TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: Axborot texnologiyalari va jarayonlarni matematik modellashtirish

8-mavzu

Integral va differensial modellar.

Reja:

1. Integral modellar.
2. Differensial modellar.

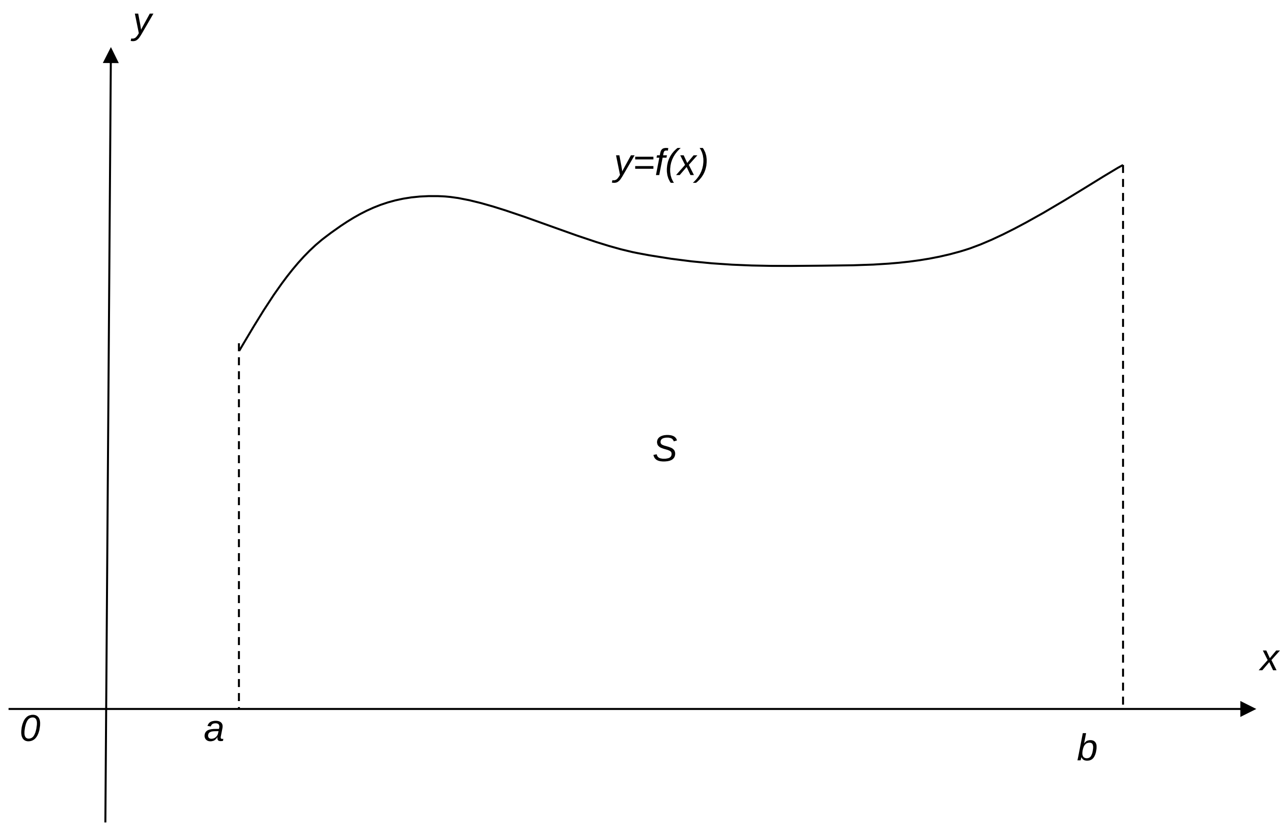
1. Integral modellar.

Ma’lumki, ba’zi bir jarayonlarni matematik modellashtirishda jism sirti va hajmini, jism og‘irlik markazi va inersiya momentini, biror kuch ta’sirida bajarilagan ish miqdorini hisoblashga to‘g‘ri keladi. Jarayonning bu kabi mexanik va geometrik xususiyatlari funksiya integrali shaklida ifodalanadi. Ba’zi hollarda bu integrallarni analitik ko‘rinishda hisoblash mumkin bo`lmasligi mumkin. Bunday hollarda integral qiymatini taqribiy hisoblashga to‘g‘ri keladi.

$[a, b]$oraliqda aniqlangan uzluksiz f(x) funksiya berilgan bo‘lib, quyidagi integralni ε aniqlikda hisoblash talab qilinsin:

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Ma’lumki, agar f(x) funksiya $[a, b]$ oraliqda berilgan bo‘lib, $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, u holda (1) aniq interal qiymati *x=a,x=b, y=f(x)* va *y=0* chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng bo‘ladi (1-rasm).

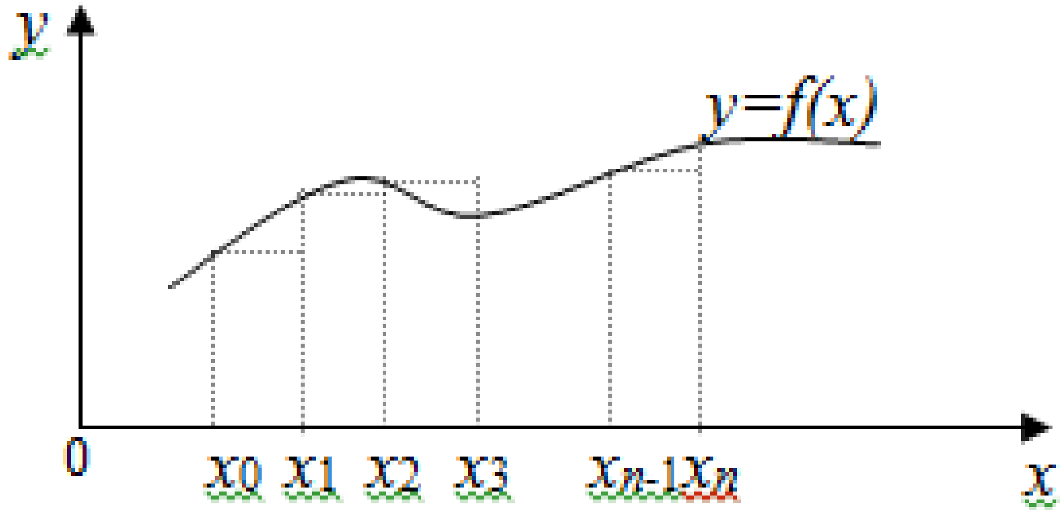


To‘g‘ri to‘rtburchak usuli

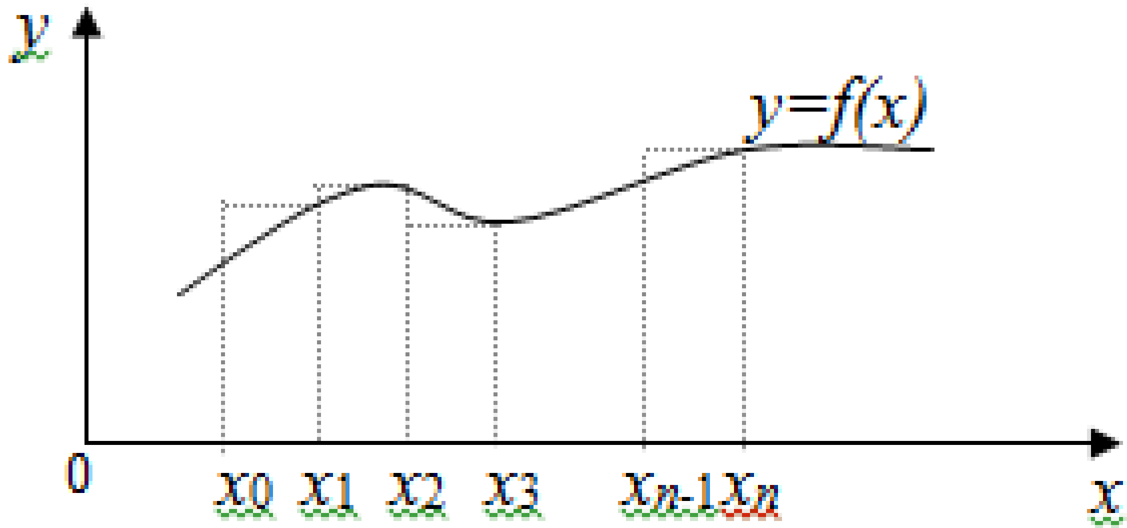
Berilgan $[a, b]$ oraliqni $h = \frac{b-a}{n}$ qadam bilan n+1 ta oraliqqa bo‘lamiz. Hosil bo‘lgan oraliqlarda joylashgan egri chiziqli trapetsiya yuzalarini to‘g‘ri to‘rtburchak yuziga almashtiramiz (2 va 3- rasmlar). Natijada (1) integral qiymatini taqribiy hisoblash uchun quyidagi formulalarga ega bo‘lamiz:

$$S = h\sum_{i=0}^{n-1} y_{i,} \quad Q = h\sum_{i=1}^{n} y_{i,}$$

Bu yerda $x_i = x_{i-1} + h,\ y_i = f(x_i), \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}, x_0 = \mathrm{a}, x_n = \mathrm{b}$, n-natual son.



2-расм



3-расм

Misol. Quyidagi integral qiymatini to‘g‘ri to‘rtburchak usuli yordamida taqribiy hisoblang va natijani integralning aniq qiymati$arctg 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$ bilan taqqoslang.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Yechish. Aniqlik uchun $n = 10, \Delta x = 0,1$ va $x_k = k \cdot 0,1$ (k=0,1,2,...,10) deb olib, integral qiymatini 0,001 aniqlikda hisoblaymiz:

$$y_0 = 1, y_1 = \frac{1}{1+0{,}1^2} \approx 0{,}99,\ y_2 = \frac{1}{1+0{,}2^2}$$
$$\approx 0{,}962, \qquad y_3 = \frac{1}{1+0{,}3^2} \approx 0{,}917$$
$$y_4 \approx 0{,}862, y_5 \approx 0{,}8, y_6 \approx 0{,}735, \qquad y_7 \approx 0{,}671,$$
$$y_8 \approx 0{,}61, \quad y_9 \approx 0{,}552, \qquad y_{10} \approx 0{,}5$$

U holda berilgan integralning taqribiy qiymati quyidagiga teng bo`ladi:

$$S \approx 0{,}1(1 + 0{,}99 + 0{,}962 + 0{,}917 + 0{,}862 + 0{,}8 + 0{,}735 + 0{,}671 + 0{,}61 + 0{,}552 = 0{,}81$$

$$Q \approx 0{,}1(0{,}99 + 0{,}962 + 0{,}917 + 0{,}862 + 0{,}8 + 0{,}735 + 0{,}671 + 0{,}61 + 0{,}552 + 0{,}5 = 0{,}755$$

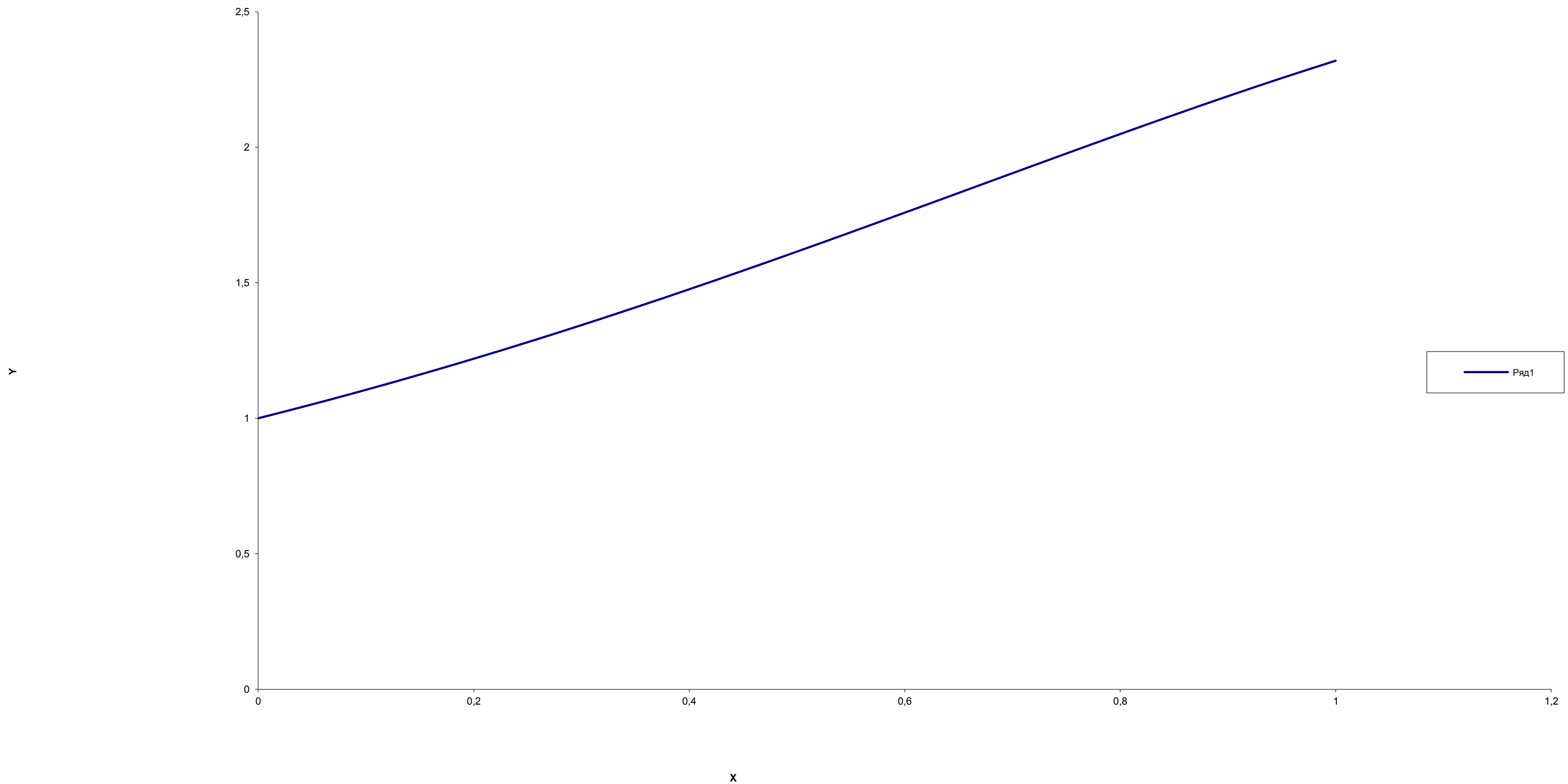
Ya’ni 0,755<0,785<0,810. Bu yerda integralni taqribiy hisoblashda yo‘l qo‘yilgan absolyut xato $|I - S| < 0{,}028$ dan oshmasligini va nisbiy xato esa $\frac{0{,}028 \cdot 100}{0{,}785} \approx 3{,}6\%$ ga tengligini ko‘rishimiz mumkinю

Misol. Quyidagi integralni taqribiy hisoblang.

$$I = \int_0^2 e^{sinx}\,dx$$

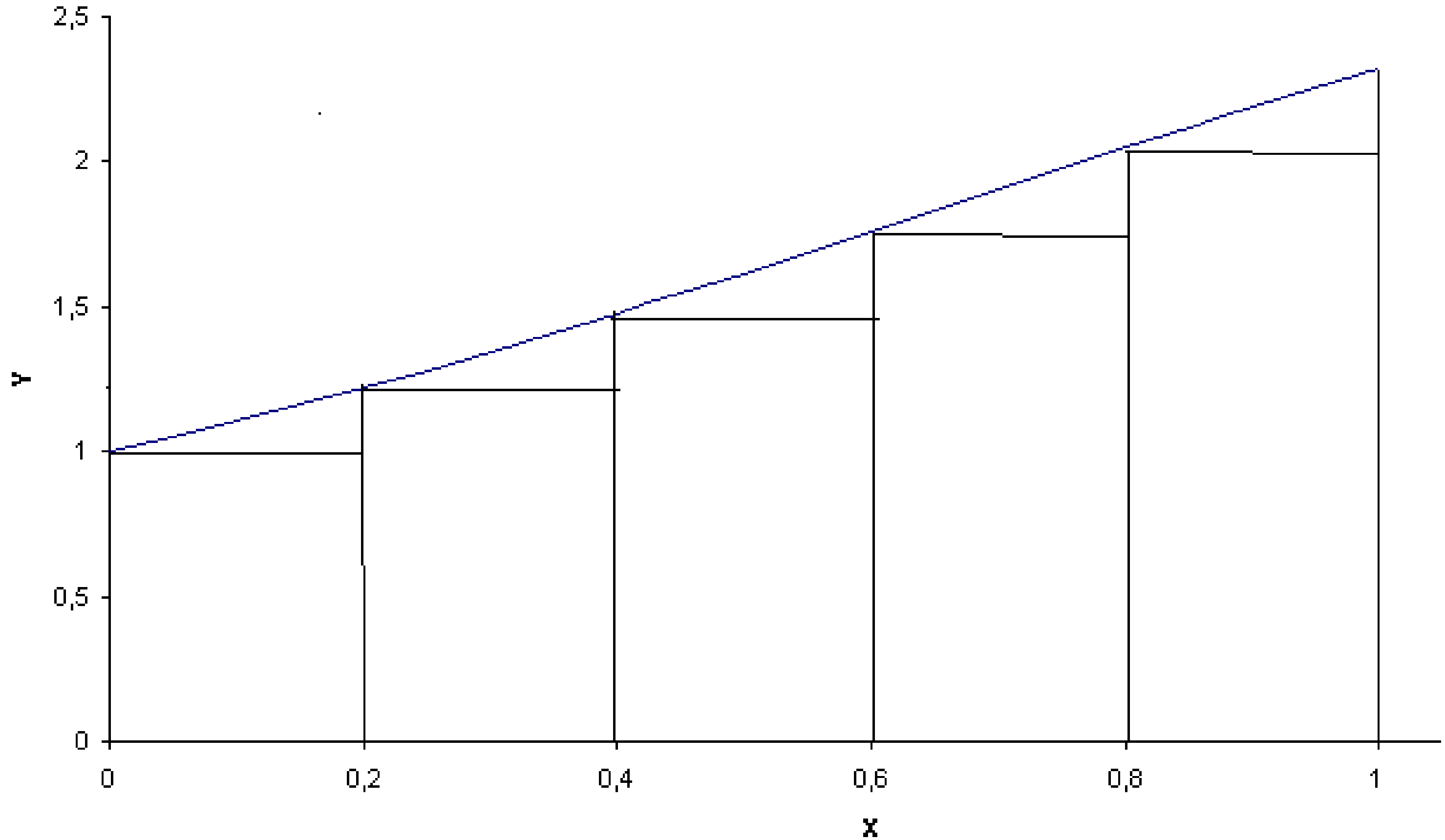
Yechish:

Berilgan funksiya grafigi quyidagicha bo`ladi:



Y
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
X
Ряд1

[0;1] kesmani uzunligi Δx=0,2 bo`lgan teng oraliqlarga bo`lib chiqamiz. Yuqoridagi kabi oraliqni x_1, x_2, x_3,… x_n nuqtalar bilan teng bo`laklarga bo`lib chiqamiz. Ushbu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlarini esa mos ravishda y_1, y_2, y_3,… y_n bilan belgilaymiz. Natijada funksiyaning yuqoridagi grafigi quyidagi ko`rinishni oladi:



Hosil bo`lgan to`g`ri to`rtburchaklar yuzlarining yig`indisi berilgan integralning taqribiy qiymatini beradi.

$\int_0^2 e^{\sin x}dx$ integralni taqribiy hisoblang.

Aniq integralni to`g`ri to`rtburchaklar usulida sonli yechish Excel dasturida quyidagicha bajariladi:

[a;b] oraliqdagi nuqtalar soni "n"ni, integrallash chegaralari "a" va "b" larni son qiymatlarini kiritib, nuqtalar orasidagi masofa h quyidagicha hisoblanadi: h=(b-a)/n.

x_1, x_2, …x_n larni hisoblanadi: $x_i = x_{i+1}+h$.

Integral ostidagi funksiyani har bir x_i ga mos qiymatini hisoblanadi.

Funksiya qiymatlari yig`indisini hisoblanadi.

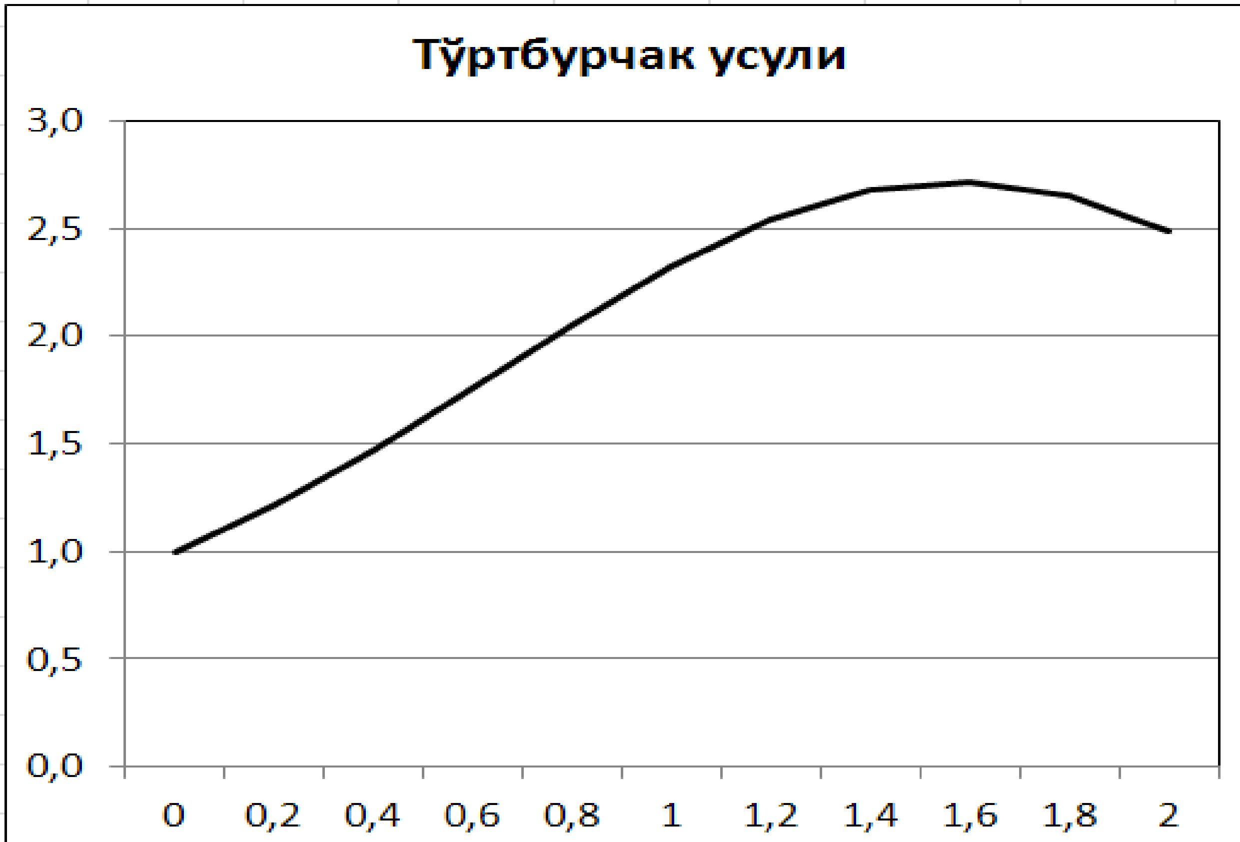
Yig`indini h qadamga ko`paytirib, integral qiymati – natijaga ega bo`lamiz. Quyida Excel oynasini tasviri ko`rsatilgan.

Microsoft Excel

B6 f_x =EXP(SIN(A6))

IT1

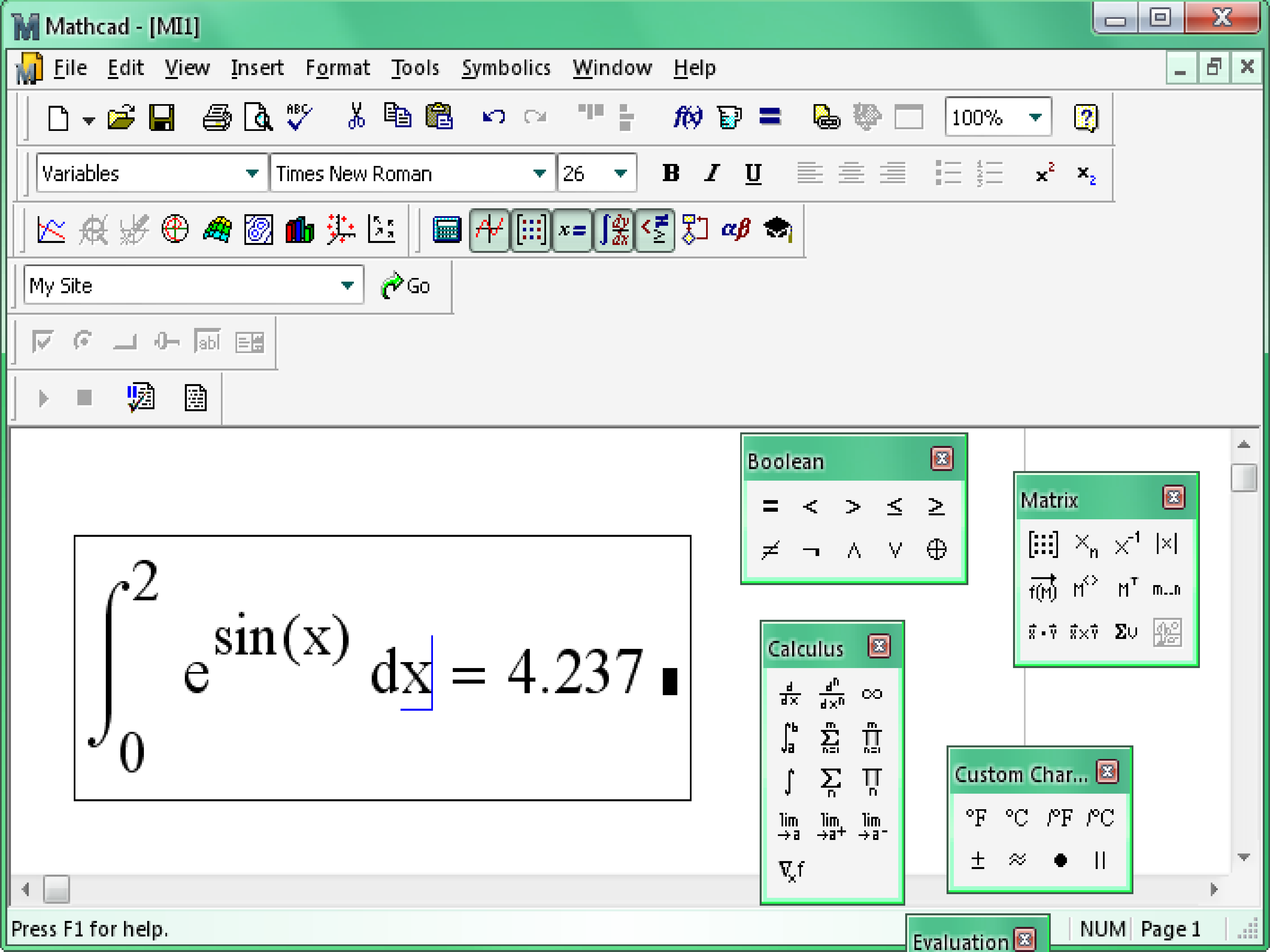
	A	B
1	n=	10
2	a=	0
3	b=	2
4	h=	0,2
5	x	y
6	0	1,000
7	0,2	1,220
8	0,4	1,476
9	0,6	1,759
10	0,8	2,049
11	1	2,320
12	1,2	2,540
13	1,4	2,679
14	1,6	2,717
15	1,8	2,648
16	2	2,483
17		21,890
18	S=	4,378



Лист1 Лист2 Лист3

Готово 100%

Aniq integralni hisoblash Mathcad dasturida quyidagicha bajariladi:
Mathcad dasturi yuklab, “Calculus” vositalar panelidan aniq integral belgisini tanlaymiz.
Ishchi oynada aniq integral belgisi hosil bo`lib, uning chegaralarini belgilab integral osti funksiyasini yozamizva oddiy “=” belgisini yozib natijaga ega bo`lamiz. Quyida Mathcad dasturida aniq integral hisoblanishi keltirilgan.


Mathcad - [MI1]
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help
100%
Variables
Times New Roman
26
My Site
Go
$\int_0^2 e^{\sin(x)}\,dx = 4.237$
Boolean
Matrix
Calculus
Custom Char...
°F °C
Press F1 for help.
Evaluation
NUM
Page 1

Masalaning C++ tilidagi dasturi quyidagi ko`rinishda bo`ladi:

```
# include <iostream>
# include <math.h>
using namespace std;
int main()
{
float  s,a,b,x,dx;
int i,n;
cout<<”n ni kiriting”<<endl;
cin>>n;
dx=(b-a)/n;
 x=0;
s= exp(sin(x));
for( i=1; i< n;i++)
{
x=x+dx;
s=s+ exp(sin(x));
}
s=s*dx;
cout<<”Integralning taqribiy qiymati=”<< s<endl;
return 0;
}
```

2. Differensial modellar

Ayrim amaliy masalalarni matematik modellashtrish differensial tenglama uchun Koshi, chegaraviy yoki aralash masalalarni yechishga keltiriladi. Ammo bu masalalar yechimlarini aniq ko‘rinishda har doim ham yozish imkoni bo‘lavermaydi. Bu holda berilgan masalani yechish uchun taqribiy yechish usullardan foydalaniladi. Quyida shu usullarning ayrimlari bilan tanishib chiqamiz.

Eyler usuli. $[a, b]$ kesmada $y'(x) = f(x, y)$ differensial tenglamaning $y(a) = x_0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi (Koshi masalasi) yechimini topish talab etilsin.

Eyler usuliga asosan $[a, b]$ kesmani n ta oraliqlarga ajratib, $x_i = a + ih = x_{i-1} + h, (x_0 = a)$ nuqtalarni hosil qilamiz, bu erda $h = (b - a)/n$. Hosil bo‘lgan har bir oraliqda y' hosilani taqribiy ravishda $\frac{y_i - y_{i\_1}}{h}$ chekli ayirmaga almashtiramiz. Natijada noma’lum y(x) funksiyaning x_i nuqtalardagi qiymatlari $y_i = y(x_i)$ ni hisoblash uchun ushbu taqribiy $y_i \approx y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$ formulani hosil qilamiz. Bu formula Eyler formulasi deb ataladi va berilgan boshlang‘ich shart yordamida noma’lum funksiyaning $x = x_i$ nuqtalardagi qiymatlarini ketma-ket topish mumkin bo‘ladi.

Misol. $y'(x)=\frac{1}{2}xy$ tenglamaning [0,1] kesmada $y(0)=1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi echimining taqribiy qiymatlar jadvalini tuzing.

Echish. Aniqlik uchun n=10, h=0,1 bo‘lsin. Ushbu

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}hx_{i-1}y_{i-1}$$

formuladan $y_i, i = 1,2,..10$ ning qiymatlari topiladi.

Tekshirib ko‘rish mumkinki, berilgan masala $y = e^{\frac{x^2}{4}}$ aniq yechimga ega. Agar x=1 nuqtada aniq $y(1) = e^{\frac{1}{4}} = 1,284$ va taqribiy $y(1) \approx 1,2479$ yechimlarni solishtirsak, absolyut xato 0,0361 ga, nisbiy xato esa $\frac{0,0361\cdot 100}{1,284} \approx 2,8\%$ ga teng bo‘ladi.

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$hf(x_i, y_i)$
0	0	1	0	0
1	0,1	1	0,05	0,005
2	0,2	1,005	0,1005	0,0100
3	0,3	1,0150	0,1522	0,0152
4	0,4	1,0303	0,2061	0,0206
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537

Yuqoridagi $y'=xy/2$ differensial tenglamani yechishni Excel dasturida tekshirib chiqamiz. Bu ishni quyidagi tartibda bajaramiz:

B2 katagiga hisoblash qadami h ning son qiymatini yozamiz.

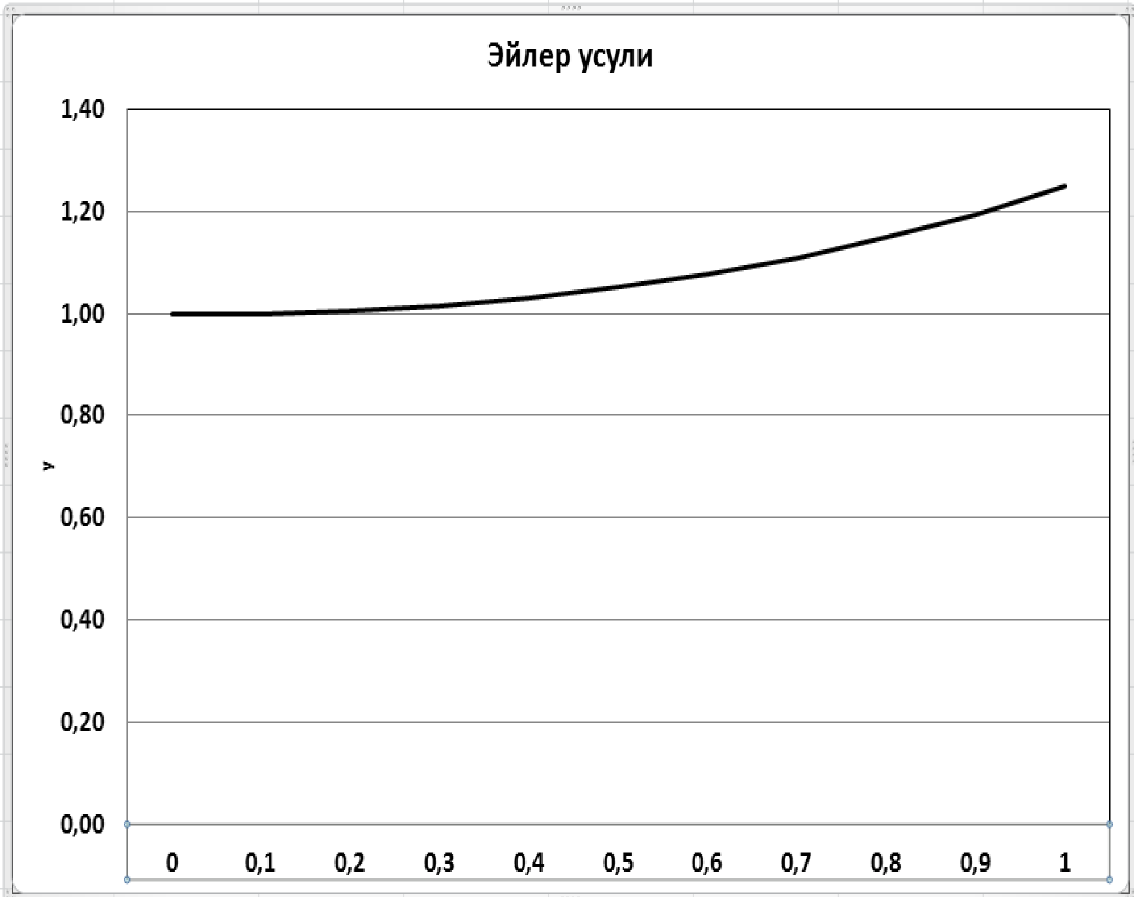
A4 katagiga argumentning boshlang`ich qiymati $x_0$ ni va B4 katagiga boshlang`ich shart y_0 ning son qiymatlarini yozamiz.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ni hisoblash uchun A5 katagiga “=A4+$B$2” formula yozib, uni A6:A14 kataklariga nusxa qilamiz.

B5 katagiga Eyler formulasini “=B4+$B$2*A4*B4/2” ko`rinishda yozamiz va formulani B14 katagigacha nucxa qilamiz.

Quyida masalaning Excel dasturidagi yechimi keltirilgan.

Эйлер усули	
h	0,1
x	y
0	1,000
0,1	1,000
0,2	1,005
0,3	1,015
0,4	1,030
0,5	1,051
0,6	1,077
0,7	1,109
0,8	1,148
0,9	1,194
1	1,248



Yuqoridagi differensial tenglamani yechishni Mathcad dasturida qaraymiz.

Berilgan differensial tenglamani yozishda differensiallash operatordan yoki hosila belgisidan foydalanish mumkin. Boshlang`ich shartni yozishda esa faqat hosila belgisidan foydalanish kerak va uni kiritish uchun CTRL+F7 tugmalarini birgalikda bosish kerak.

Mathcad dasturini yuklab, quyidagilarni yozamiz: Given

Differensial tenglama, boshlang`ich shart, argument o`zgaradigan oraliq va hisoblash qadami teriladi.

y'(x) = x*y(x)/2 y(0) = 1 z:=0,0,1...1

So`ngra quyidagi operator yoziladi:

Y:=Odesolve(x,1)

Natijani ko`rsatish uchun "y(z)=" ni terib, tugmasi bosiladi. Grafigini chizish uchun grafik vositalar paneli tanlanib, uning parametrlari yoziladi. Quyida Mathcad dasturida differensial tenglamani Eyler usulida yechis dasturi keltirilgan:

Mathcad - [DM1]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

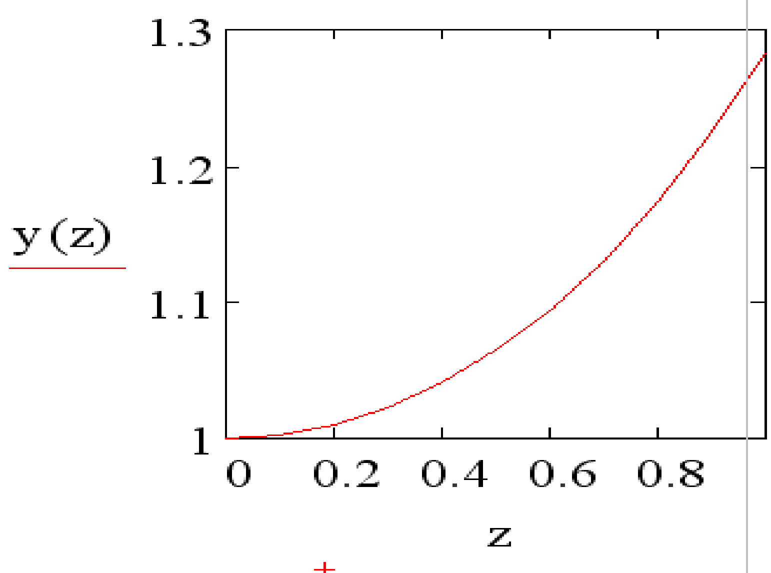
Given

$$y'(x) = x\cdot\frac{y(x)}{2} \qquad y(0) = 1 \qquad z := 0, 0.1 .. 1$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(x, 1)$$

$y(z) =$

1
1.003
1.01
1.023
1.041
1.065
1.094
1.13
1.174
1.225
1.284



Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

```
using namespace std;
int main()
{
float  a,b,x,y,h,y0;
int  i,nt;
cout<<“Oraliq boshini kiriting a=”<<endl;
cin>>a;
cout<<“Oraliq oxirini kiriting b=”<<endl;
cin>>b;
cout<<“Oraliqninb bo`linishlar sonini kiriting n=”<<endl;
cin>>n;
cout<<“Funktsiyaning boshlang`ich nuqtadagi qiymatini kiriting y0=”<<endl;
cin>>y0;
h=(b-a)/n;
x=a;
cout<<”x=”<<x<<”\t y=”<<y<<endl;
   for(i=1;i<=n; i++)
{
x:=x+h;
y=y+h/2*x*y;

cout<<”x=”<<x<<”\t y=”<<y<<endl;
}
return 0;
}
```