TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO’JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

«Ekonometrika»

Regressiya koeffitsientlarining aniqligi va siljimasligi

mavzusi bo’yicha videoma’ruza

Ma’ruzachi: TIQXMMI «Axborot texnologiyalari» kafedrasi professori, i.f.n.
Shadmanova Gulchera
electron manzil: gulcher_sh@mail.ru

Reja:

1. *Chiziqli regressiya tahlili*
2. *Regressiya koeffitsientlarining aniqligi*
3. *Regressiya koeffitsientining siljimasligi*

1. Chiziqli regressiya tahlili.

Aytaylik ikki o‘zgaruvchi orasida quyidagi bog‘lanish mavjud:

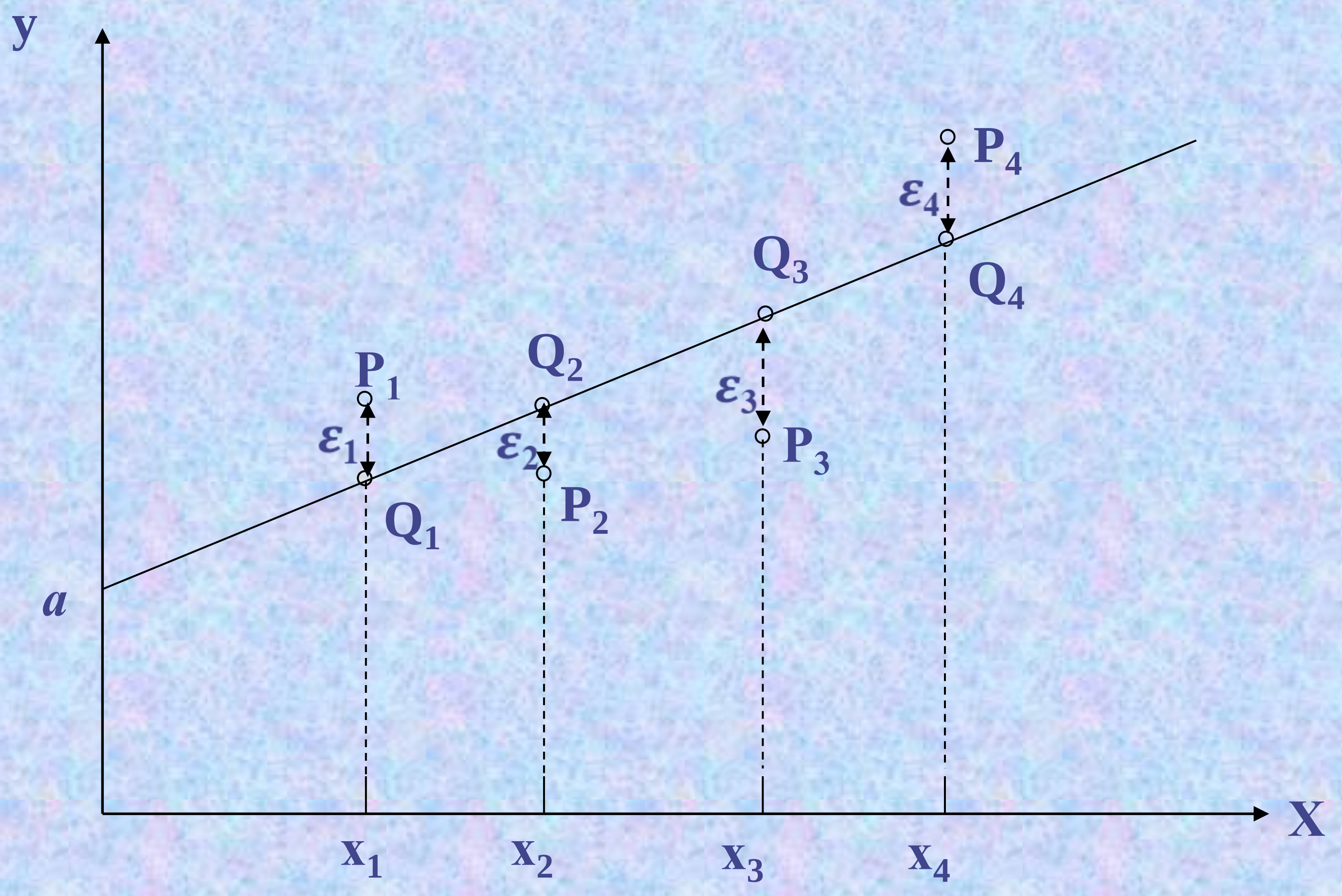
$$Y = \alpha + \beta x + \varepsilon$$

bu yerda $\alpha+\beta x$ tasodifiy bo‘lmagan qismi, x erkli o‘zgaruvchi sifatida qatnashadi, α va β lar esa aniqlanishi kerak bo‘lgan noma'lum parametrlardir, ε-tasodifiy miqdor.

Regressiya tahlilining asosiy masalasi α va β parametrlarning bahosini va kuzatish natijalari bo‘yicha o‘tadigan to‘g‘ri chiziqning holatini aniqlashdan iboratdir.

Parametrlarni baholashning eng kichik kvadratlar usuli

Aytaylik X va Y lar uchun 4 ta kuzatish natijalariga egamiz va bu natijalar orqali α, β parametrlarning qiymatini aniqlaymiz.



Har bir kuzatishlarining xatosini aniqlaymiz:

$$\varepsilon_1 = y_1 - \hat{y}_1 \quad \varepsilon_2 = y_2 - \hat{y}_2 \quad \varepsilon_3 = y_3 - \hat{y}_3 \quad \varepsilon_4 = y_4 - \hat{y}_4$$

Noma'lum parametrlarni topishning usullaridan biri xatolar kvadratlarining yig"indisini minimallashtirishdan iboratdir.

$$S = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 \to \min$$

$$S(\alpha,\beta) = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \to min$$

Bundan quyidagini yozish mumkin:

$$\begin{cases} \sum y_i = n\alpha + \beta \sum x_i \\ \sum x_i y_i = \alpha \sum x_i + \beta \sum x_i^2 \end{cases}$$

normal tenglamalar sistemasi hosil boladi, bu yerdan α va β larni topamiz va ularni mos ravishda :$a\ va\ b$ lar bilan belgilaymizz:

$$b = \frac{cov(x, y)}{var(x)}; \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

bu yerda

$$cov(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$var(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Yuqorida tanishib chiqqan usul orqali biz quyidagi bir o‘zgaruvchili regressiya modelini qaraymiz:

$$Y = \alpha + \beta x + \varepsilon \qquad (1)$$

va tanlama kuzatishlari orqali regressiya tenglamasi koeffitsientlarini baholab, quyidagini hosil qildik deb hisoblaymiz: $\hat{y} = a + bx$ (2)

Shuningdek biz x- tasodifiy bo‘lmagan ekzogen o‘zgaruvchi deb faraz qilamiz. Boshqacha so‘z bilan aytganda uning qiymatlari barcha kuzatishlarda oldindan berilgan va qidirilayotgan bog‘lanish bilan hech qanday aloqaga ega emas.

Biz bilamizki, Y miqdor ikkita qismdan iborat.

Birinchi qismi $\alpha+\beta x$ tasodifiy bo‘lmagan qismdan iborat bo‘lib, ehtimollik qonunlariga bog‘liq emas va ikkinchisi ε tasodifiy qismi.

Bundan kelib chiqib b ni

$$b = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)} \quad (3)$$

formula orqali hisoblaymiz. Ko‘rinib turibdiki b ham tasodifiy qismdan iborat. Cov (x, y) y ning qiymatlaridan bog‘liq, y esa ε ning qiymatidan bog‘liq.

Agar tasodifiy qismi n ta kuzatishlarda turli xil qiymatlarni qabul qilsa, u holda biz y ning turli xil qiymatlarini hosil qilamiz, bundan kelib chiqadiki Cov (x, y) va b ning ham turli qiymatlari hosil qilinadi.

Nazariy jihatdan biz b ni tasodifiy va tasodifiy bo‘lmagan qismlarga ajratamiz. (1) munosabatdan va kovariatsiyani hisoblashning 1 qoidasiga asosan:

$$Cov(x,y) = Cov(x,[\alpha + \beta x + \varepsilon]) = Cov(x,\alpha) + \\ + Cov(x,\beta x) + Cov(x,\varepsilon) \qquad (3)$$

ni hosil qilamiz.

Kovariatsiyaning 3- qoidasiga asosan Cov (x, α) nolga teng 2 – qoidasiga asosan

$$Cov\ (x,\ \beta x) = \beta Cov\ (x,\ x).$$

Cov (x, x) Var(x) degan so‘z, bundan kelib chiqadiki

$$Cov(x,y) = \beta Var(x) + Cov(x,\varepsilon) \qquad (4)$$

ekan. Buning ikkala tomonini Var(x)ga bo‘lsak

u holda

$$b = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)} = \beta + \frac{Cov(x,\varepsilon)}{Var(x)}.$$ bo‘ladi. (5)

Shunday qilib, biz ixtiyoriy tanlama orqali hosil qilgan regressiya koeffitsienti ikkita qo‘shiluvchi ko‘rinishda ifodalanadi:

ε

1) β ning haqiqiy qiymatiga teng bo‘lgan o‘zgarmas miqdor .
2) $Cov\ (x,\ \varepsilon)$ dan bog‘liq bo‘lgan tasodifiy qismi. Bu qismi koeffitsientning β konstantadan og‘ishmasi bilan asoslanadi. Xuddi shuningdek a ning ham α ning haqiqiy qiymatiga teng bo‘lgan o‘zgarmas qismidan va ε dan bog‘liq bo‘lgan tasodifiy qismlari yig‘indisidan iborat ekanligini ko‘rsatish mumkin.
Shuni yodda tutish kerakki biz amaliyotda regressiya koeffitsientlarini qismlarga ajrata olmaymiz, chunki α va β larning hisoblanadigan qiymatlarini va ε ning tanlamadagi haqiqiy qiymatlarini bilmaymiz.

Umumiy holda aytish mumkinki, regressiya koeffitsiyenti, yuqori aniqlikka erishishi uchun quyidagilar bajarilishi kerak:

1. tanlamadagi kuzatishlar soni yetalicha ko‘p bo‘lishi;
2. tushuntiruvchi o‘zgaruvchilarda tanlama dispersiyasi katta bo‘lishi;
3. tasodifiy hadning nazariy dispersiyasi kichik bo‘lishi;

Gauss-Markovning quyidagi 4 ta shartidan regressiya koeffitsientining siljimasligi qoidalarini aniqlashda foydalanishimiz uchun ularni quyida keltirib o‘tamiz.

Gauss-Markovning 4 ta sharti:

1-sharti: Barcha kuzatishlarda $E(\varepsilon_i) = 0$. Bu shart shundan iboratki har qanday kuzatishda tasodifiy handing matematik kutishi nolga teng bo‘lishi kerak.

2-sharti: Barcha kuzatishlarda $pop.var(\varepsilon_i)$ o‘zgarmas bo‘lishi kerak. Bu degan so’z tasodifiy hadning dispersiyasi barcha kuzatishlarda o‘zgarmas bo‘lishi kerak.

3-sharti: $pop.cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 (i \neq j)$ bolishi kerak. Buning ma’nosi, har qanday ixtiyoriy ikkita kuzatishda tasodifiy hadlar miqdorlari orasida muntazam bog�much'lanish mavjud bo‘lmasligi kerak.

4-sharti: tasodifiy had tushuntiruvchi o‘zgaruvchilardan bog‘liq bo‘lmagan holda taqsimlanishi kerak.

3.Regressiya koeffitsientining siljimasligi

Regressiya tenglamasini hosil qilganimizdan keyin uning koeffitsientlarining siljimasligi ko'rsatiladi.

$$b = \frac{Cov(x, y)}{Var(x)} = \beta + \frac{Cov(x, \varepsilon)}{Var(x)}$$

tenglamaga asosan agar Gauss-Markovning 4- sharti bajarilsa, u holda b β ning siljimagan bahosidan iboratdir.

$$E\{b\} = E\left\{\beta + \frac{Cov(x,\varepsilon)}{Var(x)}\right\} = \beta + E\left\{\frac{Cov(x,\varepsilon)}{Var(x)}\right\}(1)$$

chunki β - o'zgarmas. Agar biz x - tasodifiy miqdor emas deb, Gauss-Markovning 4- shartining kuchaytirilgan shak-lini qo'llasak, u holda $var(x)$ ni ham o'zgarmas deb hisoblashimiz mumkin.

Shunday qilib

$$E(b) = \beta + \frac{1}{Var(x)} E\{Cov(x, \varepsilon)\} \qquad (2)$$

Agar x - tasodifiy miqdor bo‘lmasa, u holda

$\{cov(x, \varepsilon)\} = 0$ va bundan E(b)=β ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, b β ning siljimagan bahosidan iborat ekan. Xuddi shuningdek a koeffitsient uchun ham yuqoridagilarning to‘g‘riligini ko‘rsatish mumkin.

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

formuladan $E(a) = E(\bar{y}) - \bar{x}E\{b\}$ (3)

kelib chiqadi. $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ formula bilan ifodalanganligi uchun

$$E\{y_i\} = \alpha + \beta x_i + E\{\varepsilon_i\} = \alpha + \beta\bar{x}$$

ni yozish mumkin, chunki Gauss-Markovning 1-sharti bajarilsa, $E\{\varepsilon_i\} = 0$ bo‘ladi. Bundan

$E\{\bar{y}_i\} = \alpha + \beta\bar{x}$ kelib chiqadi. Buni (3)ga qo‘ysak va $E\{b\} = \beta$ dan foydalansak

$$E\{a\} = (\alpha + \beta\bar{x}) - \beta\bar{x} = \alpha$$ bo‘ladi.

Shunday qilib $E\{a\} = \alpha$ bo‘lib, a α ning siljimagan bahosidan iborat ekan. Buni biz Gauss-Markovning 1 va 4 shartlariga asosan keltirib chiqardik.

Mustaqil o‘zlashtirish uchun savol va topshiriqlar

1. Regressiya koeffitsiyentlari qanday aniqlanadi?
2. Regressiya koeffitsiyentlari qaysi usul bilan aniqlanadi?.
3. Kuzatish xatolari deganda nima tushuniladi?
4. Kuzatish xatolari qanday aniqlanadi?
5. Regressiya tenglamasi nechta qismdan iborat?
6. Regressiya tenglamasi qismlari qanday nomlanadi?
7. Ikki ozgaruvchi orasidagi kovariatsiya qanday aniqlanadi va bu orqali nimani topamiz?
8. Regressiya koeffitsiyentlari aniqligini qanday ko’rsatish mumkin?
9. Gauss –Markov shartlari nechta?

10. Gauss –Markovning qaysi shartidan foydalanib regressiya koeffitsiyentlari siljimasligi isbotlangan?

11. Regressiya koeffitsiyentlari aniqligi va siljimasligi formulalarini yozib isbotlang.

ADABIYOTLAR ROYXATI

1. Dougherti K. Introduction to ekonometrics– New York. Oxford University Press. 2011.
2. James H. Stock, Mark W. Watson. Introduction to Econometrics. Third edition. Addison-Weslay. 2011.
3. Абдуллаев А.М., Ходиев Б.Ю., Ишназаров А.И. Эконометрика: Учебник. – Т.: ТГЭУ. 2007.
4. Беркинов Б.Б.Эконометрика.-Т. Фан ва технология. 2015.
5. Ходиев Б.Ю., Шодиев Т.Ш., Беркинов Б.Б., Эконометрика.-Т. ТДИУ. 2016.
6. Shadmanova G. Iqtisodiy matematik usullar va modellar. Darslik..-T.TIQXMMI. 2013.
7. Shadmanova G.,Raxmankulova B.,Karimova X.X. Ekonometrika Darslik..-T.TIQXMMI. 2019.
8. https://www.hse.ru/ba/we/courses/292702275.html
9. https://www.coursera.org/learn/ekonometrika

ETIBORINGIZ UCHUN RAHMAT!