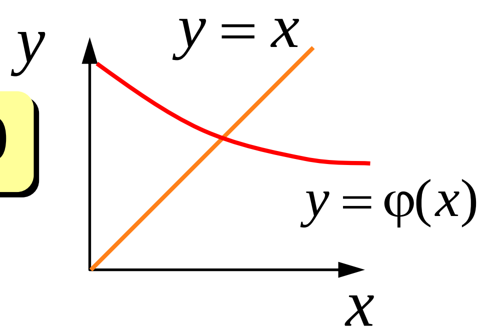


ўзоқлашувчи

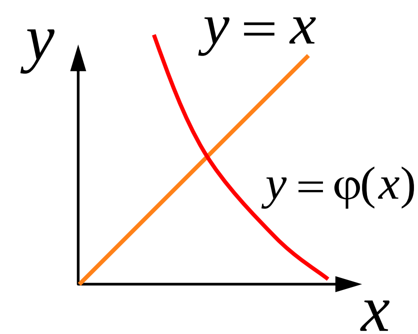
$$\varphi'(x) > 1$$



$$-1 < \varphi'(x) < 0$$



$$\varphi'(x) < -1$$



Хулосалар:

- итерацион жараённинг яқинлашиши $\varphi'(x)$ ҳосила қийматига боғлиқ;
- $|\varphi'(x)| < 1$ да яқинлашувчи; $|\varphi'(x)| > 1$ да ўзоқлашувчи;
- яқинлашиш b параметрни танлашга боғлиқ.

b ни қандай танлаш керак?

- ихтиёрий равишда танлаш ва ҳар хил вариантларни қараш;
- x_0 бошланғич қийматлар учун:

$$-1 < 1 + b \cdot f'(x_0) < 1 \quad \Rightarrow \quad -2 < b \cdot f'(x_0) < 0$$

$$f'(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{f'(x_0)} < b < 0$$

$$f'(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < b < -\frac{2}{f'(x_0)}$$

- ҳар қадамдан кейин ҳисоблаш, масалан:

$$1 + b \cdot f'(x_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{f'(x_k)}$$

Мисол

Оддий итерация усули ёрдамида $x\text{-}e^x+2=0$ тенглама илдизини тақрибий ҳисобланг($x_0=0$; $\varepsilon=0,001$).

Итерация жараёни: $x_n = e^{x_{n-1}} - 2$ (n=1,2,3,…)

n	x_n
0	0.000000
1	-1,000000
2	-1,632121
3	-1,804485
4	-1,835441
5	-1,840457
6	-1,840457

$x = x_6 = -1,840457$