

# Свойства коэффициентов регрессии. Условия Гаусса- Маркова

# План

- \* Свойства коэффициентов регрессии
- \* Условия Гаусса-Маркова
- \* Пример



**Карл Фридрих Гаусс**  
(30.04.1777 - 23.02.1855)  
Научная сфера –  
математика, физика,  
астрономия



**Андрей Андреевич Марков**  
(14.06.1856 - 20.07.1922)  
Научная сфера - математика

# Модель регрессии

Предположим, что истинная модель регрессии между, например, расходами на питание ( $y$ ) и располагаемым личным доходом ( $x$ ) описывается следующим выражением:

$$y = \alpha + \beta x + u$$

и оценка регрессии

$$Y = 55,3 + 0,093x$$

# Интерпретация коэффициентов регрессии

Полученный результат можно истолковать следующим образом: коэффициент при  $x$  (коэффициент наклона) показывает, что если  $x$  увеличивается на одну единицу, то  $y$  возрастает на 0,093 единицы.

Например, если доход увеличивается на 1 млрд.сум, то расходы на питание возрастают на 93 млн.сум

# Интерпретация коэффициентов регрессии

Постоянная в уравнении показывает прогнозируемый уровень  $y$ , когда  $x = 0$ . Иногда это имеет смысл, иногда нет.

В рассматриваемом случае получается, что если доход был бы равен 0, то расходы на питание составили бы 55,3 единиц. Такое толкование может быть правдоподобным в отношении отдельного человека, т.к. он может израсходовать на питание накопленные или одолженные средства. Однако вряд ли оно имеет какой то смысл применительно к совокупности

# Предположения о случайной составляющей

Для того, чтобы регрессионный анализ, основанный на обычном методе наименьших квадратов, давал наилучшие из всех возможные результаты, случайная составляющая должна удовлетворять четырем условиям, известным как условия Гаусса-Маркова

# Условия Гаусса – Маркова

Первое условие Гаусса-Маркова:

Математическое ожидание  $M(u_j) = 0$  для всех наблюдений.

Иногда случайная составляющая будет положительной, иногда отрицательной, но она не должна иметь систематического смещения ни в одном из двух возможных направлений.

Данное условие означает, что случайное отклонение в среднем не оказывает влияния на зависимую переменную



# Условия Гаусса – Маркова

Второе условие Гаусса – Маркова:

Дисперсия  $D(u_j)$  постоянна для всех наблюдений.

Если это условие не выполняется, то коэффициенты регрессии, найденные по обычному методу наименьших квадратов, будут неэффективны, и можно получить более надежные результаты путем применения модифицированного метода регрессии.

# Условия Гаусса – Маркова

Иногда случайная составляющая будет больше, иногда меньше, однако не должно быть априорной причины для того, чтобы она породила большую ошибку в одних наблюдениях, чем в других.

Из данного условия следует, что несмотря на то, что при каждом конкретном наблюдении случайное отклонение  $e_i$  может быть различным, но не должно быть причин, вызывающих большую ошибку

# Условия Гаусса – Маркова

Третье условие Гаусса – Маркова:

$$\text{cov}(u_i, u_j) = 0.$$

Это условие предполагает отсутствие систематической связи между значениями случайной составляющей в любых двух наблюдениях.

Случайные составляющие должны быть абсолютно независимы друг от друга.

Если это условие не будет выполнено, то регрессия, оцененная по обычному методу наименьших квадратов, вновь даст неэффективные результаты

**Если данное условие выполняется, то говорят об отсутствии автокорреляции**

# Условия Гаусса – Маркова

Четвертое условие Гаусса – Маркова:

*случайная составляющая должна быть распределена независимо от объясняющих переменных*

$$\text{Cov}(x_i, u_i) = 0$$

Это условие выполняется, если объясняющая переменная не является случайной в данной модели

# Пример

Проверить выполнение условий Гаусса-Маркова для следующих данных:

$x$	$u1$
1	1,62
2	-0,99
3	-0,81
4	-0,25
5	1,69
6	0,15
7	0,07
8	-0,15
9	-0,91
10	1,42

$x$	$u2$
1	1,25
2	1,46
3	-0,35
4	-1,45
5	-1,35
6	1,60
7	0,91
8	-0,07
9	-1,81
10	0,55

# Решение

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

$x$	$u1$
1	1,62
2	-0,99
3	-0,81
4	-0,25
5	1,69
6	0,15
7	0,07
8	-0,15
9	-0,91
10	1,42
$M(u)=$	0,184
$D(u)=$	0,9735

$x$	$u2$
1	1,25
2	1,46
3	-0,35
4	-1,45
5	-1,35
6	1,60
7	0,91
8	-0,07
9	-1,81
10	0,55
$M(u)=$	0,074
$D(u)=$	1,468

# Решение

Найдем ковариацию  $\text{cov}(u_1, u_2)$ :

$u_1 - u_{1cp}$	$u_2 - u_{2cp}$	$(u_1 - u_{1cp})(u_2 - u_{2cp})$
1,44	1,18	1,69
-1,17	1,39	-1,63
-0,99	-0,42	0,42
-0,43	-1,52	0,66
1,51	-1,42	-2,14
-0,03	1,53	-0,05
-0,11	0,84	-0,10
-0,33	-0,14	0,05
-1,09	-1,89	2,06
1,24	0,48	0,59
		1,553
$\text{cov}(u_1, u_2) =$		0,155

# Решение

Найдем ковариации  $\text{cov}(x, u_1)$  и  $\text{cov}(x, u_2)$ :

$x - x_{\text{ср}}$	$u_1 - u_{1\text{ср}}$	$(x - x_{\text{ср}})(u_1 - u_{1\text{ср}})$
-4,5	1,44	-6,46
-3,5	-1,17	4,11
-2,5	-0,99	2,49
-1,5	-0,43	0,65
-0,5	1,51	-0,75
0,5	-0,03	-0,02
1,5	-0,11	-0,17
2,5	-0,33	-0,84
3,5	-1,09	-3,83
4,5	1,24	5,56
		0,74
$\text{cov}(x, u_1) =$		0,074

$x - x_{\text{ср}}$	$u_2 - u_{2\text{ср}}$	$(x - x_{\text{ср}})(u_2 - u_{2\text{ср}})$
-4,5	1,18	-5,291791433
-3,5	1,39	-4,850837781
-2,5	-0,42	1,06011587
-1,5	-1,52	2,286069522
-0,5	-1,42	0,712023174
0,5	1,53	0,764699603
1,5	0,84	1,254055837
2,5	-0,14	-0,36011587
3,5	-1,89	-6,604891977
4,5	0,48	2,141791433
		-8,888881622
$\text{cov}(x, u_2) =$		-0,888888162



# Анализ полученных результатов

1. Первое условие не выполняется.
2. Второе условие не выполняется.
3. Третье условие выполняется.
4. Четвертое условие не выполняется.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!



+ 998 71 237 1948



[smirzaev@tiame.uz](mailto:smirzaev@tiame.uz)