Свойства коэффициентов регрессии. Условия Гаусса-Маркова

План

* Свойства коэффициентов регрессии
* Условия Гаусса-Маркова
* Пример

Карл Фридрих Гаусс
(30.04.1777 - 23.02.1855)
Научная сфера – математика, физика, астрономия

Андрей Андреевич Марков
(14.06.1856 - 20.07.1922)
Научная сфера - математика

Модель регрессии

Предположим, что истинная модель регрессии между, например, расходами на питание (***y***) и располагаемым личным доходом (***x***) описывается следующим выражением:

$$y = \alpha + \beta x + u$$

и оценка регрессии

$$Y = 55{,}3 + 0{,}093x$$

Интерпретация коэффициентов регрессии

Полученный результат можно истолковать следующим образом: коэффициент при ***x*** (коэффициент наклона) показывает, что если ***x*** увеличивается на одну единицу, то ***y*** возрастает на 0,093 единицы.

Если доход увеличивается на $1 млрд., то расходы на питание возрастают на $93 млн.

Интерпретация коэффициентов регрессии

Постоянная в уравнении показывает прогнозируемый уровень ***y***, когда ***x = 0***. Иногда это имеет смысл, иногда нет.

В рассматриваемом случае получается, что если доход был бы равен 0, то расходы на питание составили бы 55,3 млрд. долл. Такое толкование может быть правдоподобным в отношении отдельного человека, т.к. он может израсходовать на питание накопленные или одолженные средства. Однако вряд ли оно имеет какой то смысл применительно к совокупности

Предположения о случайной составляющей

Для того, чтобы регрессионный анализ, основанный на обычном методе наименьших квадратов, давал наилучшие из всех возможные результаты, случайная составляющая должна удовлетворять четырем условиям, известным как условия Гаусса – Маркова

Условия Гаусса – Маркова

Первое условие Гаусса – Маркова:

Математическое ожидание $\boldsymbol{M(u_i) = 0}$ для всех наблюдений.

Иногда случайная составляющая будет положительной, иногда отрицательной, но она не должна иметь систематического смещения ни в одном из двух возможных направлений.

Данное условие означает, что случайное отклонение в среднем не оказывает влияния на зависимую переменную

Условия Гаусса – Маркова

Второе условие Гаусса – Маркова:

Дисперсия $\boldsymbol{D(u_i)}$ постоянна для всех наблюдений.

Если это условие не выполняется, то коэффициенты регрессии, найденные по обычному методу наименьших квадратов, будут неэффективны, и можно получить более надежные результаты путем применения модифицированного метода регрессии.

Условия Гаусса – Маркова

Иногда случайная составляющая будет больше, иногда меньше, однако не должно быть априорной причины для того, чтобы она порождала большую ошибку в одних наблюдениях, чем в других.

Из данного условия следует, что несмотря на то, что при каждом конкретном наблюдении случайное отклонение e_i может быть различным, но не должно быть причин, вызывающих большую ошибку

Условия Гаусса – Маркова

Третье условие Гаусса – Маркова:

$\boldsymbol{cov(u_i, u_j) = 0.}$

Это условие предполагает отсутствие систематической связи между значениями случайной составляющей в любых двух наблюдениях. Случайные составляющие должны быть абсолютно независимы друг от друга.

Если это условие не будет выполнено, то регрессия, оцененная по обычному методу наименьших квадратов, вновь даст неэффективные результаты

Если данное условие выполняется, то говорят об отсутствии автокорреляции

Условия Гаусса – Маркова

Четвертое условие Гаусса – Маркова:

случайная составляющая должна быть распределена независимо от объясняющих переменных

$\boldsymbol{Cov(x_i, u_i) = 0}$ или

$\boldsymbol{M(x_i u_i) = 0}$

Это условие выполняется, если объясняющая переменная не является случайной в данной модели

Пример

Проверить выполнение условий Гаусса-Маркова для следующих данных:

x	*u1*
1	1,62
2	-0,99
3	-0,81
4	-0,25
5	1,69
6	0,15
7	0,07
8	-0,15
9	-0,91
10	1,42

x	*u2*
1	1,25
2	1,46
3	-0,35
4	-1,45
5	-1,35
6	1,60
7	0,91
8	-0,07
9	-1,81
10	0,55

Решение

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

x	*u1*
1	1,62
2	-0,99
3	-0,81
4	-0,25
5	1,69
6	0,15
7	0,07
8	-0,15
9	-0,91
10	1,42
M(u)=	0,184
D(u)=	0,9735

x	*u2*
1	1,25
2	1,46
3	-0,35
4	-1,45
5	-1,35
6	1,60
7	0,91
8	-0,07
9	-1,81
10	0,55
M(u)=	0,074
D(u)=	1,468

Решение

Найдем ковариацию cov(u1,u2):

u1-u1cp	u2-u2cp	(u1-u1cp)(u2-u2cp)
1,44	1,18	1,69
-1,17	1,39	-1,63
-0,99	-0,42	0,42
-0,43	-1,52	0,66
1,51	-1,42	-2,14
-0,03	1,53	-0,05
-0,11	0,84	-0,10
-0,33	-0,14	0,05
-1,09	-1,89	2,06
1,24	0,48	0,59
		1,553
cov(u1,u2)=		0,155

Решение

Найдем ковариации cov(x,u1) и cov(x,u2):

x-xcp	u1-u1cp	(x-xcp)(u1-u1cp)
-4,5	1,44	-6,46
-3,5	-1,17	4,11
-2,5	-0,99	2,49
-1,5	-0,43	0,65
-0,5	1,51	-0,75
0,5	-0,03	-0,02
1,5	-0,11	-0,17
2,5	-0,33	-0,84
3,5	-1,09	-3,83
4,5	1,24	5,56
		0,74
cov(x,u1)=		0,074

x-xcp	u2-u2cp	(x-xcp)(u2-u2cp)
-4,5	1,18	-5,291791433
-3,5	1,39	-4,850837781
-2,5	-0,42	1,06011587
-1,5	-1,52	2,286069522
-0,5	-1,42	0,712023174
0,5	1,53	0,764699603
1,5	0,84	1,254055837
2,5	-0,14	-0,36011587
3,5	-1,89	-6,604891977
4,5	0,48	2,141791433
		-8,888881622
cov(x,u2)=		-0,888888162

Задание

* Скачать файл «Практическое занятие 8» из MOODLE и выполнить приведенные задания
* Решение задания загрузить в MOODLE

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

☎ + 998 71 237 1948

✉ smirzaev@tiiame.uz