UZBEK MATHEMATICAL JOURNAL

2004 1

Uzbek Mathematical
Journal, 2004,№1,pp.6-14

УДК 517.956

О связанных состояниях негейзенберговского гамильтониана для систем с переменным числом частиц

Ш.А.Айнакулов, Ю.Х.Эшкобилов

Maqolada bitta elektron va spini ixtiyoriy $s \geq 1/2$ qiymatlarni qabul qiluvchi bitta magnondan iborat sistema nogeyzenberg gamiltonianning bog'langan holatlari o'rganilgan.

The connected a condition states of nonheyzenberg hamiltonian of system consisting of single electron and single magnon with spin $s \geq 1/2$.

В статье изучается спектр оператора, называемый негейзенберговским гамильтонианом системы, состоящей из одного электрона со спином вниз, из одного электрона со спином вверх и магнона с значением спина $s \geq 1/2$. Аналогичная задача в случае $s = 1/2, \nu = 3$, при $B \gg J$ была изучена в [1]. Было показано, что в зависимости от соотношений между параметрами существует единственное связанное состояние или не существует ни одного связанного состояния. В дальнейшем, эта задача подробно была изучена в работе [2], в случаях размерностей $\nu = 1, 2, 3$. Доказано, что в случае $\nu = 1, 2$ размерностей всегда существует единственное связанное состояние, а в случае размерности $\nu = 3$, при некоторых соотношениях между параметрами может не существовать ни одного связанного состояния системы. Мы рассмотрим аналогичную задачу с произвольным значением спина s: $s \geq 1/2$. В работе Шредингера [3] показано, что в случае $s > 1/2$ в гамильтониане. вместе с членами (S_p, S_q), необходимо учитывать члены более высоких степеней до $(S_p, S_q)^{2s}$. При этом, применительно к нашей задаче, в интеграле обменного взаимодействия электрона проводимости и атомного спина вместе с членами $(\sigma, S_m)_{\gamma\gamma'} a^+_{m\gamma} a_{m\gamma'}$ следует учитывать члены более высоких степеней до $\left((\sigma, S_m)_{\gamma\gamma'} a^+_{m\gamma} a_{m\gamma'}\right)^{2s}$. Такой гамильтониан называется негейзенберговским и изучение его спектра представляет значительный интерес.

1. Гамильтониан системы и его представление в инвариантном пространстве

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид:

$$\hat{H} = B \sum_{m,\gamma,z} a^+_{m,\gamma} a_{m+z,\gamma} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2s} J_k \sum_{m,z} (S_m, S_{m+z})^k -$$
$$- \sum_{k=1}^{2s} A_k \sum_{m,\gamma,\gamma'} \left\{(\sigma, S_m)_{\gamma,\gamma'} a^+_{m,\gamma} a_{m,\gamma'}\right\}^k \qquad (1)$$

Он действует в пространстве $H_{as} = F_{as}(l_2(Z^\nu) \otimes C^2) \otimes H_m$ и при $s = 1/2$ совпадает с гамильтонианом, рассмотренным в [1] и [2]. Здесь $a^+_{m\gamma}(a_{m\gamma})$- оператор рождения (уничтожения) электрона в узле m со спином или $\gamma = \uparrow$ или $\downarrow$. $S_n = (S^x_n, S^y_n, S^z_n)$ - оператор атомного спина находящегося в узле n, $\sigma = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ - тройка матриц Паули. Суммирование по τ - означает суммирование по соседним узлам решетки Z^ν. B, A_k, J_k, $k = \overline{1, 2s}$ - вещественные параметры. $F_{as}(l_2(Z^\nu) \otimes C^2)$ - антисимметричное пространство фока над $l_2(Z^\nu) \otimes C^2$. H_m - бесконечное тензорное произведение $2s+1$ - мерных пространств: $H_m = \otimes_{n=1}^\infty C_n^{2s+1}$, где $C_n^{2s+1} = C^{2s+1}$ - $2s+1$ - мерное комплексное пространство.

Рассмотрим пространство $\overline{X}$, состоящее из функций следующего вида:

$$\overline{\psi} = \sum_{p \in Z^\nu} \overline{f}_1(p) a^+_{p\downarrow} \varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{p,q \in Z^\nu} \overline{f}_2(p,q) a^+_{p\uparrow} S^-_q \varphi_0,$$
$$f_2 \in l_2(Z^\nu), \ f_2 \in l_2(Z^\nu \times Z^\nu) \qquad (2)$$

Здесь

$$||\overline{\psi}|| = \left(\sum_{p \in Z^\nu} |\overline{f}_1(p)|^2 + \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{p,q \in Z^\nu} |\overline{f}_2(p,q)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

где φ_0 - вакуумный вектор пространства $\overline{X}$, с нормой $||\varphi_0|| = 1$ и однозначно определяемый соотношениями:

$$S^z_p \varphi_0 = s\varphi_0, S^+_p \varphi_0 = 0, a_{p\gamma}\varphi_0 = 0, \forall p \in Z^\nu, \text{ где } S^\pm_p = S^x_p \pm iS^y_p.$$

Обозначим через $\overline{X}_k$, $k = 1, 2$ пространства:

$$\overline{X}_1 = \left\{\overline{\psi} : \overline{\psi} = \sum_{p \in Z^\nu} \overline{f}_1(p) a^+_{p\downarrow} \varphi_0, \overline{f}_1 \in l_2(Z^\nu), \right\}$$

$$\overline{X}_2 = \left\{\overline{\psi} : \overline{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{p \in Z^\nu} \overline{f}_2(p,q) a^+_{p\uparrow} S^+_q \varphi_0, \overline{f}_2 \in l_2(Z^\nu \times Z^\nu), \right\}$$

Заметим, что $\overline{X} = \overline{X}_1 \oplus \overline{X}_2$..
Рассмотрим сужение оператора $\widehat{H}$ в $\overline{X}$: $\overline{H} = \widehat{H}/\overline{X}$. Очевидно, что $\overline{H}$ в $\overline{X}$ имеет матричное представление:

$$\overline{H} = ||\overline{H}_{ij}||_{i,j=1,2.}, \text{ где } \overline{\mathrm{H}}_{ij} : \overline{X}_j \to \overline{x}_i, i, j = 1, 2.$$

Обозначим через $\widetilde{X}_1 = l_2(Z^\nu)$. $\widetilde{X}_2 = l_2(Z^\nu \times Z^\nu)$ и положим $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1 \oplus \widetilde{X}_2$.

Утверждение 1.1. а) *Пространство $\overline{X}$ инвариантно относительно оператора $\widehat{H}$. б) Оператор $\overline{H} = \widehat{H}/\overline{X}$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный матричный оператор:*

$$\widetilde{H} = ||\widetilde{H}_{ij}||_{i,j=1,2.}, \widetilde{H}_{ij} : \widetilde{X}_j \to \widetilde{X}_i, i, j = 1, 2$$

действующий в пространстве $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1 \oplus \widetilde{X}_2$ *по формуле:*

$$\begin{cases} (\widetilde{H}_{11}\widetilde{f}_1(p)) = B\sum_\tau \widetilde{f}_1(p+\tau) + A^-(s)\widetilde{f}_1(p) \\ (\widetilde{H}_{12}\widetilde{f}_2)(p) = \frac{2}{\sqrt{2s}}A^-(s)\widetilde{f}_2(p,p) \\ (\widetilde{H}_{21}\widetilde{f}_1)(p,q) = \frac{\sqrt{2s}D(s)}{s-1}\delta_{pq}\widetilde{f}_1(p) \\ (\widetilde{H}_{22}\widetilde{f}_2)(p,q) = B\sum_\tau \widetilde{f}_2(p+\tau,q) + J(s)[2\nu\widetilde{f}_2(p,q) - \sum_\tau \widetilde{f}_2(p,q+\tau) - \\ -[A(s)-D(s)]\delta_{pq}\widetilde{f}_2(p,q) - A(s)\widetilde{f}_2(p,q) \end{cases} \tag{3}$$

такой, что

$$\overline{H\psi} = \sum_{p\in Z^\nu}\left[(\widetilde{H}_{11}\widetilde{f}_1)(p) + (\widetilde{H}_{12}\widetilde{f}_2)(p)\right]a^+_{p\downarrow}\varphi_0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2s}}\sum_{p,q\in Z^\nu}\left[(\widetilde{H}_{21}\widetilde{f}_1)(p,q) + (\widetilde{H}_{21}\widetilde{f}_2)(p,q)\right]a^+_{p\uparrow}S^-|q\varphi_0 \tag{4}$$

Здесь

$$A(s) = \sum_{k=1}^{2s} A_k\left(\frac{s}{2}\right)^k, A^-(s) = \sum_{k=1}^{2s} A_k\left(-\frac{s}{2}\right)^k,$$

$$D(s) = \sum_{k=1}^{2s} A_k\left(\frac{s-1}{2}\right)^k, J(s) = -\sum_{k=1}^{2s}\frac{J_k}{2}(-2s)^k.$$

Доказательство. а) Используя соотношение $[S^\pm_p, S^z_q] = \pm\delta_{pq}S^z_p$, $[S^+_p, S^-_q] = 2\delta_{pq}S^z_p, \{a^+_{p\gamma}, a_{q\gamma'}\} = \delta_{pq}\delta_{\gamma\gamma'}$, $\{a^+_{p\gamma}, a^+_{q\gamma'}\} = 0, \{a_{p\gamma}, a_{q\gamma'}\} = 0$, $S^z_p\varphi_0 = s\varphi_0, S^+_p\varphi_0 = 0, a_{p\gamma}\varphi_0 = 0$ легко доказывается инвариантность пространства $\overline{X}$ относительно оператора $\overline{H}$.

б) Базисные векторы $\{a^+_{p\downarrow}\varphi_0\}, \{a^+_{p\uparrow}S^-_q\varphi_0\}$ оператором $\overline{H}$ переводятся на следующие векторы:

$$\overline{H}(a^+_{p\downarrow}\varphi_0) = B\sum_\tau a^+_{p-\tau,\downarrow}\varphi_0 + A^-(s)a^+_{p,\downarrow}\varphi_0 + \frac{D(s)}{-s}a^+_{p\uparrow}S^-_q\varphi_0$$

$$\overline{H}(a^+_{p\uparrow}S^-_q\varphi_0) = B\sum_\tau a^+_{p-\tau,\uparrow}S^-_q\varphi_0 + J(s)\left[2\nu a^+_{p\downarrow}S^-_q\varphi_0 - \sum_\tau a^+_{p\uparrow}S^-_{q-\tau}\varphi_0\right] +$$
$$+[D(s)\delta_{pq} - A(s)]a^+_{p\uparrow}S^-_q\varphi_0 - 2A^-(s)a^+_{p,\downarrow}\varphi_0$$

А сопряженный оператор $\overline{H}*$ действует в виде:

$$\overline{H}*(a^+_{p\downarrow}\varphi_0) = B\sum_\tau a^+_{p+\tau,\downarrow}\varphi_0 + A^-(s)a^+_{p,\downarrow}\varphi_0 + \frac{D(s)}{s-1}a^+_{p\uparrow}S^-_q\varphi_0$$

$$\overline{H}*(a^+_{p\uparrow}S^-_q\varphi_0) = B\sum_\tau a^+_{p+\tau,\uparrow}S^-_q\varphi_0 + J(s)\left[2\nu a^+_{p\uparrow}S^-_q\varphi_0 - \sum_\tau a^+_{p\uparrow}S^-_{pq+\tau}\varphi_0\right] +$$
$$+[D(s)\delta_{pq} - A(s)]a^+_{p\uparrow}S^-_q\varphi_0 - 2A^-(s)a^+_{p,\downarrow}\varphi_0$$

Отсюда и из того, что τ - суммирует по соседним узлам решетки Z^ν, следует самосопряженность оператора $\overline{H}$: $\overline{H}* = \overline{H}$. Далее, для любого вектора $\overline{\psi}\in\overline{X}$ имеем:

$$|(\overline{H\psi}, \overline{H\psi})| < c^2_\nu(s)||\overline{\psi}||^2$$

где

$$c_\nu(s) = \max\left\{2\nu|B| + |A^-(s)|, |\frac{D(s)}{1-s}|, \frac{2\nu|B| + 4\nu|J(s)| + |D(s)| + |A(s)|}{\sqrt{2s}}, 2|A^-(s)|\right\}$$

Отсюда следует ограниченность оператора $\overline{H}$. Действуя оператором $\overline{H}$ на произвольный вектор $\overline{\psi}\in\overline{X}$ и выполняя некоторые простые вычисления можно показать, что выполняется равенство (4). Ограниченность и самосопряженность оператора $\widetilde{H}$ показывается аналогично, как это было показано для оператора $\overline{H}$.

Утверждение 1.2. *Спектры операторов* $\overline{H}$ *и* $\widetilde{H}$ *совпадают, т.е.* $\sigma(\overline{H}) = \sigma(\widetilde{H})$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in\sigma(\overline{H})$. Тогда в силу ограниченности и самосопряженности оператора $\overline{H}$ из теоремы Вейля [2] следует существование последовательности ортонормированных векторов $\{\overline{\psi}_n\}$:

$$\overline{\psi}_n = \sum_{p\in Z^\nu}\overline{f}_{1n}(p)a^+_{p\downarrow}\varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2s}}\sum_{p,q\in Z^\nu}\overline{f}_{2n}(p,q)a^+_{p\uparrow}S^-_q\varphi_0, ||\varphi_0|| = 1, n\in N$$

такие, что для любого $\varepsilon < 0$ существует такое $m\in N$, что при $n > m$

$$||\overline{H\psi}_n - \lambda\overline{\psi}_n|| < \varepsilon \tag{5}$$

Ясно, что

$$\overline{H\psi}_n - \lambda\overline{\psi}_n = \sum_{p\in Z^\nu}\{\overline{H}_{11}\overline{f}_{1n}(p) + \overline{H}_{12}\overline{f}_{2n}(p,q) - \lambda\overline{f}_{1n}(p)\}a^+_{p\downarrow}\varphi_0 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2s}}\sum_{p,q\in Z^\nu}\{\overline{H}_{21}\overline{f}_{1n}(p) + \overline{H}_{22}\overline{f}_{2n}(p,q) - \lambda\overline{f}_{2n}(p,q)\}a^+_{p\uparrow}S^-_q\varphi_0 =$$

$$= \sum_{p\in Z^\nu}\left\{\left(\widetilde{H}_{11}\widetilde{f}_{1n}\right)(p) + \left(\widetilde{H}_{12}\widetilde{f}_{1n}\right)(p) - \left(\lambda\widetilde{f}_{1n}\right)(p)\right\}a^+_{p\downarrow}S^-_q\varphi_0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2s}}\sum_{p,q\in Z^\nu}\left\{\left(\widetilde{H}_{21}\widetilde{f}_{1n}\right)(p,q) + \left(\widetilde{H}_{22}\widetilde{f}_{2n}\right)(p,q) - \left(\lambda\widetilde{f}_{2n}\right)(p,q)\right\}a^+_{p\uparrow}S^-_q\varphi_0$$

Следовательно,

$$||\overline{H\psi}_n - \lambda\overline{\psi}_n||^2 = \sum_{p\in Z^\nu}|\left(\widetilde{H}_{11}\widetilde{f}_{1n}\right)(p) + \left(\widetilde{H}_{12}\widetilde{f}_{2n}\right)(p,q) - \left(\lambda\widetilde{f}_{1n}(p)\right|^2 +$$

$$+\sum_{p,q\in Z^\nu}|\left(\widetilde{H}_{21}\widetilde{f}_{1n}\right)(p,q) + \left(\widetilde{H}_{22}\widetilde{f}_{2n}\right)(p,q) - \left(\lambda\widetilde{f}_{2n}\right)(p,q)|^2 =$$

$$\left\|\left(\begin{pmatrix}\widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12}\\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22}\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}E_{11} & 0\\ 0 & E_{22}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\widetilde{f}_{1n}\\ \widetilde{F}_{2n}\end{pmatrix}\right\|^2 = ||\widetilde{H}\widetilde{f}_n - \lambda\widetilde{f}_n||^2 \tag{6}$$

где $\widetilde{f}_n = \begin{pmatrix}\widetilde{f}_{1n}\\ \widetilde{f}_{2n}\end{pmatrix}$.

Заметим, что $||\widetilde{f}_n||^2 = ||\widetilde{f}_{1n}||^2 + ||\widetilde{f}_{2n}||^2 = \sum\limits_{p\in Z^\nu} |\overline{f}_{1n}(p)|^2 + \sum\limits_{p,q\in Z^\nu} |\overline{f}_{2n}(p,q)|^2 = 1.$

Из (4) и (5) следует, что $\lambda \in \sigma(\widetilde{H})$. Следовательно, $\sigma(\overline{H}) \subset \sigma(\widetilde{H})$. Выполняя аналогичные операции в обратном порядке, имеем, что $\sigma(\overline{H}) \supset \sigma(\widetilde{H})$. Отсюда получим, что $\sigma(\overline{H}) = \sigma(\widetilde{H})$.

2. P представление оператора $\widetilde{H}$

Обозначим через T^ν – ν-мерный тор снабженный нормированной мерой $d\lambda$: $\lambda(T^\nu) = 1$. Положим $X_1 = L_2(T^\nu, d\lambda)$, $X_2 = L_2(T^\nu \times T^\nu, d\lambda \otimes d\mu)$ и $X = X_1 \oplus X_2$

Пусть $F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}$-преобразовани е Фурье, переводящее пространство $\widetilde{X}$ в пространство X. Здесь $F_1(\widetilde{X}_1) = X_1, F_2(\widetilde{X}_2) = X_2$.

Утверждение 2.1. *При преобразование Фурье оператор $\widetilde{H}$ переходит в оператор $H = ||H_{ij}||_{i,j=1,2}$ действующий в X по формуле:*

$$\begin{cases} (H_{11}f_1)(\lambda) = h_1(\lambda)f_1(\lambda) \\ (H_{12}f_2)(\lambda) = -\frac{2}{\sqrt{2s}}A^-(s)\int\limits_{T^\nu} f_2(t,\lambda-t)dt \\ (H_{21}f_1)(\lambda,\mu) = \frac{\sqrt{2s}D(s)}{s-1}f_1(\lambda+\mu) \\ (H_{22}f_2)(\lambda,\mu) = h_2(\lambda,\mu)f_2(\lambda,\mu) + g(s)\int\limits_{T^\nu} f_2(t,\lambda+\mu-t)dt \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $h_1(\lambda) = 2B\sum\limits_{i=1}^{\nu}\cos\lambda_i - A^-(s),\ g(s) = A(s) - D(s)$

$$h_2(\lambda,\mu) = 2B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\lambda_i + 2J(s)\left(\nu - \sum_{i=1}^{\nu}\cos\mu_i\right) - A(s).$$

Доказательство утверждения непосредственно получается после некоторых вычислений при преобразовании Фурье. Оператор H называется P представлением оператора $\widetilde{H}$.

Из унитарности оператора F следует, что операторы $\widetilde{H}$ и H унитарно эквивалентны. Отсюда имеем, что $\sigma(H) = \sigma(\widetilde{H})$.

Фиксируя $\Lambda = \lambda + \mu$, где $\lambda, \mu \in T^\nu$, рассмотрим многообразие $\Gamma_{2\Lambda} \subset T^\nu \times T^\nu$: $\Gamma_{2\Lambda} = \{(\lambda,\mu) \in T^\nu \times T^\nu : \lambda + \mu = \Lambda\}$ и точку $\Gamma_{1\Lambda} = \{\Lambda\} \in T^\nu$.

Положим, $X(\Lambda) = C^1 \oplus L_2(\Gamma_{2\Lambda})$, где C^1 - множество комплексных чисел. Рассмотрим сужение оператора H на $X(\Lambda) : H(\Lambda) = H/X(\Lambda)$. Оператор $H(\Lambda)$ инвариантен относительно пространства $X(\Lambda)$. Это позволяет представить оператор H и пространство X в виде прямого интеграла [4]:

$$H = \oplus\int\limits_{T^\nu} H(\Lambda)d\Lambda,\ X = \oplus\int\limits_{T^\nu} X(\Lambda)d\Lambda.$$

Здесь

$$H(\Lambda)\begin{pmatrix} f_{1\Lambda} \\ f_{2\Lambda}(\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1\Lambda}f_{1\Lambda} + \frac{2}{\sqrt{2s}}A^-(s)\int\limits_{T^\nu} f_{2\Lambda}(t)dt \\ h_{2\Lambda}(\lambda)f_{2\Lambda}(\lambda) + g(s)\int\limits_{T^\nu} f_{2\Lambda}(t)dt + \frac{D(s)}{1-s}f_{1\Lambda}\end{pmatrix}$$

где $h_{1\Lambda} = 2B\sum\limits_{j=1}^{\nu}\cos\Lambda_j + A^-(s)$

$$h_{2\Lambda}(\lambda) = 2B\sum_{j=1}^{\nu}\cos\lambda_j + 2J(s)\left(\nu - \sum_{i=1}^{\nu}(\cos(\Lambda_i - \lambda_j))\right) - A(s)$$

Определение 1. *Собственная функция $\varphi_\Lambda(\lambda)$, соответствующая собственному значению $E(\Lambda)$ оператора $H(\Lambda)$ называется связанным состоянием оператора H, а $E(\Lambda)$ энергией этого связанного состояния.*

Положим, что $m_\nu(\Lambda) = \min_{\lambda\in T^\nu} h_{2\Lambda}(\lambda)$, $M_\nu(\Lambda) = \max_{\lambda\in T^\nu} h_{2\Lambda}(\lambda)$. Нетрудно проверить, что

$$M_\nu(\Lambda) = \sum_{i=1}^{\nu}\sqrt{4(B - J(s)\cos\Lambda_i)^2 + 4J^2(s)\sin^2\Lambda_i} + 2\nu J(s) - A(s)$$

$$m_\nu(\Lambda) = -\sum_{i=1}^{\nu}\sqrt{4(B - J(s)\cos\Lambda_i)^2 + 4J^2(s)\sin^2\Lambda_i} + 2\nu J(s) - A(s)$$

Определение 2. *Связанное состояние называется минимально связанным, если $E(\Lambda) < m_\nu(\Lambda)$ и максимально связанным, если $E(\Lambda) > M_\nu(\Lambda)$.*

3. Связанное состояние оператора

Чтобы изучить спектр оператора H, достаточно изучить спектры операторов $H(\Lambda)$ при каждом $\Lambda \in T^\nu$. Нетрудно заметить, что существенный спектр оператора $H(\Lambda)$ состоит из множества значений функции $h_{2\Lambda}(\lambda)$, т.е.

$$\sigma_{ess}(H(\Lambda)) = [m_\nu(\Lambda), M_\nu(\Lambda)].$$

Лемма 3.1. *Число $z \in R$ является собственным значением оператора $H(\Lambda)$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции:*

$$\Delta_\Lambda(z) = 1 + g(s)\frac{h_{1\Lambda} - c(s) - z}{h_{1\Lambda} - z}\int\limits_{T^\nu}\frac{dt}{h_{2\Lambda}(t) - z}, \tag{8}$$

где $c(s) = \frac{2D(s)A^-(s)}{(s-1)}$.

Доказательство. Из уравнения $H\psi = z\psi$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} h_{1\Lambda}f_{1\Lambda} - \frac{2}{\sqrt{2s}}A^-(s)\int\limits_{T^\nu} f_{2\Lambda}(t)dt = zf_{1\Lambda} \\ h_{2\Lambda}(\lambda)f_{2\Lambda}(\lambda) + g(s)\int\limits_{T^\nu} f_{2\Lambda}(t)dt + \frac{\sqrt{2s}D(s)}{s-1}f_{1\Lambda} = zf_{2\Lambda}(\lambda)\end{cases} \tag{9}$$

Приравнивая коэффициенты перед интегралом $\int\limits_{T^\nu} f_{2\Lambda}(t)dt$ и сложив соответствующие слагаемые уравнений, удаляя интеграл из второго уравнения имеем следующее уравнение:

$$\frac{2}{\sqrt{2s}}A^-(s)(h_{2\Lambda}(\lambda) - z)f_{2\Lambda}(\lambda) + g(s)(h_{1\Lambda} - z)f_{1\Lambda} + \frac{1A^-(s)}{s-1}D(s)f_{1\Lambda} = 0$$

Отсюда выразив $f_{2\Lambda}(\lambda)$ через $f_{1\Lambda}$ и интегрируя $f_{2\Lambda}(\lambda)$ по λ, получаем:

$$\int_{T^\nu} f_{2\Lambda}(t)dt = \frac{-g(s)(h_{1\Lambda}-z) - \frac{2A^-(s)D(s)}{s-1}}{\frac{2}{\sqrt{2s}}A^-(s)} \int \frac{dt}{h_{2\Lambda}(t)-z} f_{1\Lambda}$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы (9), имеем:

$$(h_{1\Lambda}-z)f_{1\Lambda} - \frac{2}{\sqrt{2s}}A^-(s)\frac{-g(s)(h_{1\Lambda}-z)+\frac{2A^-(s)D(s)}{s-1}}{\frac{2}{\sqrt{2s}}A^-(s)} f_{1\Lambda}\int_{T^\nu}\frac{dt}{h_{2\Lambda}(t)-z} = 0$$

Поделив это уравнение на $(h_{1\Lambda}-z)f_{1\Lambda}\neq 0$ и вводя обозначение $c(s)=\frac{2D(s)A^-(s)}{(s-1)}$ получим, что $\Delta_\Lambda(z)=0$. Обратное утверждение доказывается обратно, выполняя вышеуказанные операции.

Лемма 3.2. *Для интеграла в (8) в окрестностях точек $m_\nu(\Lambda)$ и $M_\nu(\Lambda)$ имеет место следующая асимптотическая формула [5]:*

$$\int_{T^\nu}\frac{dt}{h_{2\Lambda}(t)-z} \approx \begin{cases} \pm C_\nu|D_\nu(\Lambda)-z|^{-\frac{1}{2}}, \nu=1 \\ \pm C_\nu \ln|D_\nu(\Lambda)-z|, \nu=2 \end{cases} \qquad (10)$$

где $D_\nu(\Lambda)=m_\nu(\Lambda)$ при $z\uparrow D_\nu(\Lambda)$, $D_\nu(\Lambda)=M_\nu(\Lambda)$ при $z\uparrow D_\nu(\Lambda)$.

В случае $c(s)>0$ тор T^ν разлагается на следующие взаимонепересекающиеся множества:

$$\begin{aligned} G_1^\nu &= \{\Lambda\in T_+^\nu : h_{1\Lambda} < m_\nu(\Lambda)\} \\ G_2^\nu &= \{\Lambda\in T^\nu : h_{1\Lambda}-c(s) < m_\nu(\Lambda) \le h_{1\Lambda} \le M_\nu(\Lambda)\} \\ G_3^\nu &= \{\Lambda\in T^\nu : h_{1\Lambda}-c(s) < m_\nu(\Lambda) \le M_\nu(\Lambda) < h_{1\Lambda}\} \\ G_4^\nu &= \{\Lambda\in T^\nu : m_\nu(\Lambda) \le h_{1\Lambda}-c(s) \le M_nu(\Lambda) < h_{1\Lambda}\} \\ G_5^\nu &= \{\Lambda\in T^\nu : m_\nu(\Lambda) \le H_{1\Lambda}-c(s) < h_{1\Lambda} \le M_\nu(\Lambda)\} \\ G_6^\nu &= \{\Lambda\in T^\nu : M_\nu(\Lambda) < h_{1\Lambda}-c(s)\} \end{aligned} \qquad (11)$$

а в случае $c(s)<0$ тор T^ν разлагается на следующие взаимонепересекающиеся множества:

$$\begin{aligned} Q_1^n u &= \{\Lambda\in T^\nu : h_{1\Lambda} > M_\nu(\Lambda)\} \\ Q_2^n u &= \{\Lambda\in T^\nu : h_{1\Lambda}-c(s) > M_\nu(\Lambda) \ge h_{1\Lambda} \ge m_\nu(\Lambda)\} \\ Q_3^n u &= \{\Lambda\in T^\nu : h_{1\Lambda}-c(s) > M_\nu(\Lambda) \ge m_\nu(\Lambda) > h_{1\Lambda}\} \\ Q_4^n u &= \{\Lambda\in T^\nu : M_\nu(\Lambda) \ge h_{1\Lambda}-c(s) \ge m_\nu(\Lambda) > h_{1\Lambda}\} \\ Q_5^n u &= \{\Lambda\in T^\nu : M_\nu(\Lambda) \ge h_{1\Lambda}-c(s) > h_{1\Lambda} \ge M_\nu(\Lambda)\} \\ Q_6^n u &= \{\Lambda\in T^\nu : m_\nu(\Lambda) > h_{1\Lambda}-c(s)\} \end{aligned}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\nu=1,2$. Если $g(s)>0$ и $c(s)>0$, тогда:*

1) *при $\Lambda\in G_k^\nu$, $k=\overline{1,3}$ существуют два связанных состояния оператора $H_\Lambda=H(\Lambda)$, причем одно из них минимально связанное, а второе максимально связанное;*

2) *при $\Lambda\in G_k^\nu$, $k=1,5$ существует единственное связанное состояние оператора $H_\Lambda=H(\Lambda)$, причем оно максимально связанное;*

3) *при $\Lambda\in G_6^\nu$ существуют два связанных состояния оператора $H_\Lambda=H(\Lambda)$, причем оба максимально связанные.*

Доказательство. В силу леммы 3.1 достаточно изучить нули функции $\Delta_\Lambda(z)$. Берем производную от функции $\Delta_\Lambda(z)$ по переменной z:

$$\Delta'_\Lambda(z) = -\frac{g(s)c(s)}{(h_{1\Lambda}-z)^2}\int_{T^\nu}\frac{dt}{h_{2\Lambda}-z} + g(s)\frac{h_{1\Lambda}-c(s)-z}{h_{1\Lambda}-z}\int_{T^\nu}\frac{dt}{(h_{2\Lambda}-z)^2}. \qquad (12)$$

1) Пусть $\Lambda\in G_1^\nu$. Тогда существуют числа α и β такие, что $\alpha<h_{1\Lambda}-c(s)$, $h_{1\Lambda}<\beta<m_\nu(\Lambda)$, $\nu=1,2$, причем $\Delta'_\Lambda(\alpha)=0$ и $\Delta'_\Lambda(\beta)=0$, т.е. α и β - критические точки функции $\Delta_\lambda(z)$. При $z\in(-\infty,\alpha)\cup(\beta,m_\nu(\Lambda))\cup(M_\nu(\Lambda),+\infty)$ выполняется неравенство $\Delta'_\Lambda(z)>0$, а при $z\in(a,h_{1\Lambda})\cup(h_{1\Lambda},\beta)$ выполняется неравенство $\Delta'_\Lambda<0$. С другой стороны из (8) получаем, что $\lim\limits_{z\to-\infty}\Delta_\Lambda(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\Delta_\Lambda(z)=1$, $\lim\limits_{z\to h_{1\Lambda}-0}\Delta_\Lambda(z)=-\infty$, а в силу леммы 3.2 имеем, что $\lim\limits_{z\to M_\nu(\Lambda)-0}\Delta_\Lambda(z)=-\infty$. Значит, функция $\Delta_\Lambda(z)$ сторого возрастает в интервале $z\in(-\infty,\alpha)$ от 1 до $\Delta_\Lambda(\alpha)$, в интервале $z\in(\beta,m_\mu(\Lambda))$ от $\Delta_\Lambda(\beta)$ до $+\infty$, в интервале $z\in(M_\nu(\Lambda),+\infty)$ от $-\infty$ до 1, строго убывает в интервале $z\in(\alpha,h_{1\Lambda})$ от $\Delta_\Lambda(\alpha)$ до $-\infty$, в интервале $z\in(h_{1\Lambda},\beta)$ от $+\infty$ до $\Delta_\Lambda(\beta)$. Отсюда следует, что функция $\Delta_\Lambda(z)$ имеет два нуля. Один из них лежит левее, а второй лежит правее от отрезка $[m_\nu(\Lambda),M_\nu(\Lambda)]$. Следовательно, в силу леммы 3.1 следует утверждение 1) теоремы. Аналогично исследуется поведение функции $\Delta_\Lambda(z)$, когда $\Lambda\in G_2^\nu$ и $\Lambda\in G_3^\nu$. Утверждения 2) и 3) теоремы 3.1 доказываются аналогично.

Теорема 3.2. *Пусть $\nu=1,2$. Если $g(s)<0$, $c(s)<0$, тогда:*

1) *при $\Lambda\in Q_k^\nu$, $k=\overline{1,3}$ существуют два связанных состояния, причем одно из них минимально связанное оператора H_Λ, а второе максимально связанное;*

2) *при $\Lambda\in Q_k^\nu$, $k=4,5$ существует единственное связанное состояние оператора H_Λ, причем оно минимально связанное;*

3) *при $\Lambda\in Q_6^\nu$ существуют два связанных состояния оператора H_Λ, причем оба минимально связанные.*

Доказательство теоремы 3.2. аналогично доказательству теоремы 3.1.

Теорема 3.3. *Пусть $\nu=1,2$. Тогда:*

1) *если $c(s)=0$ и $g(s)\neq 0$, то при любом $\Lambda\in T^\nu$, оператор H_Λ имеет единственное связанное состояние, причем при $g(s)>0(g(s)<0)$ оно максимально (минимально) связанное;*

2) *если $g(s)=0$, то при любом значении $\Lambda\in T^\nu$, у оператора H_Λ отсутствуют связанные состояния.*

Доказательство. Пусть $c(s)=0$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ имеет вид:

$$\Delta_\Lambda(z) = 1 + g(s)\int_{T^\nu}\frac{dt}{h_{2\Lambda}(t)-z} \qquad (13)$$

Берем производную от функции $\Delta_\Lambda(z)$:

$$\Delta'_\Lambda(z) = g(s)\int_{T^\nu}\frac{dt}{(h_{2\Lambda}(t)-z)^2} \qquad (14)$$

1) Отсюда видно, что при $g(s) > 0$ в интервале $]-\infty, m[$ функция $\Delta_\Lambda(z)$ возрастает от 1 до $+\infty$, а в интервале $]M, +\infty[$ возрастает от $-\infty$ до 1. Значить в $R\backslash[m_\nu(\Lambda), M_\nu(\Lambda)$ функция $\Delta_\Lambda(z)$ имеет единственный нуль z_0, причем, $z_0 > M_\nu(\Lambda)$. В силу леммы 3.1. оператор H_Λ имеет единственное связанное состояние, причем оно максимально связанное. При $g(s) < 0$ функция $\Delta_\Lambda(z)$ убывает в интервале $]M, +\infty[$ от до 1, а в интервале $]-\infty, m[$ убывает от 1 до $-\infty$. Значит функция $\Delta_\Lambda(z)$ имеет единственный нуль $z_0 \in]-\infty, m[$.

2) В случае $g(s) = 0$ имеем, что $\Delta_\Lambda(z) = 1\ \forall \Lambda \in T^\nu$, т.е. функция $\Delta_\Lambda(z)$ не имеет ни одного нуля. Отсюда следует доказательство теоремы.

Литература

1. Изюмов Ю.А., Медведев М.В. Магнитный поляроп в ферромагнитном кристале.// ЖЭТФ, 1970, 59, вып. 2, с. 553-560.
2. Абдуллаев Ш.И., Хаитов А. О связанных состояниях оператора энергии одномагнонной спин-поляронной системы.// Докл. АН РУз, 1992. No.8-9, с. 9-12.
3. Schrodinger E. Proc. Roy. Jrish. Acad. A. 48,49.1941.
4. Наймарк М.А. Нормирование кольца, "Наука", 1968. с.664.
5. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотика интегралов. М. Наука, 1977. с. 449.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. No.1, "Мир", М., 1977., с. 262.

Ташкентский институт
ирригации и мелиорации

Дата поступления
06.04.04

Uzbek Mathematical
Journal, 2004,№1,pp.15-22

УДК 517.98

Реализация вещественной O^*– алгебры в виде алгебры операторов, локально измеримых относительно вещественной алгебры фон неймана

Ш.А.Аюпов, Р.А.Дадаходжаев

Maqolada abstrakt bo'lgan haqiqiy O^*-algebrani haqiqiy fon Neyman algebrasiga biriktirilgan lokal o'lchovli operatorlar algebrasi sifatida ifodalanishi ko'rsatilgan.

The paper is devoted to representation of an abstract real O^*-algebra as an algebra of locally measurable operators affiliated with a real von Neumann algebra.

В работе *Т.А. Сарымсакова* и *М.Ш.Гольдштейна* [1] был предложен алгебраический подход к описанию пространства случайных величин в квантовой теории вероятностей. Ими было определено понятие частично упорядоченной инволютивной алгебры над полем комплекс- ных чисел, на множестве эрмитовых элементов которой возможно задание частичного порядка, согласованного с алгебраическими операциями. Такие алгебры были названы O^* -алгебрами. Позже была подробно изучена структура O^* -алгебр и установлена их связь с операторными алгебрами т.е. с C^* -алгебрами и алгебрами фон Неймана. Получены теоремы о реализации O^*-алгебр в виде алгебр измеримых неограниченных операторов в гильбертовом пространстве, присоединенных к алгебрам фон Неймана, которые в систематическом порядке изложены в монографии [2].

Теория C^*-алгебр и W^*-алгебр, как правило, рассматриваются над полем комплексных чисел. В последние годы заметно возрос интерес к вещественному аналогу этой теории. Так, в недавней монографии китайского математика *LiBing Rena*, было дано [3] систематическое изложение основ теории вещественных банаховых алгебр, вещественных C^*-, W^*-алгебр. В наших работах [4],[5] было введено понятие вещественной O^*-алгебры. Была исследована связь между вещественной O^*-алгеброй и ее комплексификацией, построены примеры вещественных коммутативных O^*-алгебр, у которых комплексификация не является O^*-алгеброй.

В настоящей работе мы построим примеры некоммутативных вещественных O^*– алгебр, элементами которых являются операторы (вообще говоря неограниченные), измеримые или локально измеримые относительно вещественной алгебры фон Неймана. Основным результатом работы является теорема о реализации абстрактной вещественной O^*-алгебры в виде алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к вещественной алгебре фон Неймана.

Вещественной алгеброй фон Неймана называется вещественная
* - алгебра Re ограниченных линейных операторов в комплексном гильбер- товом