TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

Fan: Axborot texnologiyalari va jarayonlarni matematik modellashtirish

5-mavzu

Chiziqsiz modellar va ularni yechish.

Reja:

1. Chiziqsiz modellar. Algebraik va transsendent tenlamalar.
2. Tenglama ildizlarini ajratish usullari.
3. Tenglama ildizini aniqlashnning oddiy iteratsiya usuli.

1. Chiziqsiz modellar. Algebraik va transsendent tenlamalar.

Algebraik tenglama - $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ ko`rinishida yoziladi. Bu erda P - $x_1,x_2,\ldots,x_n$ noma'lum o'zgaruvchilardan iborat ko`phad. Algebraik tenglamaning darajasi P ko`phadning darajasiga teng bo`ladi. $x_1,x_2,\ldots,x_n$ o'zgaruvchilarning algebraik tenglamaga nol qiymat beruvchi qiymatlari ushbu algebraik tenglamaning ildizlari deb ataladi.

Transendent tenglama- transendent funktsiyalarni (eksponental, logarifmik, trigonometrik va teskari trigonometrik funktsiyalar) o'z ichiga olgan tenglama. Masalan, $\sin x + \lg x = x$, $2x - \lg x = \arccos x$.

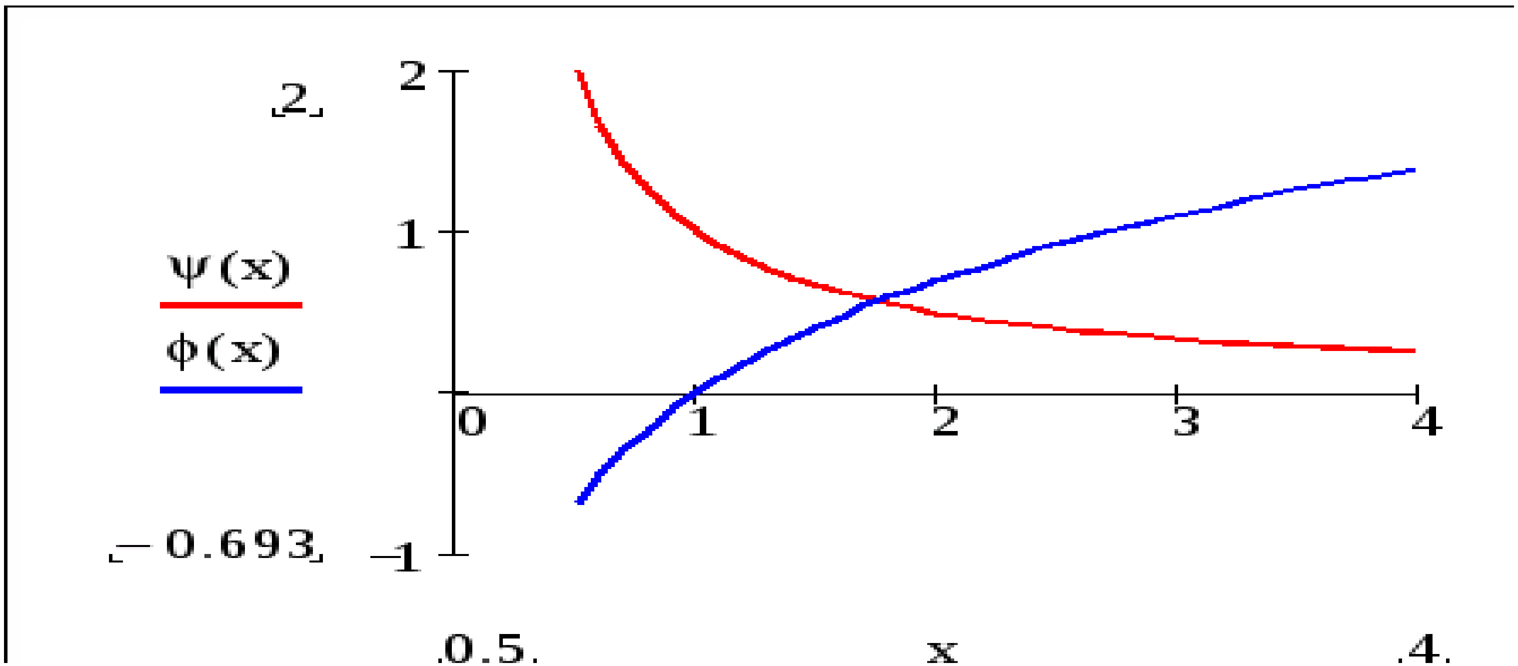
2. Tenglama ildizlarini ajratish

$f(x)=0$ (1) tenglamada $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqning uchlarida har xil ishoralarga ega bo`lsa, ya'ni $f(a)\times f(b)<0$ bo`lsa, ushbu oraliqda kamida bitta ildiz mavjud bo`ladi. Masalan, $x^3-6x+2=0$ tenglama uchun $a=-3$ $f(a)=-7<0$, $a=-2$ $f(a)=6>0$ bo`lib, $[a,b]$ oraliqda kamida bitta ildiz borligini ko'rsatadi.

Grafik usul

Ushbu usul $y=f(x)$ funktsiya grafigini chizishga asoslangan. (1) tenglamaning ildizini o'z ichiga olgan $[a,b]$ oraliq funktsiya grafigining OX o'q bilan kesishish nuqtasini o'z ichiga olgan absissa o'qining bo'lagi bo'ladi. Ba'zan f (x) funktsiyani ikkita sodda funktsiyalarning ayirmasi sifatida ifodalash qulay bo`ladi, ya'ni $f(x)=\varphi(x)-\omega(x)$ . $\varphi(x)$ va $\omega(x)$ funktsiyalarning grafikalari chiziladi. Ushbu grafiklarning kesishish nuqtasining abstsissasi (1) tenglamaning ildizi bo'ladi va shu ildizni o`z ichiga oluvchi absissa o`qidagi kesma izolyatsiya oralig'i bo'ladi.

Misol. $x ln(x)$=1 tenglamani grafik usulda yechishni qaraymiz.
Yechish. Berilgan tenglamani quyidagi ko`rinishda yozamiz: ln (x)=1/x. U holda berilgan tenglamaning ildizlarini φ(x)=ln(x) va ψ(x)=1/x egri chiziqlarning kesishish nuqtalarining abstsissalari sifatida topish mumkin. Funktsiyalar grafikalarini tuzamiz va ildizni ajratish oralig'ini aniqlaymiz.



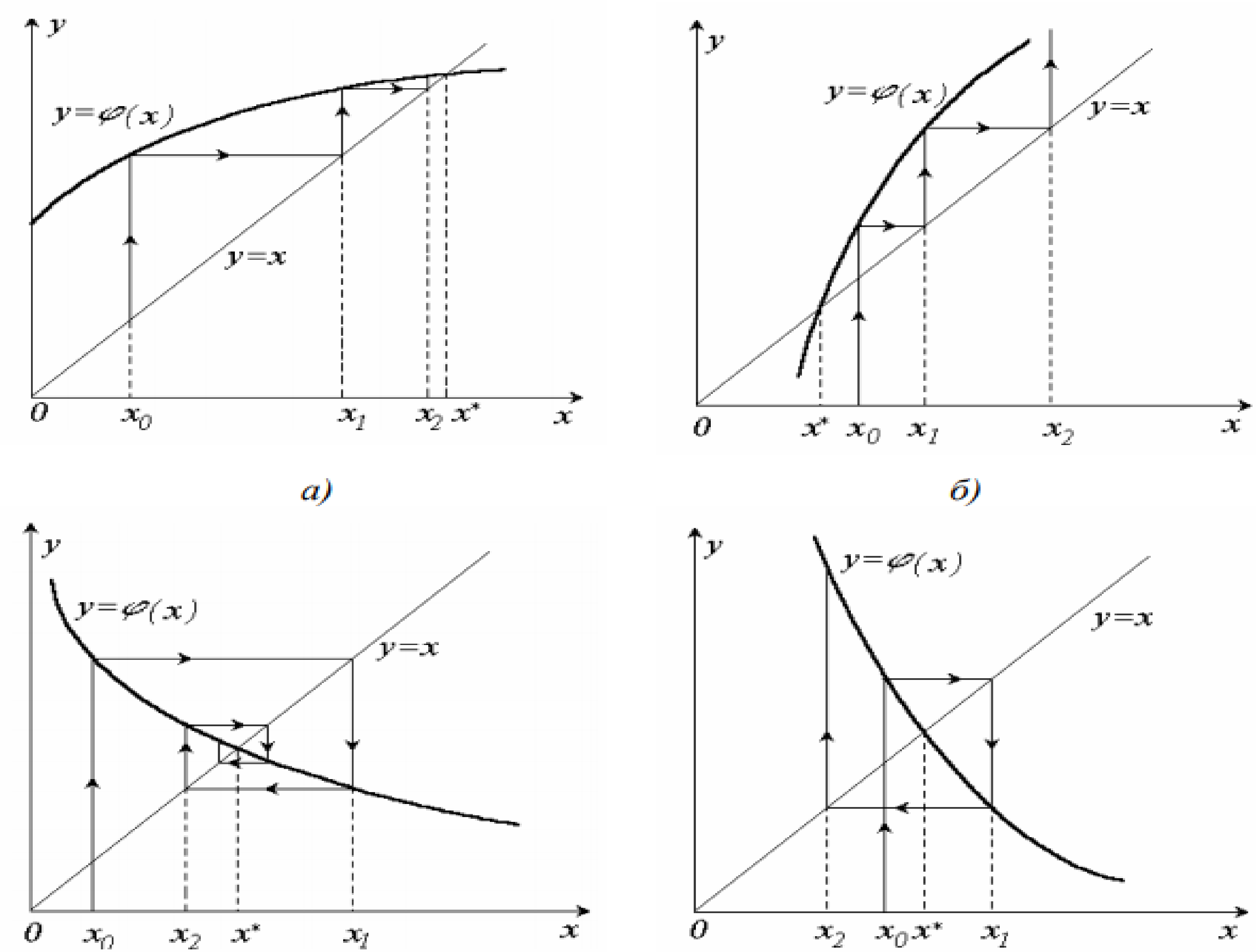
Chizmadan ko`rinadiki, tenglama ildizi [1,2] kesmada joylashgan bo`ladi. Ushbu ildizning boshlang`ich qiymati sifatida x = 1,5 sonni olish mumkin.

Analitik usul.

Agar uzluksiz f (x) funktsiya [a, b] kesma uchlarida qarama-qarshi ishorali qiymatlar qabul qilsa, ya'ni f(a)f (b)<0 bo`lsa, u holda bu kesmada f (x)=0 (1) tenglamaning kamida bitta ildizi mavjud;

Agar [a,b] kesmada uzluksiz va monotonli f(x) funktsiya kesmaning uchlarida har xil ishorali qiymatlar qabul qilsa, u holda bu kesmada faqat bitta ildiz mavjud;

Agar f(x) funktsiya [a,b] kesmada uzluksiz bo'lsa va kesmaning uchlarida har xil ishorali qiymatlar qabul qilsa va uning hosilasi kesmada ishorasini o`zgartirmasa, u holda kesma ichida (1) tenglamaning ildizi mavjud va yagona bo`ladi.



5-rasm - Oddiy iteratsiya usuli: a - bir tomonlama yaqinlashish jarayoni; b - bir tomonlama uzoqlashish jarayoni; c - ikki tomonlama yaqinlashish jarayoni; g - ikki tomonlama uzoqlashish jarayoni. Eng yuqori yaqinlashish tezligi $\phi'(x) = 0$ bo`lganda ro`y beradi.

Agar berilgan tenglama ildizlari bir-biriga yaqin joylashgan bo`lsa, yoki funktsiya murakkab tuzilishga ega bo'lsa, u holda izolyatsiya oraliqlarini aniqlash uchun berilgan oraliqni mayda qismlarga bo'lish usulidan foydalaniladi.

Dastlab, funktsiyaning chegaraviy nuqtalardagi ishoralari aniqlanadi. Keyin oraliq $x = x_1, x_2,\ldots x_n$ oraliq nuqtalari yordamida bo'laklarga ajratiladi. Agar ikkita qo'shni x_k va x_{k+1} nuqtalarda f(x) funktsiya har xil ishoralarga ega ekanligi aniqlansa, ushbu oraliqda kamida bitta ildiz mavjud bo`ladi.

Tanlangan oraliqda bitta ildiz borligiga ishonch hosil qilish uchun f(x) funktsiyasining hosilasi ushbu oraliqda ishorasini o'zgartirishi yoki o`zgartirmasligini tekshirish kerak.

Misol. [0,4] kesmada x^2-2=0 tenglamaning ildizlarini ajratish oraliqlarini toping.

Yechish. y =x^2-2 funktsiyasining qiymatlar jadvalini tuzamiz.

x	y
0	-2
1	-1
2	2
3	7
4	14

Jadvaldan y(x) funktsiyaning ishorasi [1,2] kesmada o'zgaradi. Shuning uchun ildiz shu kesmada joylashgan bo`ladi.

Oddiy iteratsiya usuli (ketma-ket yaqinlashish usuli).

$f(x)=0$ tenglamadan matematik almashtirishlar yordamida $x=\phi(x)$ (5) shaklidagi ekvivalent tenglamani hosil qilamiz. Tenglamaning x^* ildiziga x_0 boshlang'ich qiymat beramiz. Uni (5) tenglamaning o'ng tomoniga qo'yib, birinchi yaqinlashuvni olamiz $x_1 = \phi(x_0)$, shu usul bilan navbatdagi yaqinlashishlarga o`tamiz $x_2=\phi(x_1)$ va hokazo: $x_k=\phi(x_{k-1})$ (6). Ushbu iteratsiya jarayon qanday sharoitlarda transsendent tenglamaning x^* ildiziga yaqinlashadi degan savol tug'iladi. Batafsil matematik tahlil shuni ko'rsatadiki, oddiy iteratsiya usulining yaqinlashishi uchun zarur bo'lgan shart quyidagicha yoziladi: $\phi'(x) <1$. (7)

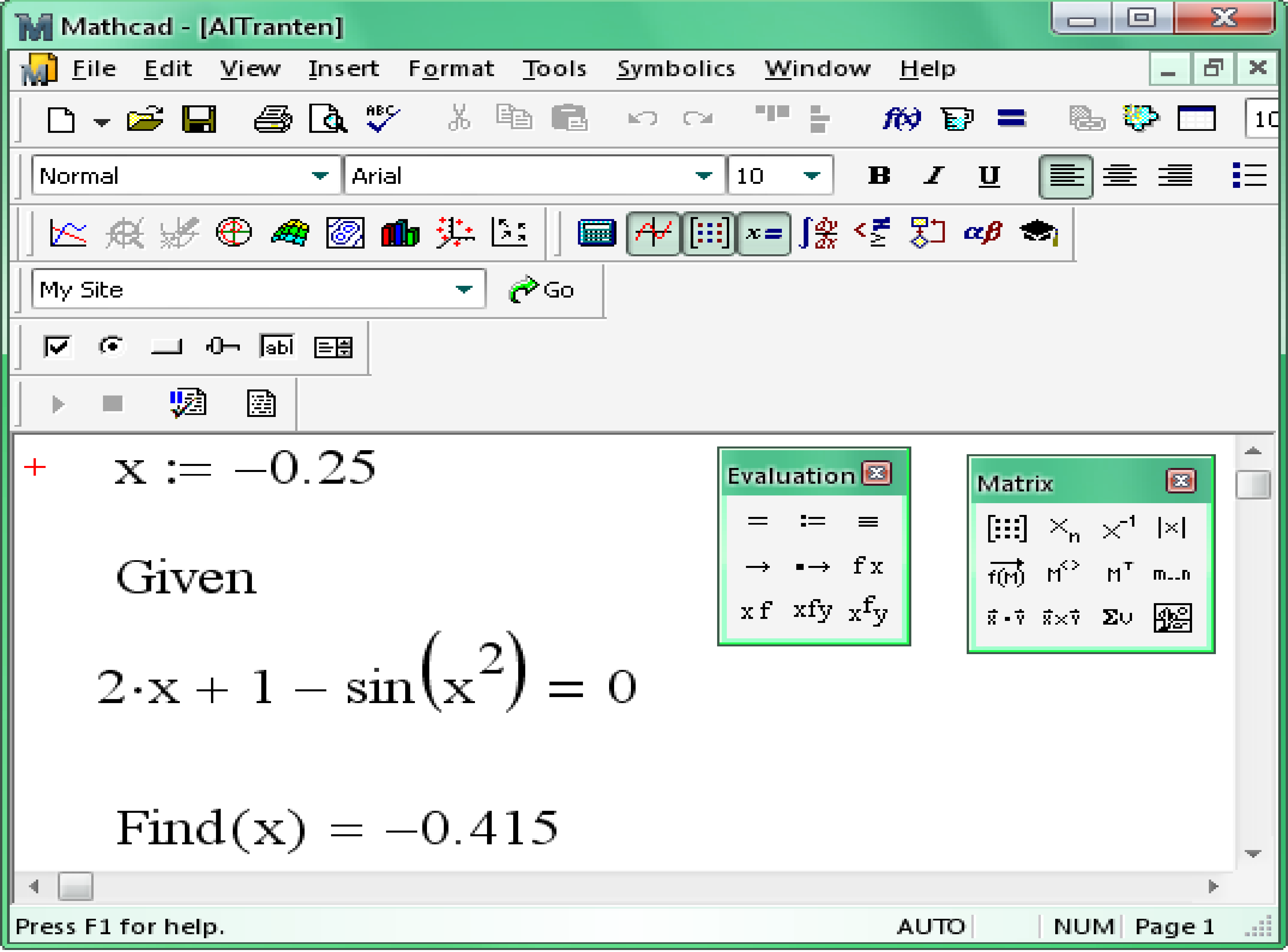
$f(x)=0$ tenglamaning chap va o'ng tomonlarini ixtiyoriy b songa ko'paytiramiz va noma'lum x ni ikkala tomonga qo'shamiz. Natihada berilgan tenglama quyidagi ko`rinishni oladi: $x+b\cdot f(x)=x+0\cdot b$. $D(x)=x+b\cdot f(x)$ belgilashni kiritamiz. b sonni tanlash orqali yaqinlashishish shartini bajarish mumkin. $-1<\phi'(x)<0$ shart bajarilsa, takrorlash jarayonining yaqinlashuvi ikki tomonlama bo'ladi.

Yuqorida berilgan tenglamani Excel dasturi yordamida yechamiz. Buning uchun A2 katakka x argumentning boshlahg'ich qiymatini $x_0 = (-0{,}5 + 0)/2$ deb olamiz. A3 katakka x argumentning x_1 qiymatini $= (\sin(F2)^2 - 1)/2$ ko`rinishda kiritamiz va A ustunning qolgan kataklariga ushbu formulani nusxa qilamiz. B3 katakka =abs(B3-B3) formulani kiritamiz va B ustunning qolgan kataklariga ushbu formulani nusxa qilamiz. C3 katakka =ЕСЛИ(RC[-1]<0,001;"masala 0,001 aniqlikda yechildi";" ") formulani kiritamiz va ustunning qolgan kataklariga ushbu formulani nusxa qilamiz. Natijada Excel dastur oynasi quyidagi ko'rinishga keladi:

	A	B	C	D
1	x	|x1-x0|		
2	-0,25			
3	-0,46939564	0,21939564		
4	-0,397690926	0,071704714		
5	-0,425003031	0,027312105		
6	-0,414994648	0,010008383		
7	-0,418720915	0,003726267		
8	-0,417341391	0,001379524		
9	-0,4178532	0,000511809	masala 0,001 aniqlikda yechildi	
10				
11				

Jadvaldan ko’rinadiki, 7- qadamdan keyin berilgan tenglamaning yechimi 0,001 aniqlikda topiladi va uning qiymati A9 katakda -0,4178532 ga teng bo`ladi.

Yuqoridagi tenglamani yechishni Mathcad dasturida qaraymiz.
Buning uchun Mathcad dasturini yuklab, boshlang’ich qiymatni kiritamiz:
x:=-0.25
Ikkinchi qatorga Given kalit so’zi yozilib, uchinchi qatorga quyidagi mantiqiy ifoda yoziladi: 2*x+1-sin(x^2)**=**0
Bunda “**=**” belgisi qalin shriftda yozilib, mantiqiy ifodani bildiradi va chap tomondagi ifodaning 0 ga tengligini tekshiradi. Bu belgini kiritish “Boolean” vositalar paneli yordamida yoki “ctrl+=” tugmalar majmui orqali bajariladi. Navbatdagi qatorga Find(x)= ifodasi yoziladi. Bunda “=” belgisi oddiy shriftda yoziladi va bu belgidan keyin natija xosil bo’ladi. Quyida Mathcad dasturida masalaning yechilishi berilgan:



Mathcad - [AlTranten]
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help
Normal
Arial
10
My Site
Go
x := −0.25
Given
2·x + 1 − sin(x^2) = 0
Find(x) = −0.415
Evaluation
Matrix
Press F1 for help.
AUTO
NUM
Page 1

Berilgan masalani yechishning C++tilidagi dasturi quyidagi ko’rinishga ega:

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
int main()
{
float a,b,x1,x0,delta,eps;
int n;
cout<<“Oraliq boshi a ni kiriting”<<endl;
cin>>a;
cout<<“Oraliq oxiri b ni kiriting””<<endl;
cin>>b
cout<<“Tenglama ildizini aniqlash aniqligi eps ni kiriting”<<endl;
cin>>eps
x0=(a+b)/2; n=0;
do
{
x1=0.5*(sin(x0*x0)-1);
n=n+1;
delta=fabs(x1-x0);
x0=x1;
}
while( delta<eps);
cout<<“Tenglama ildizi=’<< x1<<endl;
cout<<“Takrorlanishlar soni =’<< n<<endl;
}
```