Двойственная задача линейного программирования

План:

1. Понятие двойственности
2. Постановка двойственной задачи
3. Теорема двойственности
4. Примеры

1. Понятие двойственности

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной* (ДЗ). Первоначальная задача называется *исходной (ИЗ)*

Понятие двойственности

Связь исходной и двойственной задач состоит в том, что коэффициенты целевой функции ИЗ являются свободными членами системы ограничений ДЗ, свободные члены системы ограничений ИЗ служат коэффициентами целевой функции ДЗ, а матрица коэффициентов системы ограничений ДЗ является транспонированной матрицей коэффициентов системы ограничений ИЗ. Решение ДЗ может быть получено из решения ИЗ и наоборот

Постановка исходной задачи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, \ \overline{j = 1, n} \qquad (2)$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \qquad (3)$$

2. Постановка двойственной задачи

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases} \qquad (1)$$

$$y_i \geq 0, \overline{i = 1, m} \qquad (2)$$

$$f = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \to \min \qquad (3)$$

Экономическая интерпретация ИЗ

Сколько и какой продукции необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции и размерах имеющихся ресурсов максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?

Экономическая интерпретация ДЗ

Какова должна быть цена единицы каждого из ресурсов, чтобы при заданных количествах ресурсов и величинах стоимости единицы продукции минимизировать общую стоимость затрат?

Несимметричные ДЗ

В несимметричных ДЗ система ограничений ИЗ задается в виде равенств, а ДЗ – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными

Теорема двойственности

Если из пары ДЗ одна обладает оптимальным планом, то и другая имеет решение, причем для экстремальных значений линейных функций выполняется отношение

$$Z_{min} = f_{max}$$

Если линейная функция одной из задач не ограничена, то и другая не имеет решения