



TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ  
XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH  
MUHANDISLARI INSTITUTI



**Fan:**

Axborot texnologiyalari va  
jarayonlarni matematik  
modellashtirish

4-

mavzu

**Chiziqli modellar va  
ularni yechish.**



# Reja:

1. Ciziqli algebraik tenglamala tizimi (CHATS) yechishning Jordan usuli.
2. CHATSni yechishning iteratsiya usuli.

# 1. Ciziqli algebraik tenglamala tizimi (CHATS) yechishning Jordan usuli.

Quyidagi CHATS ni qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots + a_{mn}x_n = a_m \end{cases}$$

Bu yerda  $a_{ij}$ ,  $i=1..m$ ,  $j=1..n$ ,  $a_i$ ,  $i=1..m$  -berilgan sonlar,  $x_j$ ,  $i=1..m$ -noma'lumlar.

Ciziqli algebraik tenglamala tizimi (CHATS) yechishning Jordan usulini qaraymiz.

Yuqoridagi CHATS uchun quyidagi Jordan jadvalini tuzamiz:

	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$a_1 =$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
$a_2 =$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
...	...	...	...	...
$a_m =$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$

Ushbu jadvalda Jordan almashtirishlari bajarilib navbatdagi jadval to'ldiriladi:

1. Bosh element sifatida yuqori chap katakchada joylashgan element tanlanadi. Bosh elementni o'z ichiga olgan satr va ustun mos ravishda hal quluvchi satr va ustun deb nomlanadi.
2. Hal quluvchi satrda joylashgan ozod son va hal quluvchi ustunidagi o'zgaruvchi o`rinlari almashtiriladi;
3. Bosh element o'rniga teskari son yoziladi;
4. Hal quluvchi ustun elementlari bosh elementga bo`linadi va natija mos kataklarga yoziladi;
5. Hal quluvchi satr elementlari bosh elementga bo`linadi, ishorasi o'zgartirilib mos kataklarga yoziladi;

6. Qolgan kataklar to'rtburchak usuli bilan to'ldiriladi: CHATS koeffitsiyentlarini o'z ichiga olgan kataklardan to'rtburchak tuziladi. To'rtburchakdagi bosh element diagonal bo'icha joylashgan elementga ko'paytiriladi; ikkinchi diagonal elementlari ko'paytiriladi; ikkinchi ko'paytma birinchi ko'paytmadan ayiriladi; natija hal qiluvchi elementga bo'linadi va mos katakka yoziladi. Masalan, (2,2) katak quyidagi formula bilan to'ldiriladi:

$$a_{22}^1 = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}}$$

7. Bosh element ushbu jadvalning diagonali bo'yicha jadval oxirigacha yoki pastki o'ng tomondagi barcha elementlar nolga aylanguncha tanlanadi.

Natijada jadval quyidagi ko`rinishga keladi:

	$a_1$	$a_2$	...	$a_k$	$x_{k+1}$	...	$x_n$
$x_1 =$	$a'_{11}$	$a'_{12}$	...	$a'_{1k}$	$a'_{1,k+1}$	...	$a'_{1n}$
$x_2 =$	$a'_{21}$	$a'_{22}$	...	$a'_{2k}$	$a'_{2,k+1}$	...	$a'_{2n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$x_k =$	$a'_{k1}$	$a'_{k2}$	...	$a'_{kk}$	$a'_{k,k+1}$	...	$a'_{kn}$
$a_{k+1} =$	$a'_{k+1,1}$	$a'_{k+1,2}$	...	$a'_{k+1,k}$	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...
$a_m =$	$a'_{m1}$	$a'_{m2}$	...	$a'_{mk}$	0	...	0

Ushbu holda  $\kappa+1, \kappa+2,.. m$  satrlar uchun quyidagi munosabatlarni qaraymiz

$$\begin{cases} a_{\kappa+1} = b_{\kappa+1,1}a_1 + b_{\kappa+1,2}a_2 + \cdots + b_{\kappa+1,n}a_n \\ a_{\kappa+2} = b_{\kappa+2,1}a_1 + b_{\kappa+2,2}a_2 + \cdots + b_{\kappa+2,n}a_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_m = b_{m1}a_1 + b_{m2}a_2 + \cdots + b_{m,n}a_n \end{cases}$$

Ushbu sistemada tenglilardan kamida bittasi bajarilmasa CHATS yechimga ega bo'lmaydi.



Agar barcha tengliklar bir paytda bajarilsa CHATS cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + \dots + b_{1k}a_k + b_{1,k+1}x_{k+1} + \dots + b_{1n}x_n \\ x_2 = b_{21}a_1 + b_{22}a_2 + \dots + b_{2k}a_k + b_{1,k+1}x_{k+1} + \dots + b_{1n}x_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_k = b_{k1}a_1 + b_{k2}a_2 + \dots + b_{kk}a_k + b_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + b_{kn}x_n \end{cases}$$

Bu holda  $x_1, x_2, \dots, x_k$  o'zgaruvchilarning qiymatlari  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  o'zgaruvchilarning qiymatlariga bog'liq bo'lib qoladi.  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  o'zgaruvchilar ixtiyoriy qiymatlarni qabul qilishi mumkin.

$n = m$  bo'lsa, ya'ni tenglamalar soni  $m$  noma'lumlar soni  $n$  ga teng bo'lganda, CHATS yagona yechimga ega bo'lishi mumkin. Bu holda diagonal bo'ylab hal qiluvchi elementni tanlash jadval oxirigacha davom etadi va Jordan almashtirishlari  $n$  marta bajariladi. Oxirgi jadval quyidagi ko'rinishga keladi:

	$a_1$	$a_2$	...	$a_n$
$x_1 =$	$b_{11}$	$b_{12}$	...	$b_{1n}$
$x_2 =$	$b_{21}$	$b_{22}$	...	$b_{2n}$
...	...	...	...	...
$x_n =$	$b_{n1}$	$b_{n2}$	...	$b_{nn}$

CHATS yechimi quyidagi ko`rinishda  
yoziladi:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + \dots + b_{1n}a_n \\ x_2 = b_{21}a_1 + b_{22}a_2 + \dots + b_{2n}a_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = b_{n1}a_1 + b_{n2}a_2 + \dots + b_{nn}a_n \end{cases}$$

## Masala:

Quyidagi CHATS ni Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

## Masalanibg yechilishi:

Berilgan masala uchun Jordan jadvalini tuzamiz:

↓

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
4=	2	1	2
1=	1	-1	2
3=	3	1	-2

→

Bosh element sifatida  $a_{11}=2$  ni tanlab, Jordan almashtirishlarini bajargach navbatdagi jadvalni to'ldiramiz.

↓

+		4	$x_2$	$x_3$
	$x_1 =$	1/2	-1/2	-1
→	1=	1/2	-3/2	1
	3=	3/2	-1/2	-5

□

Ushbu jadvalda bosh element sifatida  $a_{22}^1 = -\frac{3}{2}$  element tanlanadi. Jordan almashtirishlarini bajaribi quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

↓

	4	1	$x_3$
$x_1 =$	$1/3$	$1/3$	$-4/3$
$x_2 =$	$1/3$	$-2/3$	$2/3$
$3 =$	$4/3$	$1/3$	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; width: 60px; height: 60px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <math>-16/3</math> </div>

→

Bosh element sifatida  $a_{33}^2 = -16/3$  element tanlanadi. Jordan almashtirishlarini bajaribi navbatdagi jadvalni hosil qilinadi.

	4	1	3
$x_1 =$	0	1/4	1/4
$x_2 =$	1/2	-5/8	-1/8
$x_3 =$	1/4	1/16	-3/16

Ushbu oxirgi jadvaldan natijani quyidagi ko`rinishda yoziladi:

$$x_1 = 4 * 0 + 1 * 1/4 + 3 * 1/4 = 1/4 + 3/4 = 1$$

$$x_2 = 4 * 1/2 - 1 * 5/8 - 3 * 1/8 = 2 - 5/8 - 3/8 = 1$$

$$x_3 = 4 * 1/4 + 1 * 1/16 - 3 * 3/16 = 1 - 8/16 = 1/2$$

## 2. CHATS ni yechishning iteratsiya usuli.

CHATS ni iteratsiya usulida yechish uchun berilgan tenglamalar sistemasi satrlarini shunday joylashtirish kerakki, koeffitsiyentlar matritsasi bosh diagonalida modul bo'yicha eng katta koeffitsientlarni joylashtirish kerak. Agar ushbu shart bajarilmasa, quyidagi usul yordamida sistemani shart bajariladigan holatga olib kelish mumkin.  $Ax = b$  tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishga keltiramiz:  $0 = b - Ax$ ;  $x = b - Ax + x$ ;  $x = (b - Ax)\tau + x$ ;  $x = (E - \tau A)x + \tau b$ ;  $x = Bx + \tau b$ , bu erda  $B = E - \tau A$ . Shunday  $\tau$  sonni tanlash kerakki, quyidagi  $|B| < 1$  shart bajarilsin.



$a_{ii} \neq 0$  deb faraz qilib, (1) sistemaning birinchi tenglamasini  $x_1$  ga, ikkinchisini -  $x_2$  ga, ..., n-tenglamani -  $x_n$  ga nisbatan yechamiz. Natijada quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}x_1 &= \beta_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - \dots - \alpha_{1n}x_n \\x_2 &= \beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{23}x_3 - \dots - \alpha_{2n}x_n \\x_n &= \beta_n - \alpha_{n1}x_1 - \alpha_{n3}x_3 - \dots - \alpha_{nn-1}x_{n-1}\end{aligned}\quad (2)$$

Bu yerda  $\beta_i = b_i/a_{ii}$ ;  $\alpha_{ij} = a_{ij}/a_{ii}$   $i \neq j$ ;  $\alpha_{ii} \neq 0$ ,  $i=1, \dots, n$ .

(2) sistema matritsa ko`rinishida quyidagicha yoziladi:

$$x = \beta - \alpha x$$

Sistemani ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida yechamiz.

$x^0 = \beta$  bo`lsin. U holda quyidagini hosil qilamiz:

$$x^1 = b - \alpha x^0$$

$$x^2 = b - \alpha x^1$$

....

$$x^{k+1} = b - \alpha x^k$$

Quyidagi CHATS uchun yaqinlashish sharti bajariladi.

$$10x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$$

$$33x_1 + 100x_2 + 17x_3 = -407 \quad (*)$$

$$833x_1 - 2500x_2 + 1000x_3 = 30000$$

Almashtirishlar yordamida sistemani quyidagi ko`rinishga keltiramiz:

$$x_1 = 0.5 - (0.2x_2 - 0.1x_3)$$

$$x_2 = -4.07 - (0.33x_1 + 0.17x_3) \quad (*)$$

$$x_3 = 3 - (0.0833x_1 - 0.25x_2)$$

Boshlang'ich qiymatni quyidagicha olamiz:  $x_1^0 = 0, x_2^0 = 0, \dots, x_n^0 = 0$ .  
 $n=1$ . Ushbu qiymatlarni (\*) tenglamalar sistemasining chap tomoniga qo'yamiz:

$$x_1 = 0.5 - 0 \cdot 0.2 - 0 \cdot (-0.1) = 0.5$$

$$x_2 = -4.07 - 0 \cdot 0.33 - 0 \cdot 0.17 = -4.07$$

$$x_3 = 3 - 0 \cdot 0.0833 - 0 \cdot (-0.25) = 3$$

N=2 .

$$x_1 = 0.5 - (-4.07) \cdot 0.2 - 3 \cdot (-0.1) = 1.61$$

$$x_2 = -4.07 - 0.5 \cdot 0.33 - 3 \cdot 0.17 = -4.74$$

$$x_3 = 3 - 0.5 \cdot 0.0833 - (-4.07) \cdot (-0.25) = 1.94$$

N=3

$$x_1 = 0.5 - (-4.74) \cdot 0.2 - 1.94 \cdot (-0.1) = 1.64$$

$$x_2 = -4.07 - 1.61 \cdot 0.33 - 1.94 \cdot 0.17 = -4.93$$

$$x_3 = 3 - 1.61 \cdot 0.0833 - (-4.74) \cdot (-0.25) = 1.68$$

Qolgan hisoblashlarni jadval yordamida yozamiz.

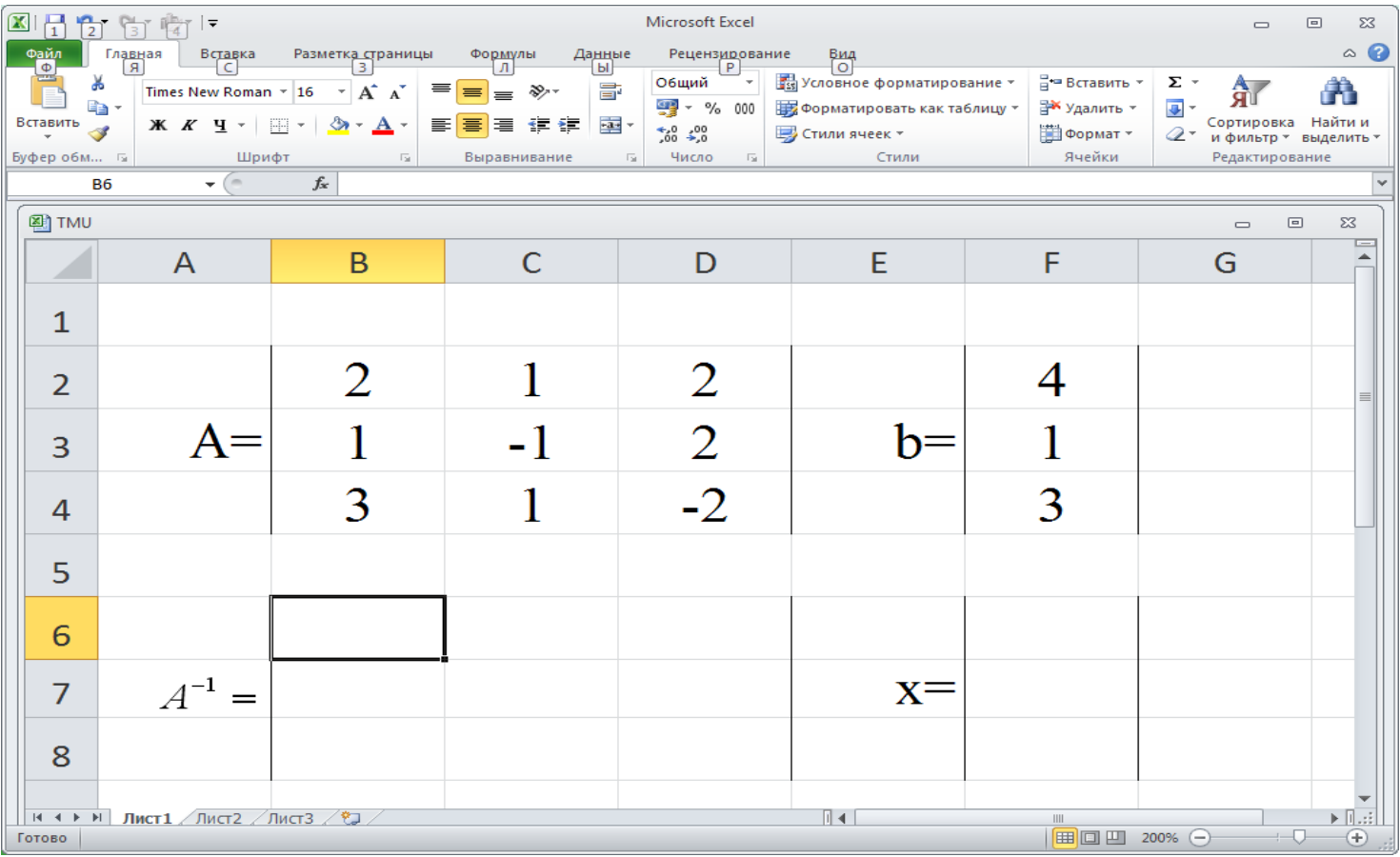
N	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
0	0	0	0			
1	0.5	-4.07	3	0.5	4.07	3
2	1.61	-4.74	1.94	1.11	0.67	-1.06
3	1.64	-4.93	1.68	0.0274	0.19	-0.26
4	1.65	-4.9	1.63	0.013	-0.0341	-0.051
5	1.64	-4.89	1.64	-0.0119	-0.00416	0.00744
6	1.64	-4.89	1.64	-8.8E-5	-0.00273	0.00203
7	1.64	-4.89	1.64	-0.000343	0.00031	0.000691


Javob:  $x_1=1.64$ ,  $x_2=-4.89$ ,  $x_3=1.64$

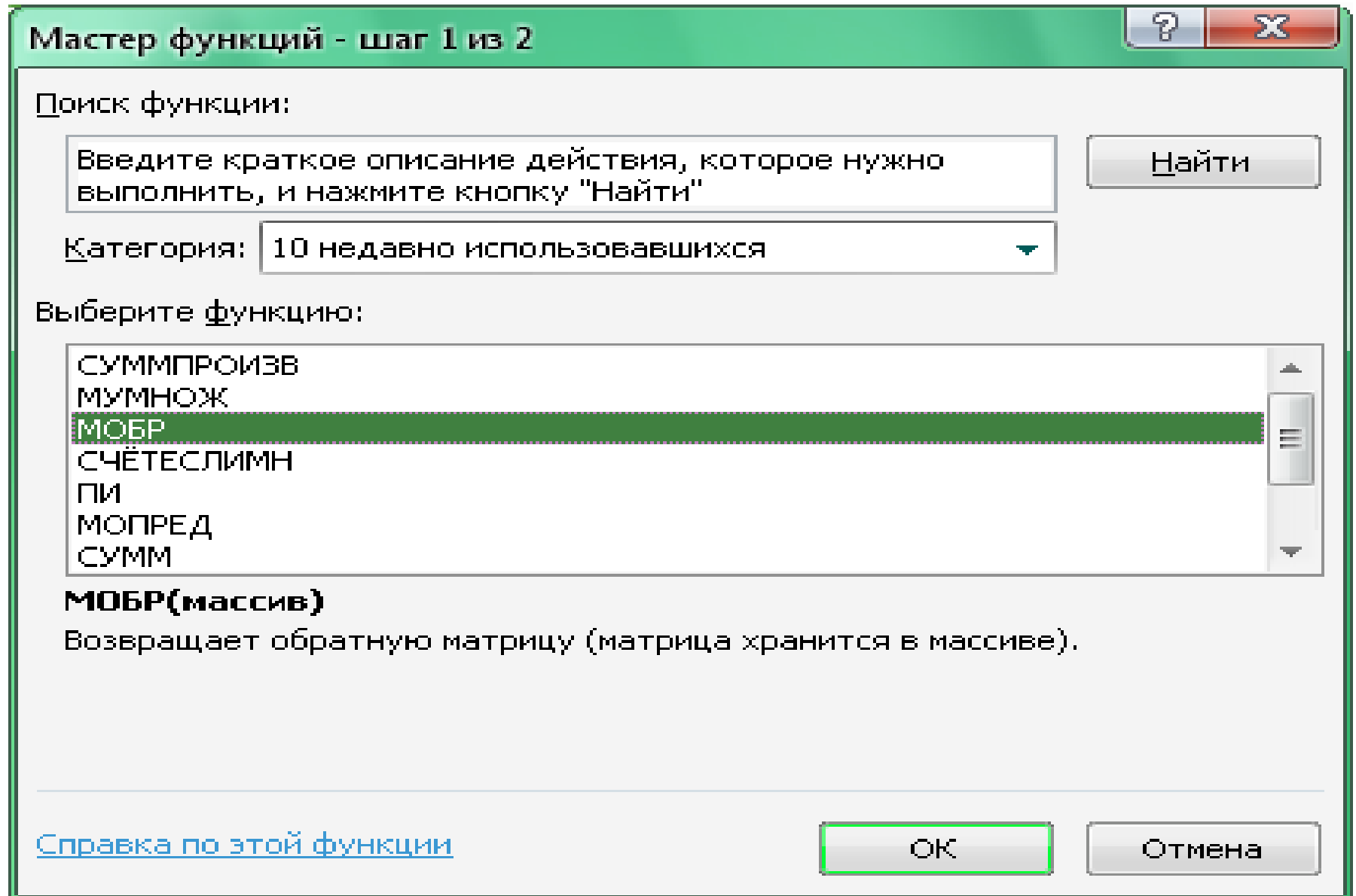
1-masalani Excel dasturi yordamida teskari matritsa usulida yechamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

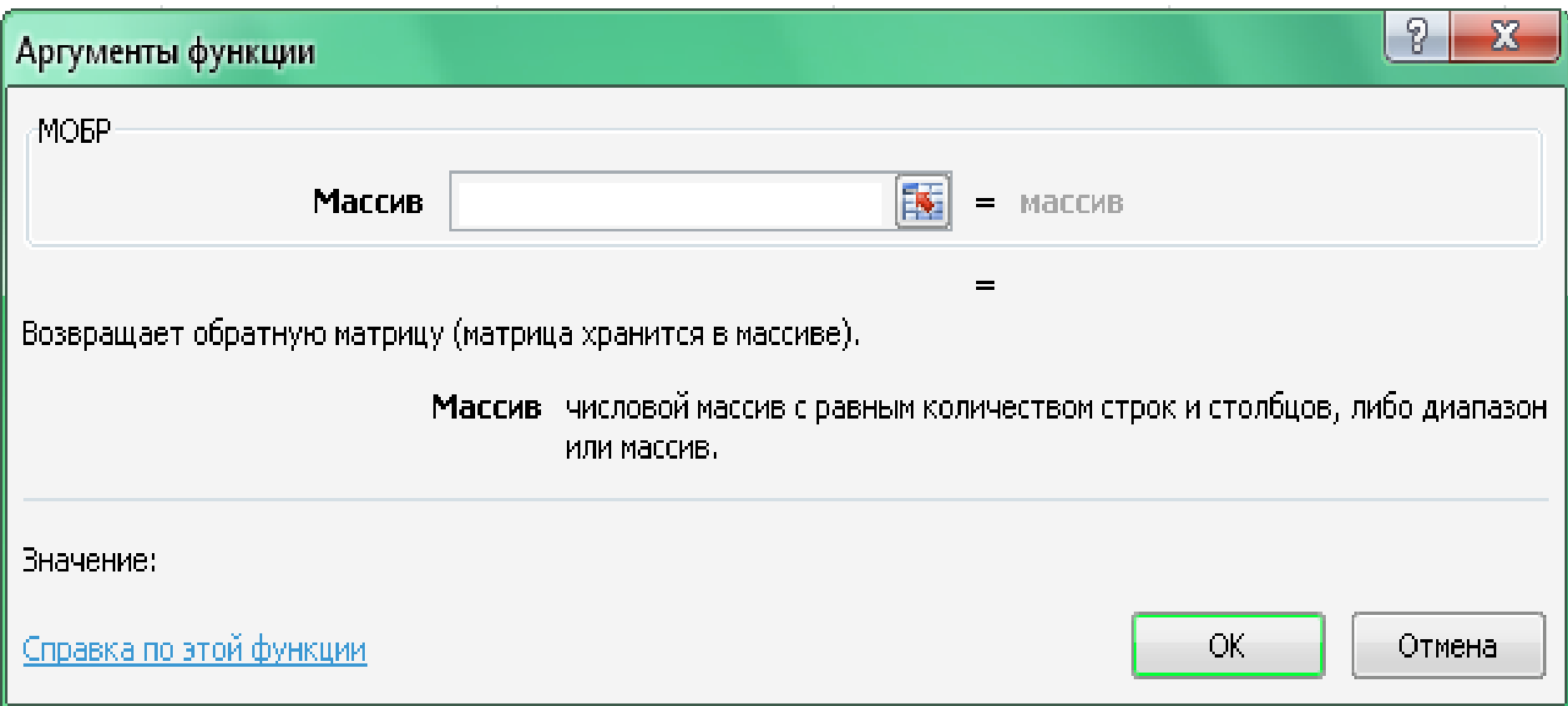
Koeffitsiyentlar matritsasi elementlarini [B2:D4] kataklar diapazoniga kiritamiz. Ozod sonlarni esa [F2:F4] kataklar diapazoniga kiritamiz.



КурсорB6 katakka o`rnatiladi va  funktsiya ustasi yordamida quyidagi muloqot oynasi ochiladi:



Usbu oynada “МОБР” buyrug`i yordamida teskari matritsa aniqlanadi. So`ng quyidagi oyna hosil bo`ladi:



“Массив” darchasiga [B2:D4] kataklar diapazoni kiritiladi va “OK” tugmasi bosiladi. Natijada Excel oynasi quyidagi ko`rinishga keladi:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface. The formula bar at the top displays the formula  $=\text{МОБР}(B2:D4)$ . The spreadsheet contains the following data:

	A	B	C	D	E	F
1						
2		2	1	2		4
3	A=	1	-1	2	b=	1
4		3	1	-2		3
5						
6		0				
7	$A^{-1} =$				x=	
8						



[B6:D8] kataklar diapazoni belgilanib, **F2** tugmasi bosiladi. So`ng **ctrl+shift+enter** tugmalar majmui bosiladi. Natijada belgilangan kataklar diapazonida  $A^{-1}$  teskari matritsa elementlari hosil bo`ladi:

Microsoft Excel

Файл Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид

Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Стили Ячейки

Вставка Удалить Формат

Сортировка и фильтр Редактирование

B6 {=МОБР(B2:D4)}



	A	B	C	D	E	F
1						
2		2	1	2		4
3	A=	1	-1	2	b=	1
4		3	1	-2		3
5						
6		0	0,25	0,25		
7	$A^{-1}$ =	0,5	-0,63	-0,13	x=	
8		0,25	0,063	-0,19		

Готово Среднее: 0,041666667 Количество: 9 Сумма: 0,375 200%

Курсор F6 katagiga o`rnatiladi.  funktsiya ustasi yordamida “МУМНОЖ” funktsiyasi tanlanadi. Natijada quyidagi oyna hosil bo`ladi:

Аргументы функции

МУМНОЖ

Массив1	<input type="text"/>		= массив
Массив2	<input type="text"/>		= массив

=

Возвращает матричное произведение двух массивов; результат имеет то же число строк, что и первый массив, и то же число столбцов, что и второй массив.

**Массив1** первый из перемножаемых массивов, число столбцов в нем должно равняться числу строк во втором массиве.

Значение:

[Справка по этой функции](#)

OK Отмена

“Массив1” darchasiga [B6:D8] katalar diapazoni, “Массив2” darchasiga esa [F2:F4] kataklar diapazoni kiritiladi. Natijada Excel oynasi quyidagi ko`rinishga keladi:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following details:

- Formula Bar:**  $=\text{МУМНОЖ}(\text{B6:D8};\text{F2:F4})$
- Worksheet Grid:**

	A	B	C	D	E	F
1						
2		2	1	2		4
3	A=	1	-1	2	b=	1
4		3	1	-2		3
5						
6		0	0,25	0,25		1
7	$A^{-1} =$	0,5	-0,63	-0,13	x=	
8		0,25	0,063	-0,19		

Bu yerda [F6:F8] kataklar diapazoni belgilanib, F2 tugmasi, so`ng ctrl+shift+enter tugmalar majmui bosiladi. Natijada Excel oynasi quyidagi ko`rinishga keladi:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data in the spreadsheet:

	A	B	C	D	E	F
1						
2		2	1	2		4
3	A=	1	-1	2	b=	1
4		3	1	-2		3
5						
6		0	0,25	0,25		1
7	A <sup>-1</sup> =	0,5	-0,63	-0,13	x=	1
8		0,25	0,063	-0,19		0,5

The formula bar shows: `{=МУМНОЖ(B6:D8;F2:F4)}`

Masala natijasi quyidagi ko`rinishda bo`ladi:  $x_1=1$ ,  $x_2=1$ ,  $x_3=0.5$ .

CHATS ni Mathcad dasturi yordamida iteratsiya usulini qoʻllab yechamiz. Dastlab boshlangʻich qiymatlar beriladi:  **$x_1:=1$** ,  **$x_2:=1$** ,  **$x_3:=1$** . **Given** soʻzi yozilib, CHATS mantiqiy ifoda koʻrinishida yoziladi:

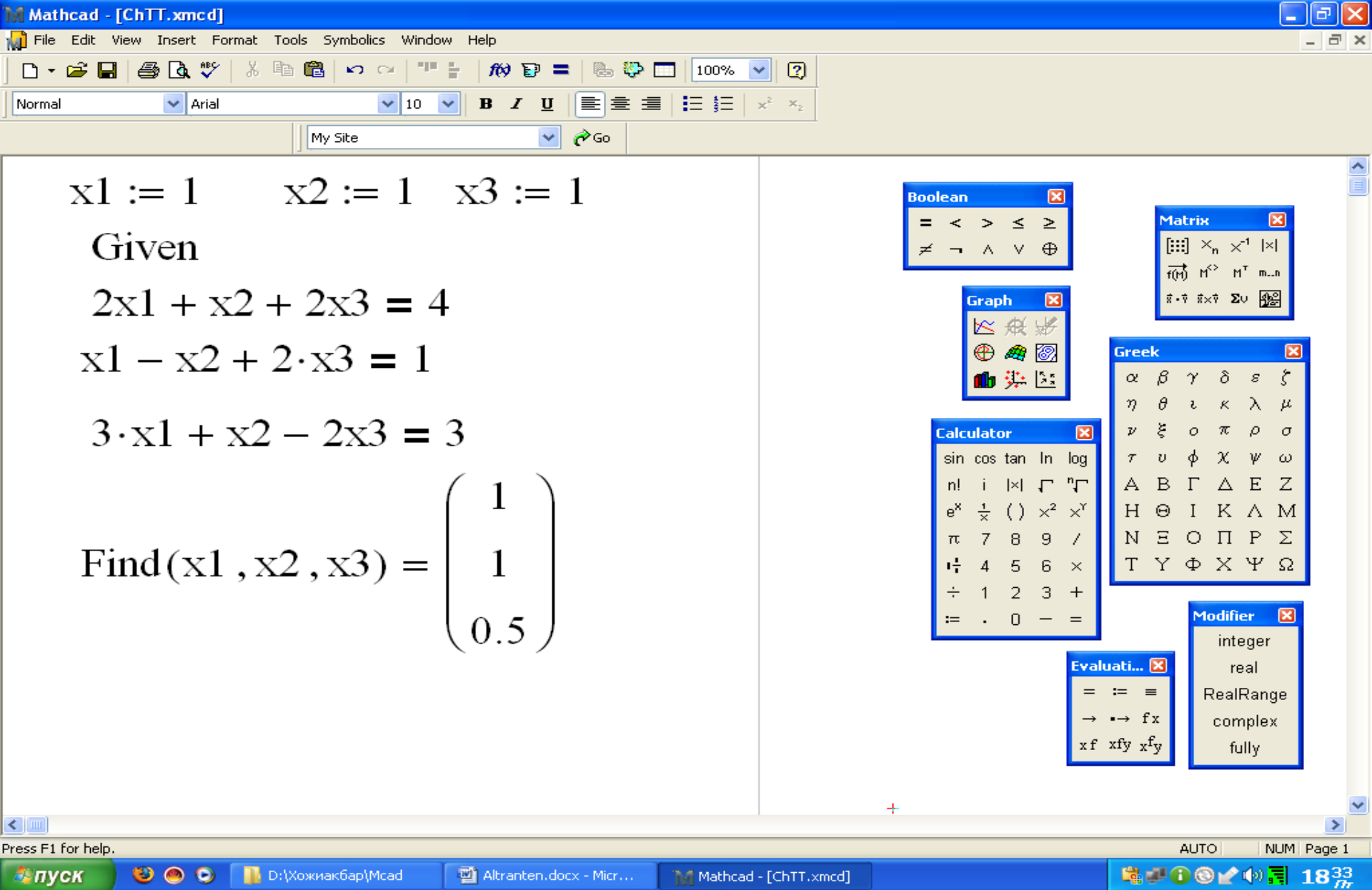
$$2*x_1+x_2+2*x_3=4$$

$$x_1-x_2+2*x_3=1$$

$$3*x_1+x_2-2*x_3=3$$

Soʻng quyidagi operator yordamida natija hosil qilinadi: **Find(x1,x2,x3) =**

Mathcad dagi dastur quyidagi koʻrinishda boʻladi:



Masala natijasi quyidagi ko`rinishda bo`ladi:  $x_1=1, x_2=1, x_3=0.5$ .

Mathcad dasturida teskari matritsa usuli yordamida tenglamalar tizimini yechamiz. Buning uchun biz quyidagi yozuvlarni kiritamiz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x = A^{-1}b$$

**A** matritsa elementlari, **B** vektor elementlari,  $x := A^{-1}b$  formulasi kiritiladi. Keyingi qatorga  $x =$  operatori kiritiladi. "=" belgisidan keyin tenglamalar tizimining yechimi paydo bo'ladi. A matritsa va V vektor elementlari **Matrix** vositalar paneli yordamida kiritiladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar tizimini yechish dasturi quyidagi ko`rinishda bo`ladi:

Mathcad - [TMU]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U  $x^2$   $x_2$

My Site Go

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x := A^{-1} \cdot b$$
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Natijasi quyidagi ko`rinishda bo`ladi:  $x_1=1$ ,  $x_2=1$ ,  $x_3=0.5$ .