



Modeling the Filtration of Groundwater In Multilayer Porous Media

Ravshanov, N.^{1*}; Abdullaev, Z.²; Khafizov, O.²

¹ Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies, Tashkent, Uzbekistan

² Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan

* ravshanzade-09@mail.ru

Keywords:

Mathematical model; Analytical solution; Reservoir filtration; Porous Medium; Mass transfer; Integral Laplace transform

Abstract:

The interaction between the surface and underground waters is often a point of interest in land reclamation, engineering hydrology, and hydrogeology. Thus, the paper deals with modeling the process of unsteady fluid filtration in a sandwich-type reservoir system. Such a study is very relevant for Uzbekistan, where these kinds of soil structures are quite common.

The mathematical model of fluid filtration was developed based on partial differential equations of parabolic type with boundary conditions. An analytical solution to the problem was found using the Laplace transform. The computational experiments were carried out to determine the changes in pressure along the filtration layers' length without taking into account the elastic regime. It was found that the pressure in both layers increases exponentially. The flow of water through the interface of the filtration layers significantly depends on the piezo conductivity coefficient of a well-permeable layer, as well as on the filtration coefficient of a slightly permeable layer.

There was obtained the analytical solution of the problem of fluid filtration in a sandwich-type reservoir system. The solution of the problem of determining the pressure in a weakly permeable filtration layer was found. And a new generalized formula for well gallery control was derived.

The developed mathematical tool allows users to draw up the schemes of location and capacity of vertical drainage wells to protect irrigated and non-irrigated areas from flooding and protect groundwater from pollution sources, as well as isolate already contaminated areas.

1 Introduction

Проблемы нехватки и загрязнения водных ресурсов, их защиты от источников загрязнения для обеспечения населения чистой питьевой водой весьма актуальны в настоящее время. Эффективность мероприятий по защите подземных и очистке сточных вод подразумевает необходимость предварительной разработки эффективных методов и средств на основе комплексных исследований процесса фильтрации жидкости в многослойных пористых средах.

Несовершенство традиционных методов полива и вовлечение в сельское хозяйство подверженных к засолению земель приводит к тому, что ресурсы солончатых возвратных вод в Узбекистане достигли значительных размеров. Поверхностные и подземные водоисточники продолжают загрязняться применяемыми в сельском хозяйстве минеральными удобрениями, ядохимикатами, пестицидами, сильноминерализованными и загрязненными коллекторно-дренажными водами.

Организация прямого мониторинга процесса распространения токсических веществ в почвогрунтах не всегда целесообразна ввиду значительности трудовых и финансовых затрат. Поэтому более дешевой и эффективной альтернативой здесь выступают методы математического моделирования и вычислительного эксперимента. Математический инструмент

позволяет выполнять как мониторинг, так и прогнозирование исследуемого процесса фильтрации, а также обеспечивать поддержку принятия управленческих решений, направленных на выделение изолированных областей, препятствующих проникновению различных ядохимикатов в зоны с относительно благоприятными экологическими условиями.

Математические модели процесса фильтрации подземных вод в многослойных пористых средах, обычно описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими краевыми и внутренними условиями различного рода. Поэтому, к настоящему времени в области разработки математических моделей и вычислительных алгоритмов решения подобных задач уже получены значительные результаты прикладного и фундаментального характера.

В частности, значительный вклад в методологию математического моделирования фильтрационных потоков в многослойных средах оказали исследования М.С. Хантуша [1].

Авторами работы [2] произведен анализ запасов пресных вод с учётом изменения климата на основе разработанных математических моделей объекта исследования. Осуществимость и возможности этих моделей продемонстрированы на примере прогнозирования уровня грунтовых вод на пять дней вперед в засушливом и полусухом бассейне, расположенном на северо-западе Китая. Обнадеживающие результаты моделирования показывают, что методология может упростить и улучшить процедуру прогнозирования уровня подземных вод.

В.М. Булаватским с целью анализа и прогнозирования уровня подземных вод была разработана математическая модель для выполнения асимптотического анализа полей избыточного напора с фильтрационной консолидацией в двойной релаксационной системе [3]. Автором показано, что на начальных этапах консолидации учет релаксационных свойств деформируемой пористой среды важен в случае резких и значительных изменений в давлении. В общем случае, динамика фильтрационной консолидации пористой среды может быть численно смоделирована в рамках рассматриваемой математической модели.

А. Власюком предложена математическая модель процесса переноса соли при фильтрации с учетом процесса инфильтрации в ненасыщенном слоистом грунте [4]. Для решения задачи был использован конечно-разностный метод и были проведены численные эксперименты на ЭВМ.

В рамках исследования [5] разработана математическая модель процесса фильтрации соленой воды с учетом температурного градиента для северных полусухих районов Китая. Результаты численного решения задачи показывают, что градиент температуры почвы оказывает определенное влияние на водно-солевую миграцию. Отмечено, что при проведении экспериментов влияние градиента температуры на миграцию соли было больше, чем влияние движения воды.

Е.И. Андерсоном [6] рассмотрен двумерный устойчивый поток грунтовых вод в вертикальной плоскости и, получено аналитическое решение, используя которое проведено исследование взаимодействия воды с поверхностью грунтовых вод-потоков. Водоносный слой принимался идеализированным – в виде бесконечной полосы, а русло смоделировано в виде горизонтальной эквипотенциальной функции.

Общие методы решения задач двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах рассмотрены в работе [7]. На их основе авторами предложены математические модели для изучения конкретных инженерно-технических проблем в водоснабжении, проектировании гидротехнических и гидромелиоративных сооружений. Исследование развивает теорию расчётов двумерных фильтрационных течений в многослойных неоднородных анизотропных средах для областей, ограниченных дугами координатных линий изотермических систем координат.

Д.С. Кузнецовым разработаны метод описания пространственной структуры потоков и математическая модель, позволяющая рассчитывать параметры структуры потоков подземных вод [8]. Задача геофильтрации здесь решается численно на основе разработанного автором алгоритма. Предложенный метод дает возможность решать задачи стационарного конвективного массопереноса в подземных водах в многослойной постановке и является основой для решения задач нестационарного массопереноса неконсервативного вещества.

В диссертационной работе Э.Р.Какушева [9] рассматривается связанная модель фильтрации в упругой пористой среде и дано обобщение на случай геометрически нелинейного деформирования. Как отмечает автор, эффект связанности появляется из-за взаимного влияния пространственной деформации каркаса грунта и изменения давления жидкости в порах.

Разработанная численная модель позволяет рассчитывать величины изменения порового давления, горизонтальные и вертикальные перемещения, в том числе проседания земной поверхности, а также напряжения и деформации. Также в работе реализована и несвязанная модель фильтрации в упругой пористой среде. Проведено сравнение моделей.

В статье [10] предложена методика реализации численной модели внутрикарьерных дрен. Выполнены прогнозные расчеты с целью эффективного осушения месторождения. Методом численного моделирования доказана эффективность применения лучевого дренажа и горизонтальных дренажных скважин для интенсификации осушения падунских отложений в прибортовом массиве карьера.

Достаточно хорошо изучены математические модели течений в открытых водотоках, основанные на уравнениях Сен-Венана для случаев при которых расходы в реках (каналах, дренах) или емкостях водоемов велики по сравнению с фильтрационным питанием или потерями.

Так, результаты серии экспериментов представлены в работе [11] при учете различных внутренних границ с постоянным напором. В проведенных исследованиях авторами наблюдались колебания уровня грунтовых вод и процесс проникновения морской воды в многослойные водоносные горизонты. Математическая модель была разработана для исследования проникновения морской воды в прибрежные водоносные горизонты под влиянием приливных колебаний и эксплуатации подземных вод. Гидрогеологические параметры в модели откалиброваны с помощью записей об уровне подземных вод и солености.

Авторами статьи [12] получены аналитические модели для прогнозирования загрязнения подземных вод в изотропных и однородных пористых средах. Влияние коэффициентов дисперсии и диффузии включается в решение уравнения адвекции и дисперсии и используются переходные (зависящие от времени) граничные условия. Аналитические решения получены с использованием метода интегрального преобразования Лапласа и концепции линейной изотермы. Численные решения получены явными конечно-разностными методами и сравниваются с аналитическими решениями. Численные результаты анализируются для различных типов геологических пористых образований, то есть водоносного горизонта.

В [13] представлена математическая модель динамики подземных вод при стационарном течении для изучения 2D-водоносного горизонта с пластом воды с постоянным наклоном, состоящим из однородных и изотропных сред. Разработан численный алгоритм для проведения вычислительных экспериментов по решению задачи как в однородной изотропной, так и в однородной анизотропной среде.

На основе предположения о плоском движении подземных вод в замкнутом водоносном горизонте исследователями в [14] были созданы математическая модель и численный алгоритм для исследования процесса фильтрационных потоков грунтовых вод в замкнутом водоносном горизонте с переменной h , которая была рассчитана методом конечных элементов. Численное исследование показывает, что результаты по методу конечных элементов находятся в хорошем согласии с вычисленными результатами по методу конечных разностей.

В статье [15] для прогнозирования изменения уровня грунтовых и напорных вод разработана математическая модель, учитывающая внешний источник, испарение, коэффициенты фильтрации, активную пористость, скорость фильтрации и двусторонние граничные условия. Для численного итерирования задачи разработан эффективный численный алгоритм, позволяющий прогнозировать изменения уровня грунтовых вод. Проведенными численными расчетами установлено, что фильтрационная проницаемость, коэффициента потери воды и скорости фильтрации, связанные с уровнем воды, могут иметь серьезное влияние на экологический процесс.

Авторами исследования [16] разработаны две нелинейные математические модели в виде временных рядов для прогнозирования колебаний уровня грунтовых вод с использованием искусственных нейронных сетей. Эти модели были применены для прогнозирования колебаний уровня грунтовых вод в прибрежном водоносном горизонте. Одной из входных переменных являлся уровень прилива.

В статье [17] получено аналитическое решение, основанное на подходе функции Грина для решения обратной задачи. На основе требуемого уровня концентрации загрязняющих веществ и планируемого периода времени откачки, авторами определяется кратчайшее расстояние до берега реки, где присутствует максимальный процент речной воды. Модель разработана для замкнутого и однородного водоносного горизонта. Первоначально аналитические результаты,

полученные при разном времени откачки, скорости и различных значениях начальной концентрации, проверяются численно с помощью программного обеспечения MODFLOW.

Распределенная модель процесса фильтрация подземных вод в квазитрехмерной постановке и одномерная модель деформации пористой среды для многослойной системы водоносных горизонтов предложены в [18]. Как отмечают авторы статьи, разработанное математическое обеспечение позволяет адекватно смоделировать изменение уровня грунтовых вод вокруг насосной скважины, а затем рассчитать уплотнение слоев почвы. Полученные результаты исследования можно использовать для системы с многоскважинной и/или многослойной перекачкой.

В работе [19] рассмотрен процесс фильтрации нефти в пористой среде. Для определения коэффициента коагуляции частиц вокруг скважины используются собранные данные лабораторных измерений по падению давления и концентрации стоков, который использовались для более точного прогнозирования.

Исследование [20] посвящено решению задач геофильтрации и геомиграции в многослойных системах, состоящих из нескольких водоносных горизонтов, разделенных слабопроницаемыми слоями. Математические модели разработаны при следующем предположении: в водоносном горизонте преобладают продольные потоки, а в отрывных слоях - перетоки. Массоперенос описывается уравнениями конвекции и диффузии. Для численного интегрирования поставленной задачи автором использовались неявные конечно-объемные разностные схемы. Также в работе приведены результаты численных расчетов по перераспределению потоков подземных вод и миграции загрязняющих веществ в системе двух водоносных горизонтов с действующими скважинами.

В работе [21] предлагается усовершенствованная математическая модель, которая описывает поток жидкости через связанную систему трещина-матрица с использованием подхода двойной пористости. Предлагаемая модель отличается тем, что уравнение потока в трещине содержит гиперболический член в дополнение к обычному дисперсионному члену, а уравнение матричного потока содержит член связи, который контролирует переходный характер обмена флюида из хранимой скальной породы в гидравлические проводники. Для описания ограниченных участков сорбции предлагается изотерма сорбции Ленгмюра, в то время как изотерма сорбции Фрейндлиха рекомендуется для описания неограниченных участков сорбции, доступных в матрице породы.

Стоит отметить, что авторами данной статьи также получены определенные результаты в области моделирования процесса массопереноса в многопластовых пористых средах. В частности, разработаны математическая модель и эффективный численный алгоритм для исследования процесса фильтрации и изменения солевого режима подземных вод с учетом внешних источников и испарения [22]. Разработанный математический аппарат позволяет существенно сократить объем натурных экспериментов по мониторингу и прогнозированию уровня подземных вод и концентрации солей и минимизировать дорогостоящие и ресурсоемкие экспериментальные работы.

Ряд работ [23, 24] был посвящен разработке математической модели для мониторинга и прогнозирования изменений уровня грунтовых вод и концентрации солей, а также для представления процессов затопления, засоления и заболачивания при проектировании гидротехнических сооружений. Разработанный численный алгоритм обеспечивает решение задачи прогнозирования изменений уровня грунтовых вод с учетом активной пористости, дебита в двухслойных пластах.

Вопросы комплексного исследования процесса влаго и солепереноса в почвогрунтах были рассмотрены в работе [25]. Численное моделирование осуществлялось с учетом коагуляции пор грунта мелкодисперсными частицами; изменения коэффициента проницаемости почвы; водоотдачи и коэффициента фильтрации; изменения начальной пористости и пористости осевшей массы. Был разработан эффективный численный алгоритм, основанный на векторной схеме Самарского-Фрязинова со вторым порядком аппроксимации. При выводе математической модели принималось предположение о том, что градиент давления в канале постоянный и равен атмосферному давлению.

Анализ приведенных выше и других научных публикаций позволяет сделать вывод о том, что процессы фильтрации жидкости в многослойных пористых средах при учете различий физико-механических свойств пластов и взаимосвязи между поверхностными и подземными водами

изучены недостаточно. Например, в Узбекистане часто встречается такое строение почвогрунтов при котором под малопроницаемым покровным слоем, содержащим подземные воды со свободной поверхностью, находятся напорные хорошо проницаемые слои. И в целом, практика показывает, что необходимость решения задач водообмена регионального масштаба с сильным взаимодействием поверхностных и подземных вод, возникает достаточно часто при проектировании и эксплуатации гидромелиоративных объектов.

Это обуславливает необходимость рассмотрения проблемы массопереноса комплексно, с учетом всех взаимодействующих компонент, в чем и состоит цель настоящей работы.

2 Methods

Рассмотрим процесс неустановившейся фильтрации жидкости в хорошо проницаемом водоносном горизонте, сверху и снизу перекрытого слабопроницаемыми прослойками.

При неблагоприятной экологической ситуации в области $(0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq m)$ для предотвращения распространения загрязнения возникает необходимость создать неподвижную изолированную поверхность на границе $x = L > l$.

Математическая модель исследуемого процесса фильтрации жидкости в многослойной пористой среде при учете основных законов гидродинамики описывается с помощью системы дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими внутренними и краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2}, \\ \frac{1}{a_2} \frac{\partial S_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} + \frac{k_1}{T_2} \frac{\partial S_1}{\partial y} \Big|_{y=m_2+m_3} - \frac{k_3}{T_2} \frac{\partial S_3}{\partial y} \Big|_{y=m_3}, \\ \frac{1}{a_3} \frac{\partial S_3}{\partial t} &= \frac{\partial^2 S_3}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при

$$S_1(x, y, 0) = S_2(x, 0) = S_3(x, y, 0) = 0, \quad (2)$$

$$S_1(x, m_2 + m_3, t) = S_2(x, t), \quad (3)$$

$$S_2(x, t) = S_3(x, m_3, t), \quad (4)$$

$$S_1(x, m, t) = 0, \quad \frac{\partial S_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (5)$$

$$S_2(0, t) = S^* = \text{const}, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0. \quad (7)$$

Здесь S_1, S_2, S_3 - понижения напоров в трех слоях; a_1, a_2, a_3 - коэффициенты трубопроводности; k_1, k_2, k_3 - коэффициенты фильтрации; m_1, m_2, m_3 - мощности слоев; $T_i = k_i m_i$ ($i = \overline{1, 3}$) - фильтрационные проводимости слоев. Индексы 1, 2, 3 - соответственно относятся к первому, второму и третьему слоям, y - вертикальная координата.

При этом условие (7) в данной модели должно обеспечиваться галереей скважин, расположенной при $x = L_1 > L$, на которой необходимо поддерживать понижение или расход, приходящийся на единицу ее длины в виде определенной функции времени, подлежащей определению.

Для интегрирования поставленной задачи применим к системе (1) интегральное преобразование Лапласа, тогда имея в виду (2) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{a_1} \bar{S}_1 &= \frac{\partial^2 \bar{S}_1}{\partial y^2}, \\ \frac{p}{a_2} \bar{S}_2 &= \frac{d^2 \bar{S}_2}{dx^2} + \frac{K_1}{T_2} \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial y} \Big|_{y=m_2+m_3} - \frac{K_3}{T_2} \frac{\partial \bar{S}_3}{\partial y} \Big|_{y=m_3}, \\ \frac{p}{a_3} \bar{S}_3 &= \frac{\partial^2 \bar{S}_3}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Соответственно в этом случае система (8) будет подчинена следующим краевым условиям:

$$\bar{S}_1(x, m_2 + m_3, p) = \bar{S}_2(x, p), \quad (9)$$

$$\bar{S}_2(x, p) = \bar{S}_3(x, m_3, p), \quad (10)$$

$$\bar{S}_1(x, m, p) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d\bar{S}_3}{dy} \Big|_{y=0} = 0, \quad (12)$$

$$\bar{S}_2(0, p) = \frac{S^*}{p}, \quad (13)$$

$$\frac{d\bar{S}_2}{dx} \Big|_{x=L} = 0. \quad (14)$$

Решение поставленной задачи можно получить в области изображения аналогичным способом [26]:

$$\bar{S}_1(x, y, p) = \bar{S}_2(x, p) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a_1}} (m - y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a_1}} m_1}, \quad (15)$$

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{S^*}{p} \frac{\operatorname{ch}[\omega_2(p)(L - x)]}{\operatorname{ch}[\omega_2(p)L]}, \quad (16)$$

$$\bar{S}_3(x, p) = \bar{S}_2(x, p) \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a_3}} y}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a_3}} m_3}, \quad (17)$$

где

$$\omega_2^2(p) = \frac{p}{a_2} + \frac{k_1}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{a_1}} m_1 + \frac{k_3}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_3}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a_3}} m_3.$$

Переходя к оригиналу вместо (15)-(17), получим

$$S_1(x, y, t) = S^* \frac{m - y}{m_1} \frac{\operatorname{ch}[A_2(L - x)]}{\operatorname{ch}[A_2 L]} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L-x}{L} \right]}{\Phi_2 \left(\xi_{j,n}^{(2)} \right)} \times \\
& \times \frac{\sin \left[\xi_{j,n}^{(2)} (m-y) / \sqrt{a_1} \right]}{\sin \left[\xi_{j,n}^{(2)} m_1 / \sqrt{a_1} \right]} \exp \left[- \left(\xi_{j,n}^{(2)} \right)^2 t \right], \\
& S_2(x, t) = \frac{S^* \operatorname{ch} \left[A_2 (L-x) \right]}{\operatorname{ch} \left[A_2 L \right]} + \\
& + \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L-x}{L} \right]}{\Phi_2 \left(\xi_{j,n}^{(2)} \right)} \exp \left[- \left(\xi_{j,n}^{(2)} \right)^2 t \right], \\
& S_3(x, y, t) = \frac{S^* \operatorname{ch} \left[A_2 (L-x) \right]}{\operatorname{ch} \left[A_2 L \right]} + \\
& + \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L-x}{L} \right]}{\Phi_2 \left(\xi_{j,n}^{(2)} \right)} \times \\
& \times \frac{\cos \left[\xi_{j,n}^{(2)} y / \sqrt{a_3} \right]}{\cos \left[\xi_{j,n}^{(2)} m_3 / \sqrt{a_3} \right]} \exp \left[- \left(\xi_{j,n}^{(2)} \right)^2 t \right],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\xi) &= (2n-1)^2 + \frac{4L^2 \xi^2}{\pi^2} \phi_2(\xi); \quad A_2^2 = \frac{k_1}{m_1 T_2}; \\
\phi_2(\xi) &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{T_2} \left(\frac{T_1}{a_1 \sin^2 \frac{\xi m_1}{\sqrt{a_1}}} + \frac{T_3}{a_3 \cos^2 \frac{\xi m_3}{\sqrt{a_3}}} \right),
\end{aligned}$$

а $\xi_{j,n}^{(2)}$ – положительные корни уравнения

$$\frac{\pi^2}{4L^2} (2n-1)^2 + \frac{k_1 \xi}{\sqrt{a_1} T_2} \operatorname{ctg} \frac{\xi m_1}{\sqrt{a_1}} = \frac{\xi^2}{a_2} + \frac{k_3 \xi}{\sqrt{a_3} T_2} \operatorname{tg} \frac{\xi m_3}{\sqrt{a_3}}, \quad n=1, 2, \dots$$

Рассмотрим второй случай, когда сверху находится водоупор, а снизу действует постоянный напор, то есть

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial S_1}{\partial y} \right|_{y=m} &= 0 \\
S_3 &= 0,
\end{aligned}$$

Тогда в области изображения имеем:

$$\bar{S}_1(x, y, p) = \bar{S}_2(x, p) \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a_1}} (m-y)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a_1}} m_1}, \quad (18)$$

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{S^*}{p} \frac{ch[\omega_3(p)(L-x)]}{ch[\omega_3(p)L]}, \quad (19)$$

$$\bar{S}_3(x, y, p) = \bar{S}_2(x, p) \frac{sh\sqrt{\frac{p}{a_3}}y}{sh\sqrt{\frac{p}{a_3}}m_3}, \quad (20)$$

где

$$\omega_3^2(p) = \frac{p}{a_2} + \frac{k_1}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_1}} th \sqrt{\frac{p}{a_1}} m_1 + \frac{k_3}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_3}} cth \sqrt{\frac{p}{a_3}} m_3.$$

Оригиналы (18)-(20) приведены ниже:

$$\begin{aligned} S_1(x, y, t) &= S^* \frac{ch[A_3(L-x)]}{ch[A_3L]} + \\ &+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\frac{L-x}{L}\right]}{\Phi_3(\xi_{j,n}^{(3)})} \times \\ &\times \frac{\cos\left[\frac{\xi_{j,n}^{(3)}(m-y)}{\sqrt{a_1}}\right]}{\cos\left[\frac{\xi_{j,n}^{(3)}m_1}{\sqrt{a_1}}\right]} \exp[-(\xi_{j,n}^{(3)})^2 t], \\ S_2(x, t) &= \frac{S^* ch[A_3(L-x)]}{ch[A_3L]} + \\ &+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\frac{L-x}{L}\right]}{\Phi_3(\xi_{j,n}^{(3)})} \exp[-(\xi_{j,n}^{(3)})^2 t], \\ S_3(x, y, t) &= S^* \frac{y}{m_3} \frac{ch[A_3(L-x)]}{ch[A_3L]} + \\ &+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\frac{L-x}{L}\right]}{\Phi_3(\xi_{j,n}^{(3)})} \times \\ &\times \frac{\sin\left[\frac{\xi_{j,n}^{(3)}y}{\sqrt{a_3}}\right]}{\sin\left[\frac{\xi_{j,n}^{(3)}m_3}{\sqrt{a_3}}\right]} \exp[-(\xi_{j,n}^{(3)})^2 t], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_3(\xi) &= (2n-1)^2 + \frac{4L^2\xi^2}{\pi^2} \phi_3(\xi); \quad A_3^2 = \frac{k_3}{m_3 T_2}; \\ \phi_3(\xi) &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{T_2} \left(\frac{T_1}{a_1 \cos^2 \frac{\xi m_1}{\sqrt{a_1}}} + \frac{T_3}{a_3 \sin^2 \frac{\xi m_3}{\sqrt{a_3}}} \right); \end{aligned}$$

$\xi_{j,n}^{(3)}$ – положительные корни уравнения

$$\frac{\pi^2}{4L^2}(2n-1)^2 + \frac{k_3\xi}{\sqrt{a_3}T_2} \operatorname{ctg} \frac{\xi m_3}{\sqrt{a_3}} = \frac{\xi^2}{a_2} + \frac{k_1\xi}{\sqrt{a_1}T_2} \operatorname{tg} \frac{\xi m_1}{\sqrt{a_1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для определения понижений напоров при различных граничных условиях можно использовать следующие разложения мероморфных функций в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{\operatorname{shaz}}{\operatorname{shbz}} = \frac{a}{b} + \frac{2\pi}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin \frac{a\pi n}{b}}{z^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},$$

$$\frac{1}{z} \frac{\operatorname{shaz}}{\operatorname{chbz}} = a + \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin \frac{a\pi}{2b} (2n-1)}{z^2 + \frac{\pi^2}{4b^2} (2n-1)^2},$$

$$z \frac{\operatorname{chaz}}{\operatorname{shbz}} = \frac{1}{b} + \frac{2z^2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{a\pi n}{b}}{z^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Для создания неподвижной изолированной поверхности перейдем теперь в области $L \leq x \leq L_1$ и функция $S_2(x, t)$ должна удовлетворять двум условиям

$$S_2(L+0, t) = S_2(L-0, t),$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L+0} - \frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L-0} = 0.$$

Используем решение уравнения переменного $\bar{S}_2$ в области изображения. Тогда для первого случая будем иметь

$$\bar{S}_2(x, p) = \tilde{c}_5(p) \operatorname{sh}[\omega_1(p)x] + \tilde{c}_6(p) \operatorname{ch}[\omega_1(p)x]. \quad (21)$$

Постоянные $\tilde{c}_5(p)$ и $\tilde{c}_6(p)$ определим из следующих условий для $x \in [L, L_1]$

$$\frac{d\bar{S}_2}{dx} \Big|_{x=L+0} = 0, \quad (22)$$

$$\bar{S}_2(L_1, p) = \bar{\Gamma}_1(p), \quad (23)$$

где $\bar{\Gamma}_1(p)$ - подлежит определению.

Так как литологическое строение пласта в области $L \leq x \leq L_1$ остаётся тем же, то $\omega_1(p)$ будет определяться формулой

$$\omega_1^2(p) = \frac{p}{a_2} + \frac{k_1}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{a_1}} m_1 + \frac{k_3}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_3}} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{a_3}} m_3$$

Используя условия (22) и (23) из формулы (21), найдём

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{\bar{\Gamma}_1(p) \operatorname{ch}[\omega_1(p)(x-L)]}{\operatorname{ch}[\omega_1(p)(L_1-L)]} \quad (24)$$

и приравняв формулы

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{S^*}{p} \frac{\operatorname{ch}[\omega_1(p)(L-x)]}{\operatorname{ch}[\omega_1(p)L]}$$

с формулой (24) и получим

$$\bar{\Gamma}_1(p) = \frac{S^* ch[\omega_1(p)(L_1 - L)]}{p ch[\omega_1(p)L]}. \quad (25)$$

Здесь предполагается, что выполняется неравенство $L_1 < 2L$. В частном случае при $L_1 = 2L$ область становится симметричной относительно $x = L$, и понижение напора на управляемой галерее скважин станет равной S^* .

Переходя к оригиналу в формуле (25), найдем по какому закону необходимо поддерживать понижение напора как функцию времени t на галерее, размещенной вдоль $x = L_1$, чтобы поверхность, проходящая через точку $x = L$, была бы изолированной и неподвижной.

Из (25) находим оригинал

$$\Gamma_1(t) = \frac{S^* ch[A_1(L_1 - L)]}{ch(A_1 L)} + \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1) \frac{L_1 - L}{L}\right]}{\Phi_1\left(\xi_{j,n}^{(1)}\right)} \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(1)})^2 t]$$

Соответственно для случаев 1 и 2 в области изображений имеем

$$\bar{\Gamma}_2(p) = \frac{S^* ch[\omega_2(p)(L_1 - L)]}{p ch[\omega_2(p)L]}, \quad (26)$$

$$\bar{\Gamma}_3(p) = \frac{S^* ch[\omega_3(p)(L_1 - L)]}{p ch[\omega_3(p)L]}, \quad (27)$$

где используются зависимости аналогичные (21) -(24).

Переходя к оригиналам в формулах (24) и (25), получим условия на управляемой галерее скважин для случаев 1 и 2 соответственно

$$\begin{aligned} \Gamma_2(t) &= \frac{S^* ch[A_2(L_1 - L)]}{ch(A_2 L)} + \\ &+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1) \frac{L_1 - L}{L}\right]}{\Phi_2\left(\xi_{j,n}^{(2)}\right)} \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(2)})^2 t], \\ \Gamma_3(t) &= \frac{S^* ch[A_3(L_1 - L)]}{ch(A_3 L)} + \\ &+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1) \frac{L_1 - L}{L}\right]}{\Phi_3\left(\xi_{j,n}^{(3)}\right)} \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(3)})^2 t]. \end{aligned}$$

В том случае, если в качестве управления галереей скважин при $x = L_1$ служит расход $q(t)$, приходящийся на единицу её длины, то он будет определяться формулой

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L_1+0} - \frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L_1-0} = -\frac{q(t)}{T_2}.$$

Если $x = L_1$ является плоскостью симметрии по отношению к $x = L$ и $x = L_2$, то будет выполняться соотношение $\frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L_2} = 0$. Используя формулы (24) и (25), получим изображения понижений напоров в основном водоносном горизонте в соответствующих областях

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{S^* \operatorname{ch}[\omega_1(p)(x-L)]}{p \operatorname{ch}[\omega_2(p)L]} \quad (L \leq x \leq L_1),$$

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{S^* \operatorname{ch}[\omega_1(p)(L_2-x)]}{p \operatorname{ch}[\omega_2(p)L]} \quad (L_1 \leq x \leq L_2).$$

Оригиналами этих выражений служат функции

$$\begin{aligned} S_2(x, t) &= \frac{S^* \operatorname{ch}[A_1(x-L)]}{\operatorname{ch}(A_1 L)} + \\ &+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{x-L}{L} \right]}{\Phi_1 \left(\xi_{j,n}^{(1)} \right)} \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(1)})^2 t] \\ &\quad (L \leq x \leq L_1), \\ S_2(x, t) &= \frac{S^* \operatorname{ch}[A_1(L_2-x)]}{\operatorname{ch}(A_1 L)} + \\ &+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L_2-x}{L} \right]}{\Phi_1 \left(\xi_{j,n}^{(1)} \right)} \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(1)})^2 t] \\ &\quad (L_1 \leq x \leq L_2). \end{aligned}$$

На основании двух последних формул определяется приведенный расход $q(t)$ на управляемой галереи скважин, или объединяя все случаи, получим

$$q_i(t) = 2S^* T_2 \left\{ A_i \operatorname{sh} A_i l + \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)^2}{\Phi_1 \left(\xi_{j,n}^{(i)} \right)} \sin \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{l}{L} \right] \exp[-(\xi_{j,n}^{(i)})^2 t] \right\} \quad (i=1, 2, 3),$$

где $l = L_2 - l_1 = L_1 - L$.

Из этого выражения видно, что при $t \rightarrow \infty$ $q_i = 2S^* T_2 A_i \operatorname{sh} A_i l$ ($i=1, 2, 3$) принимают постоянные значения.

В выше указанных формулах константы имеют следующие обозначения

$$A_1^2 = A_2^2 + A_3^2, \quad A_2^2 = \frac{k_1}{m_1 T_2}, \quad A_3^2 = \frac{k_3}{m_3 T_2}.$$

3 Results and Discussion

На основе разработанного алгоритма проведены вычислительные эксперименты на ЭВМ по исследованию процесса неустановившейся безнапорной фильтрации потока жидкостей в многослойных неоднородных пористых средах, которые отличаются друг от друга гидрогеологическими характеристиками (рис.1-3).

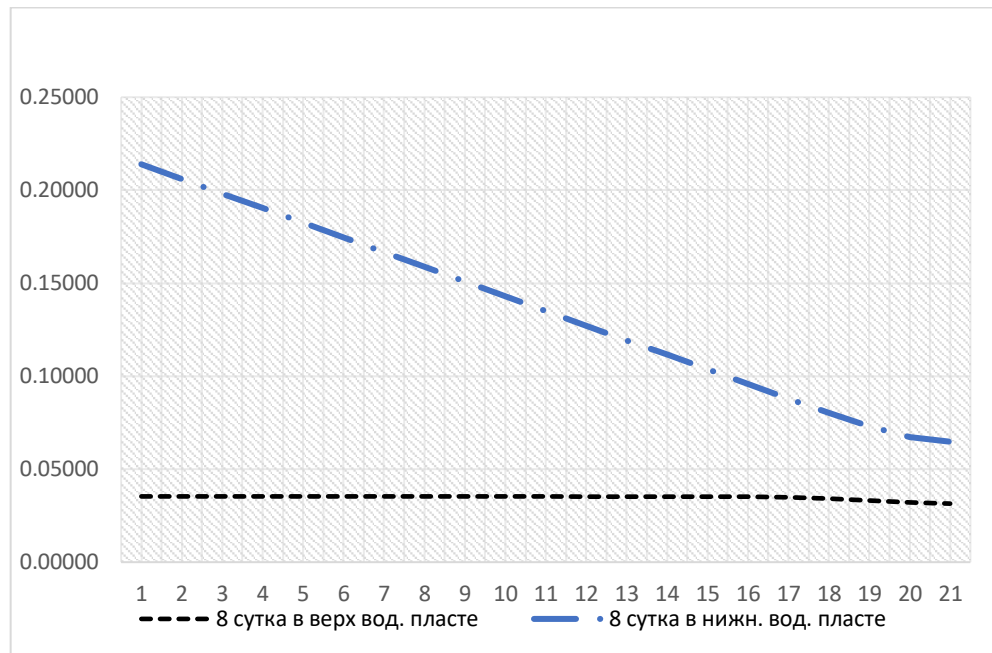


Рис.1 - Изменения напоров в пластах по длине фильтрационных слоев без учёта упругого режима
Fig. 1 - Changes in pressure in layers along the length filtration layers without taking into account the elastic regime

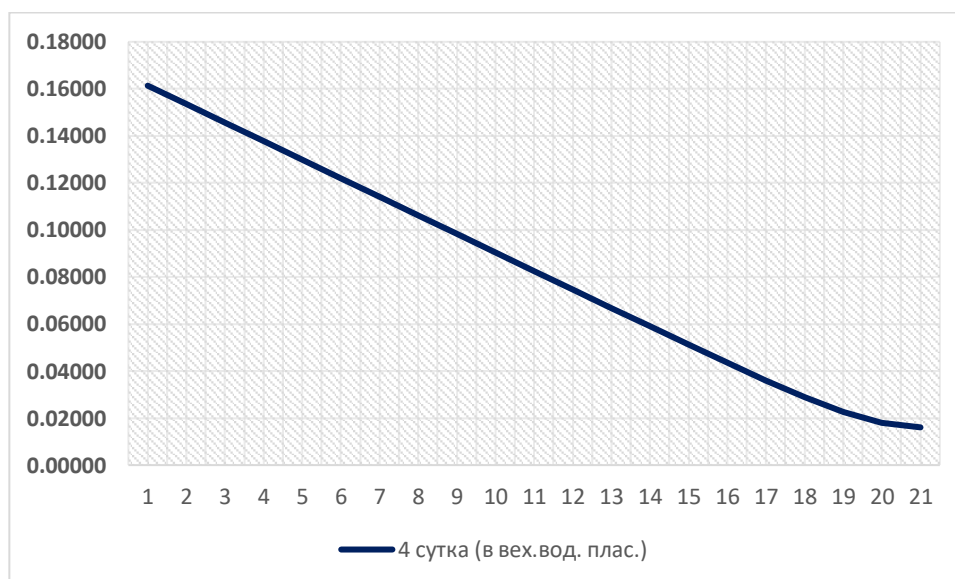


Рис. 2 - Изменение напора в верхнем фильтрационном слое без учёта упругого режима
Fig. 2 - Changes in the pressure in the upper filtration layer without taking into account the elastic regime

Из кривых на рис. 1 видно, что понижение напора по длине верхнего фильтрационного слоя не наблюдается, тогда как существенное понижение напора по длине нижнего фильтрационного слоя (рис. 1, при $t=8$ сут.).

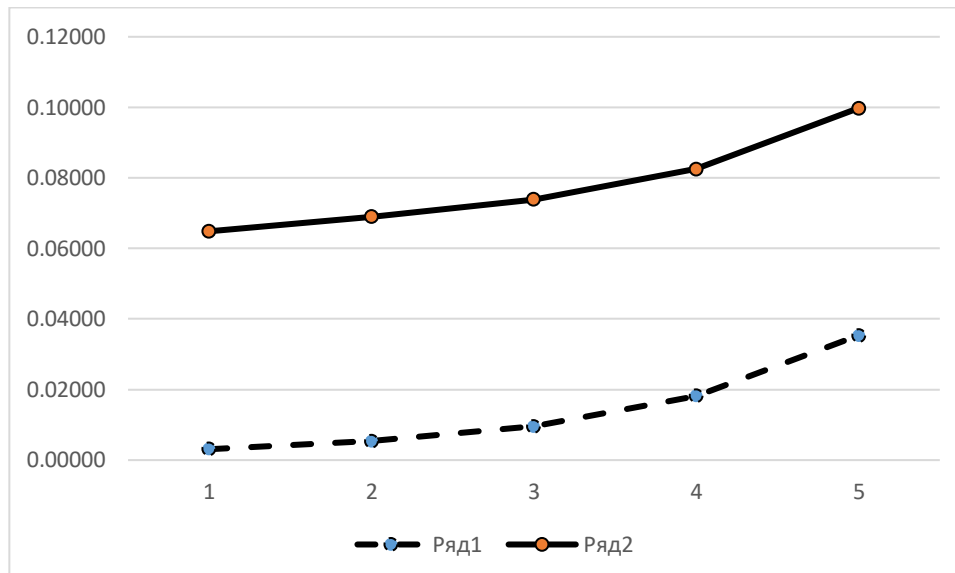


Рис. 3 - Изменения напоров со времени в верхнем и нижнем фильтрационных слоях без учёта упругого режима

Fig. 3 - Changes in heads with time in the upper and lower filtration layers without taking into account the elastic regime

Кривые на рис. 3 показывают, что со временем наблюдается повышение напоров в обоих фильтрационных слоях (верхнем и нижнем), происходящее по экспоненциальному закону.

Кроме того, анализ результатов проведенных вычислительных экспериментов при различных значениях гидродинамических параметров позволил выявить зависимость возникновения перетока жидкости через границу раздела фильтрационных слоев от значений проводимости и пьезопроводности хорошо проницаемых слоев, а также от значений коэффициентов фильтрации и пьезопроводности слабопроницаемого слоя. Также по результатам вычислительных экспериментов установлена степень влияния упругого режима фильтрации в слабопроницаемом слое на перетечи в соседних пластах.

Разработанное математическое обеспечение, реализованное в виде программного средства позволяет строить схемы размещения и мощности скважин вертикального дренажа для защиты орошаемых и неорошаемых территорий от потопления и защиты подземных вод от источников загрязнения. Использование предлагаемого математического инструмента также позволяет получить прогнозные уровни грунтовых вод для любого рассматриваемого района за необходимый период времени с учетом различных факторов: неоднородность пласта в плане; уклон водоупора; инфильтрационное питание; испарение и др. гидрогеологических, гидротехнических и природных условий.

4 Conclusions

В заключении отметим следующее. Аналитическое решение поставленной задачи (1)-(7) в области изображения, то есть когда сверху расположен водоупор, а снизу действует постоянный напор, получено путем применения интегрального преобразования Лапласа.

Получены решение задачи определения напора в слабопроницаемом фильтрационном слое и обобщенная формула для управления галереей скважина на основе приведенных расходов $q_i(t)$.

Разработан метод получения аналитического решения математических моделей массопереноса в ограниченных областях с использованием теоремы Миттага-Леффлера о разложении мероморфных функций на простейшие дроби.

При различных граничных условиях получено соотношение для вычисления расходов галереи скважин для управления дебитами с целью создания неподвижной изолированной поверхности. Соотношение имеет вид суммы простейших дробей как разложения мероморфных функций. Также найдено условие для создания неподвижной изолированной поверхности для

функции $S_2(x, t)$. Способ создания водонепроницаемых поверхностей, при верхней границе, граничащей с атмосферой, определяется в виде функции, зависящей от координаты и времени.

Разработанное математическое обеспечение может быть использовано для предотвращения распространения токсических веществ путем выделения изолированных областей, препятствующих проникновению различных ядохимикатов в зоны с относительно благоприятными экологическими условиями.

5 Acknowledgements

Работа выполнена в рамках проекта прикладных исследований (грант № БВ-Атех-2018-9), финансируемого Министерством инновационного развития Республики Узбекистан.

References

1. Hantush, M.S. Modification of the theory of leaky aquifers. *Journal of Geophysical Research*. 1960. 65(11). Pp. 3713–3725.
2. Huang, M., Tian, Y. Prediction of Groundwater Level for Sustainable Water Management in an Arid Basin Using Data-driven Models. 2015. DOI:10.2991/see-15.2015.33.
3. Bulavatskii, V.M. Mathematical modeling of filtration consolidation with salt transfer in a double-relaxation system. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. 44(1). Pp. 91–99. DOI:10.1007/s10559-008-0008-7.
4. Vlasyuk, A., Tsvetkova, T., Falat, P., Klos-Witkowska, A., Warwas, K. Mathematical modelling of infiltration effect on process of salts transfer in layered saturated-non-saturated soils. *Proceedings of the 2017 IEEE 9th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, IDAACS 2017*. 2017. DOI:10.1109/IDAACS.2017.8095100.
5. Abutaliev, F.B. *Methods of mathematical modeling of hydrogeological processes*. Moscow, 1972. 138 p.
6. Anderson, E.I. An analytical solution representing groundwater-surface water interaction. *Water Resources Research*. 2003. 39(3). DOI:10.1029/2002WR001536.
7. Tolpaev, V.A. *Matematicheskie modeli dvukhmernoĭ fil'tratsii v anizotropnykh, neodnorodnykh i v mnogosloĭnykh sredakh: dis. ... d-ra. fiz.-mat. nauk. Stavropol'*, 2004.
8. Kuznetsov, D. *Modelirovanie struktury potokov podzemnykh vod v mnogosloĭnykh vodonosnykh sistemakh: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. Moskva*, 2004.
9. Kakushev, Ė.. *Chislennoe reshenie svyazannykh trekhmernykh kraevykh zadach uprugoi poristoĭ sredy: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. Moskva*, 2013.
10. Elantseva, L.A., Zaitsev, D.A., Fomenko, S.V. *Gidrogeologicheskie prognozy v tseliakh osusheniia mestorozhdeniia almazov. Izvestiia Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesurov*. 2019. 330(7). Pp. 53–61.12. Guo, Q., Huang, J., Zhou, Z., Wang, J. Experiment and numerical simulation of seawater intrusion under the influences of tidal fluctuation and groundwater exploitation in coastal multilayered aquifers. *Geofluids*. 2019. DOI:10.1155/2019/2316271.
11. Das, P., Begam, S., Singh, M.K. Mathematical modeling of groundwater contamination with varying velocity field. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*. 2017. DOI:10.1515/johh-2017-0013.
12. Singh, M.K., Singh, V.P., Das, P. Mathematical modeling for solute transport in aquifer. *Journal of Hydroinformatics*. 2016. DOI:10.2166/hydro.2015.034.
13. Zhao, M. Finite element numerical simulation for 2-D ground water groundwater movement in confined aquifer. *Communications in Computer and Information Science*. 2011. DOI:10.1007/978-3-642-22418-8_79.
14. Banerjee, P., Prasad, R.K., Singh, V.S. Forecasting of groundwater level in hard rock region using artificial neural network. *Environmental Geology*. 2009. DOI:10.1007/s00254-008-1619-z.
15. Yoon, H., Jun, S.C., Hyun, Y., Bae, G.O., Lee, K.K. A comparative study of artificial neural networks and support vector machines for predicting groundwater levels in a coastal aquifer. *Journal of Hydrology*. 2011. DOI:10.1016/j.jhydrol.2010.11.002.
16. Mustafa, S., Darwish, M., Bahar, A., Aziz, Z.A. Analytical Modeling of Well Design in Riverbank Filtration Systems. *Groundwater*. 2019. DOI:10.1111/gwat.12868.

Ravshanov, N.; Abdullaev, Z.; Khafizov, O.

Modeling the filtration of groundwater in multilayer porous media;

2020; *Construction of Unique Buildings and Structures*; Volume 92 Article No 9206. doi: 10.18720/CUBS.92.6

17. Lin, P.L., Hsu, K.C., Lin, C.W., Hwung, H.H. Modeling compaction of multi-layer-aquifer system due to groundwater withdrawal. *Engineering Geology*. 2015. DOI:10.1016/j.enggeo.2015.01.002.
18. Alvarez, A.C., Hime, G., Marchesin, D., Bedrikovetsky, P.G. The inverse problem of determining the filtration function and permeability reduction in flow of water with particles in porous media. *Transport in Porous Media*. 2007. DOI:10.1007/s11242-006-9082-3.
19. Gromyko, G., Chuiko, M., Smychnik, A., Hrechka, A., Zlebava, A. Mathematical Modeling of Geofiltration and Geomigration Processes in Multilayer Systems. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2007. DOI:10.2478/cmam-2007-0009.
20. Suresh Kumar, G. Mathematical modeling of groundwater flow and solute transport in saturated fractured rock using a dual-porosity approach. *Journal of Hydrologic Engineering*. 2014. DOI:10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0000986.
21. Baklushin, M.B., Kodirov, K.R. Spособ upravleniia naporum galerei skvazhin pri nakhozhdenii urovniia podzemnykh vod so svobodnoi poverkhnosti. *Uzbekskii zhurnal problemy informatiki i energetiki*. 2009. (1). Pp. 31–35.
22. Ravshanov, N., Daliev, S. Non-linear mathematical model to predict the changes in underground water level and salt concentration. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. DOI:10.1088/1742-6596/1441/1/012163.
23. Ravshanov, N., Daliev, S., Abdullaev, Z., Khafizov, O. Ground and confined underground waters and their salt content. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. DOI:10.1088/1757-899x/896/1/012047.
24. Daliev, S., Abdullaeva, B., Kubyasev, K., Abdullaev, O. Numerical study of filtration process of ground and pressure waters in multilayer porous media. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. DOI:10.1088/1757-899x/896/1/012069.
25. Ravshanov, N., Khurramov, I., Aminov, S.M. Mathematical modeling of the process of water-soline transport in soils. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. DOI:10.1088/1742-6596/1210/1/012118.