MAVZU: Chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqini. Grafik usul

REJA:

1
- **Chiziqli programmalashtirish masalasining geometirik talqini**

2
- **Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish.**

3
- **Mutaxassislik masalani grafik usulda yechish va tahlil qilish.**

Quyidagi ko'rinishda yozilgan chiziqli programmalashtirish masalasini ko'ramiz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i, \quad (i=\overline{1,m}) \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}) \qquad (2)$$

$$Y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max). \qquad (3)$$

(1) - (3) chiziqli programmalashtirish masalasining rejasini *n* o'lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bunday nuqtalar to'plami qavariq to'plamdan iborat bo'ladi.

Qavariq to'plam chegaralangan (qavariq ko'pburchak), chegaralanmagan (qavariq ko'p qirrali soha) bo'lishi, bitta nuqtadan iborat bo'lishi yoki bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin.

Gipertekislik **deb koordinatalari** $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a$ **tenglamani qanoatlantiruvchi** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **nuqtalar to'plamiga aytiladi.**

(1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar ko'pburchagiga tegishli bo'lgan shunday $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ **nuqtani topish kerakki, bu nuqtada** Y **maqsad funksiyaga maksimum (minimum) qiymat beruvchi (3) gipertekisliklar oilasiga tegishli bo'lgan gipertekislik o'tsin.**

Jumladan, $n=2$ **da (1)-(3) masala quyidagicha talqin qilinadi:**

(1)-(2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar ko'pburchagiga tegishli bo'lgan shunday $X^*=(x_1^*, x_2^*)$ **nuqtani topish kerakki, bu nuqtadan** Y **maqsad funksiyaga eng katta (eng kichik) qiymat beruvchi chiziq o'tsin.**

Chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqiniga hamda chiziqli programmalash masalasi yechimlarining xossalariga tayanib, masalani ba'zi hollarda grafik usulda yechish mumkin.

Ikki o'lchovli fazoda berilgan quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini ko'ramiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ ------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \tag{5}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max. \tag{6}$$

Faraz qilaylik, (4) sistema (5) shartni qanoatlantiruvchi sistema yechimlarga ega bo'lsin, hamda ulardan tashkil topgan to'plam chekli bo'lsin.

(4) va (5) tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad (i=1,\ldots,m),$$

$x_1=0$, $x_2=0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi.

Har bir $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \qquad (i = \overline{1,m})$ (7)

to'g'ri chiziqning qaysi tomonida yotgan yarim tekislik

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (8)$$

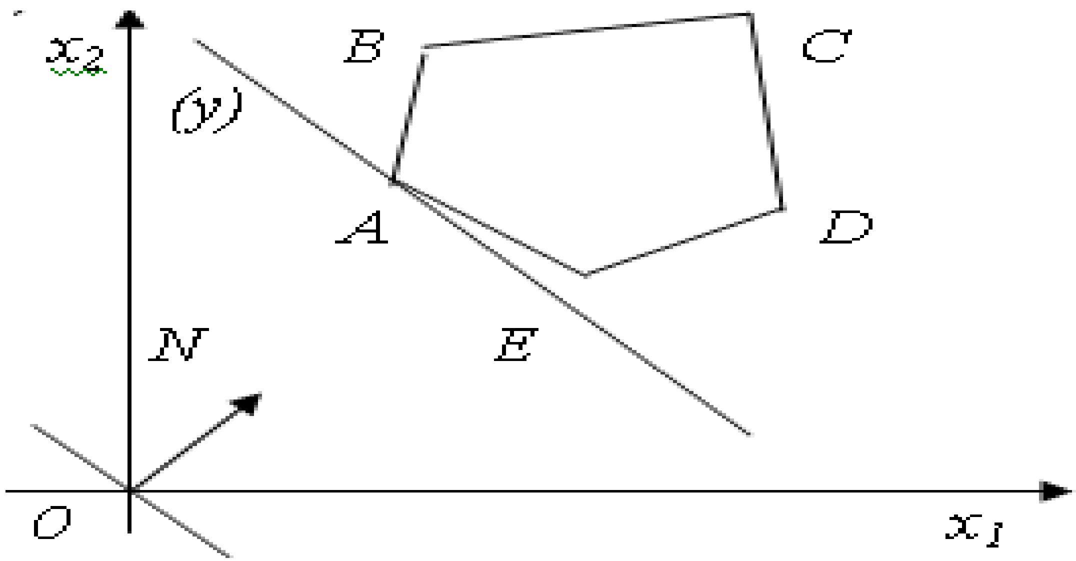
tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamidan iborat ekanligini aniqlash uchun ***O(0;0)*** koordinata boshini mo'ljal nuqta deb qarash mumkin. Agar ***x_1=0; x_2=0*** qiymatlarni (8) tengsizlikka qo'yganda

0≤b_i tengsizlik hosil bo'lsa, u holda qidirilayotgan yarim teksilik (7) to'g'ri chiziqning ostida (koordinata boshi tomonida) yotadi, aks holda u (7) to'g'ri chiziqning yuqorisida yotuvchi yarim tekislikdan iborat bo'ladi. Chiziqli funksiya (6) ham ma'lum bir o'zgarmas ***C_0=const*** qiymatda $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ har bir ***C_0*** uchun bitta to'g'ri chiziq to'g'ri keladi. Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchakni hosil qilish uchun

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$, …, $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m$, $x_1=0$, $x_2=0$

to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan ko'pburchakni yasaymiz.

Faraz qilaylik, bu ko'pburchak ***ABCDE*** beshburchakdan iborat bo'lsin:



1-shakl

Chiziqli funksiyani ixtiyoriy o'zgarmas $\boldsymbol{C_0}$ songa teng deb olamiz.

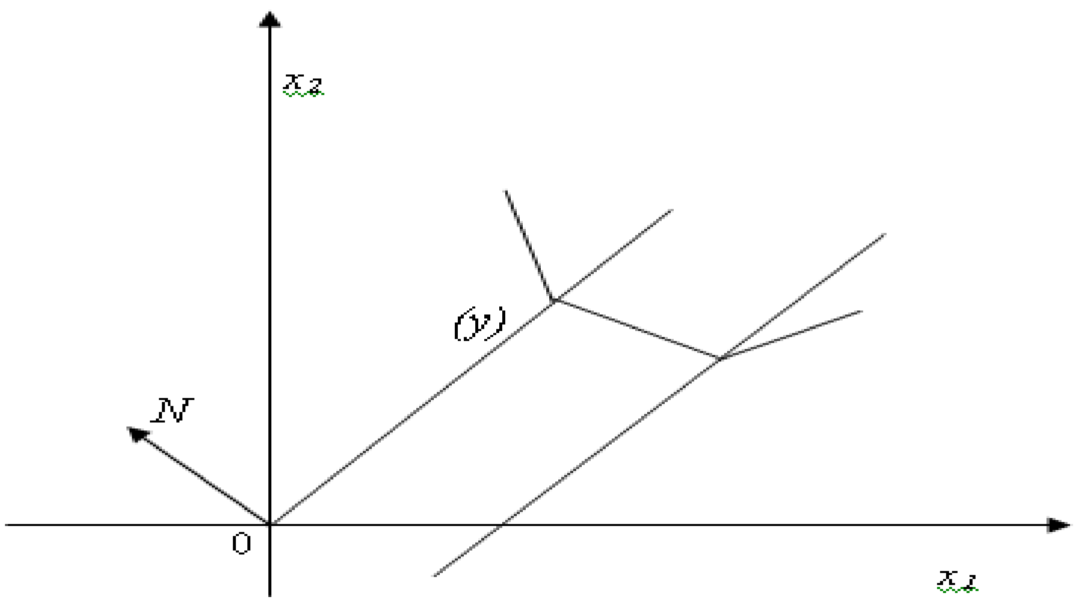
Natijada

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

to'g'ri chizig'i hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqni $\boldsymbol{N(c_1,c_2)}$ vektor yo'nalishida yoki unga teskari yo'nalishida o'ziga parallel surib borib, qavariq ko'pburchakning chiziqli funksiyaga eng katta yoki eng kichik qiymat beruvchi nuqtalarni aniqlaymiz.

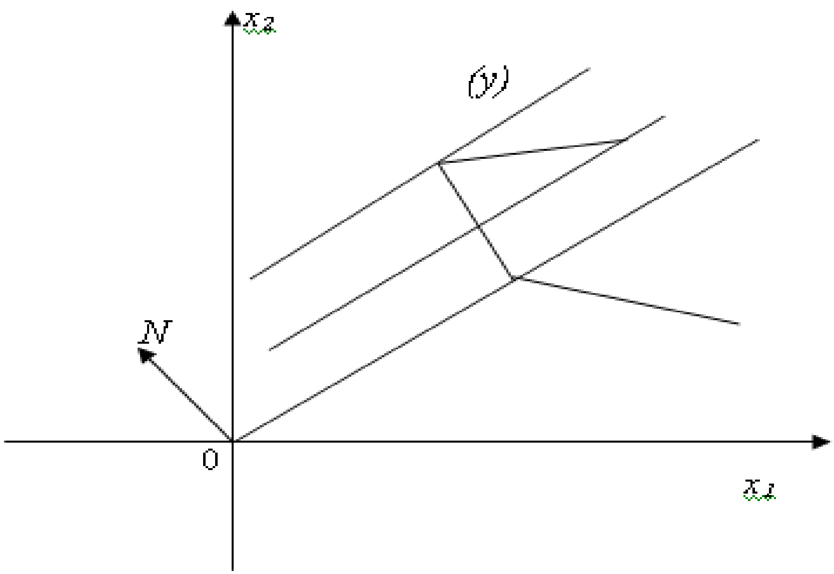
1-shakldan ko'rinib turibdiki, chiziqli funksiya o'zining minimal qiymatiga qavariq ko'pburchakning ***A*** nuqtasida erishadi. ***C*** nuqtada esa, u o'zining maksimal(eng katta) qiymatiga erishadi. Birinchi holda $\boldsymbol{A(x_1,x_2)}$ nuqtaning koordinatalari masalaning chiziqli funksiyaga minimal qiymat beruvchi optimal yechimi bo'ladi. Uning koordinatalari ***AB*** va ***AE*** to'g'ri chiziqlarni ifodalanuvchi tenglamalar orqali aniqlanadi. Agar yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak chegaralanmagan bo'lsa, ikki hol bo'lishi mumkin.

$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to'g'ri chiziq N vektor bo'yicha yoki unga qarama-qarshi yo'nalishda siljib borib, har vaqt qavariq ko'pburchakni kesib o'tadi. Ammo minimal qiymatga ham, maksimal qiymatga ham erishmaydi. Bu holda chiziqli funksiya quyidan va yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi (2-shakl).

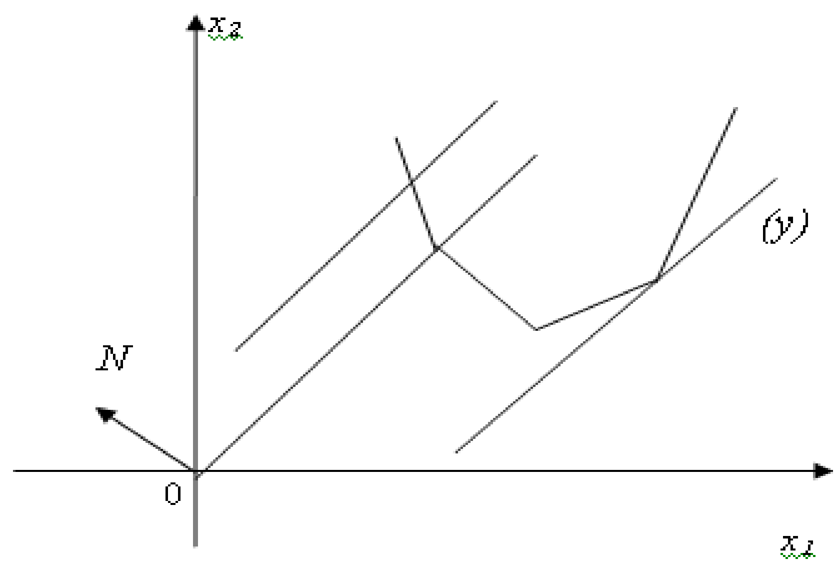


2-shakl

$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to'g'ri chiziq N vektor bo'yicha siljib borib, qavariq ko'pburchakning birorta chetki nuqtasida o'zining minimal yoki maksimum qiymatiga erishadi. Bunday holda chiziqli funksiya yuqoridan chegaralangan, quyidan esa chegaralanmagan (3-shakl) yoki quyidan chegaralangan, yuqoridan esa chegaralanmagan (4-shakl) bo'lishi mumkin.



3-shakl



4-shakl