



TIMMI

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ҚИШЛОҚ ВА СУВ ХЎЖАЛИГИ ВАЗИРЛИГИ**

ТОШКЕНТ ИРРИГАЦИЯ ВА МЕЛИОРАЦИЯ ИНСТИТУТИ

**«ГЛОБАЛЛАШУВ ШАРОИТИДА СУВ ХЎЖАЛИГИНИ
САМАРАЛИ БОШҚАРИШ МУАММОЛАРИ ВА
ИСТИҚБОЛЛАРИ»**

мавзусидаги халқаро илмий-амалий анжумани

МАҚОЛАЛАР ТЎПЛАМИ

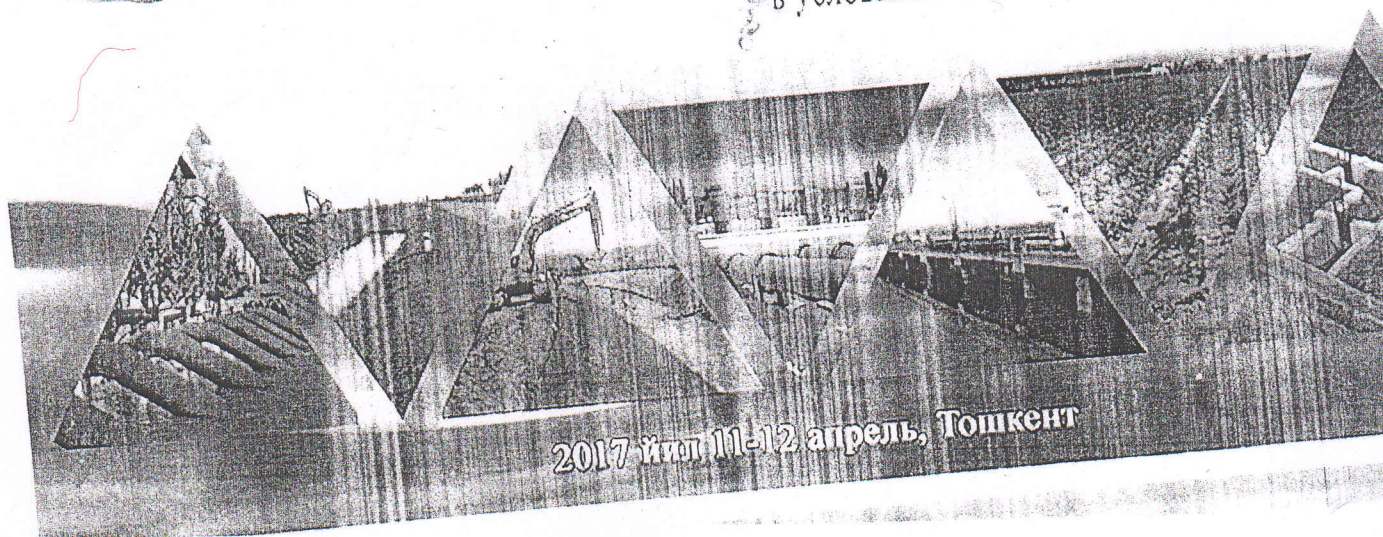
(1-қисм)



«Глобаллашув шароитида сув хўжалигини самарали бошқариш
муаммолари ва истиқболлари»
халқаро илмий-амалий анжуман

International scientific-practical conference
«The problems and perspectives of effective management of water econ
in conditions of globalization»

Международная научно-практическая конференция
«Проблемы и перспективы эффективного управления водного хозяй
в условиях глобализации»



2017 йил 11-12 апрель, Тошкент

2. Заитов А.А. Слабо аддитивные функционалы на топологических пространствах. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Т.: Институт математики. 2010 г.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

М.Юсупов, Ш.Айнакулов (ТИИМ)

Особую роль играют задачи на собственные значения, что дает возможность хорошо проследить их характерные свойства для дифференциальных уравнений при любых граничных условиях, которые описывают различные задачи прикладной механики.

Данная работа посвящена численной реализации алгоритма решения спектральных задач прикладной механики на основе метода дифференциальной прогонки для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольными граничными условиями.

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} L[u] - \lambda mu = 0 \\ l_1[u(x)] = 0 \text{ при } x = a; b \\ l_2[u(x)] = 0 \text{ при } x = a; b \end{cases} \quad (1)$$

где $L[u] = \frac{d^4 u}{dx^4} + a_1(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + a_2(x) \frac{du}{dx} + a_3(x) u$; λ – собственное число; l_1 и l_2 – операторы, характеризующие граничные условия для спектральных задач.

Ищется значение параметра λ , для которого существует некоторая тождественно не равная нулю функция $u(x)$, удовлетворяющая всем краевым условиям и дифференциальному уравнению. Для определения собственных значений и функции используем метод Коха [1], согласно которому краевая задача (1) сводится к последовательному решению неоднородных краевых задач и нахождению собственных чисел λ_k , а также ортонормированных собственных функций u_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, что осуществляется следующим образом:

$$\begin{cases} L[u_{ik}^*] = \lambda_k m u_{ik}^* \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ l_1[u_{ik}^*] = 0 \text{ при } x = a; b \\ l_2[u_{ik}^*] = 0 \text{ при } x = a; b \end{cases} \quad (2)$$

где

$$u_{ik} = u_{ik}^* - \sum_{n=1}^{i-1} c_n^{(i,k)} u_n$$

$$c_n^{(i,k)} = (u_{ik}^*, m u_{i,k-i}) = \int_a^b \int_B m u_{ik}^* u_i dx dy, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Коэффициенты Шварца вычисляются так:

$$\mu_{k+1}^{(i)} = \frac{a_k^{(i)}}{a_{k-1}^{(i)}} = \frac{(u_{i,q}, m u_{i,k-q})}{(u_{i,q}, m u_{i,k-q+1})}, \quad 0 \leq q \leq k.$$

Проверяется условие:

$$\left| \frac{\mu_k^{(i)} - \mu_{k-1}^{(i)}}{\mu_{k-2}^{(i)}} \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Если оно выполняется при $k = k_{i,q}$, то за собственные значения и функцию принимаются соответственно:

$$\mu_{k_1}^{(0)} = \lambda_1 = \omega_1^2, \quad u_2 = \frac{u_{1k_1}}{\sqrt{(u_{1k_1} m_{1k_1})}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Применение метода Коха непосредственно к исходной однородной краевой задаче (1) сводит к последовательному решению неоднородной краевой задачи (2) той же размерности, что и исходная. Это в свою очередь порождает определенные трудности, связанные с проблемой точности решения неоднородной краевой задачи (2) на каждом шаге итерации, что по-видимому является главной причиной неширокого использования этого метода для решения дифференциальной проблемы собственных значений, хотя теоретическое обоснование сходимости итерационного процесса есть при любом выборе начального приближения u_{10} . Преодоление этих трудностей в предлагаемом подходе осуществляется в одномерном случае – непосредственным использованием метода дифференциальной прогонки [2, 3].

Краевую задачу (2) запишем в нормальной форме для использования матричного варианта метода дифференциальной прогонки следующим образом:

$$(u_{1k}''(x))'' - \frac{M_{1k}(x)}{a_1(x)} = 0$$

$$M_{2k}''(x) + \frac{a_2(x)}{a_1(x)} M_{1k}(x) + a_3(x) u_{1k}(x) + a_4(x) u_{2k}(x) = m(x) u_{1k-1}(x)$$

или

$$y_{1k}''(x) + A(x)y_{1k}(x) + B(x)y_{2k}(x) = F_{1k-1}(x) \quad (4)$$

где

$$y_{1k}(x) = \begin{bmatrix} u_{1k}(x) \\ M_{1k}(x) \end{bmatrix}, \quad F_{1k-1}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ m(x)u_{1k-1}(x) \end{bmatrix},$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{a_2(x)}{a_1(x)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{a_1(x)} \\ \frac{a_3(x)}{a_1(x)} & \frac{a_4(x)}{a_1(x)} \end{bmatrix}$$

В общем случае произвольные граничные условия можно записать в виде:

$$G^{(x)} y_{1k}(x) + D^{(x)} y_{2k}(x) = E^{(x)} \quad \text{при } x = a; b \quad (5)$$

где $G^{(x)}$, $D^{(x)}$, $E^{(x)}$ – двумерные матрицы и векторы граничных условий, формируемые в зависимости от заданных граничных условий, например, если $u_{1k}(x) = M_{1k}(x) = 0$ при $x = a$, $x = b$, то:

$$G^{(0)} = G^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{(0)} = D^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{(0)} = E^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Согласно матричному варианту метода дифференциальной прогонки, решение системы (4) ищется в виде:

$$\alpha(x)y_{1k}(x) + \beta(x)y_{2k}(x) = \gamma(x),$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – двумерные матрицы и векторы прогоночных коэффициентов, элементы которых находятся из решений следующей задачи Коши (прямой ход решений):

$$\begin{cases} \alpha_{ij}(x) = \alpha_{i1}\alpha_{1j} + \alpha_{i2}\alpha_{2j} - \beta_{ij} \\ \beta_{ij}(x) = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} \\ \gamma_{ij}(x) = \alpha_{i2}m(x)u_{1k-1}(x) \end{cases} \quad (6)$$

$$\alpha_{ij}(a) = g_{ij}^{(a)}, \quad \beta_{ij}(a) = d_{ij}^{(a)}, \quad \gamma_i(a) = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (7)$$

Решив задачу Коши (6), (7) можно найти:

$$y_{ik}(b) = \frac{G^{(b)} \gamma(b)}{G^{(b)} \beta(b) - D^{(b)} \alpha(b)}$$

$$y'_{ik}(b) = - \frac{D^{(b)} \gamma(b)}{G^{(b)} \beta(b) - D^{(b)} \alpha(b)} \quad (8)$$

Решая уравнения (4) при начальных условиях (8), находим искомое решение $u_{ik}(x)$, $x \in [a, b]$ (обратный ход решения).

Решение соответствующих задач Коши можно осуществить методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

На основе выше изложенного алгоритма решения спектральных задач, составлена программа и реализована на персональном компьютере. Рассмотрим численную реализацию алгоритма предложенного метода для решения одномерной спектральной задачи о свободных колебаниях элементов как постоянной, так и переменной толщины. В качестве примера рассмотрим стержень переменного сечения шарнирно закрепленный по краям. Если перейти к безразмерным координатам $x = a_0 \bar{x}$, $\lambda = \frac{\omega^2 m_0}{EI_0}$, $m = m_0 \bar{h}(x)$, $I_0 = \frac{\pi a^4}{12}$, $a_1(x) = h^3(x)$, $a_2(x) = a_3(x) = a_4(x) = 0$, то краевая задача (4), (5) примет вид:

$$(u_{ik}(x))' - M_{ik}(x) = 0, \quad M'_{ik}(x) = \lambda u_{ik-1}(x)$$

$$u_{ik}(x) = 0 \text{ и } M_{ik}(x) = 0 \text{ при } x = 0; 1.$$

Тестирование программы осуществлялось при решении задачи о свободных колебаниях стержня постоянного сечения, для которой известны точные собственные формы $u_i(x) = \frac{\sin i\pi x}{\sqrt{2}}$ и собственные числа $\lambda_i = \omega^2 = (i\pi)^4$.

Результаты расчета первых трех значений безразмерной частоты, соответствующие ортонормированным собственным функциям по точным решениям и решениям, полученным предложенными методами, приведены соответственно в таблицы 1 и 2.

Совпадение частоты и соответствующих им формы колебаний свидетельствует о точности предлагаемого метода расчета. Расчеты показали, что критерии сходимости (3) оказались достаточными не только для вычисления частоты, но и соответствующих им форм колебаний.

Таблица 1.

	λ_1	λ_2	λ_3
Точное	97.4091	1558.5454	7890,1363
Приближенное	97.4091	1558.5485	7890,1423

Таблица 2

x	1- собственные функции		2- собственные функции		3- собственные функции	
	точное	прибл.	точное	прибл.	точное	прибл.
0,0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0,1	0.4370	0.4370	0.8312	0.8300	1.1441	1.1474
0,2	0.8312	0.8312	1.3449	1.3432	1.3449	1.3448
0,3	1.1441	1.1441	1.3449	1.3434	0.4370	0.4336

0,4	1.3449	1.3449	0.8313	0.8303	-0.8312	-0.8381
0,5	1.4142	1.4142	0.0000	-0.0006	-1.4142	-1.4105
0,6	1.3449	1.3449	-0.8313	-0.8322	-0.8312	-0.8372
0,7	1.1441	1.1441	-1.3449	-1.3465	0.4370	0.4338
0,8	0.8312	0.8312	-1.3449	-1.3468	1.3449	1.3450
0,9	0.4370	0.4370	-0.8312	-0.8325	1.1441	1.1468
1,0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Таким образом, предложенный подход оказался эффективным для решения спектральных задач. Предлагаемые вычислительные алгоритмы и соответствующее программное обеспечение позволяют проводить расчеты для определения собственных значений и их форм для широкого класса несущих конструкций.

Данный подход решения спектральных задач можно применять в учебном процессе направления образования «Автоматизация и механизация водного хозяйства».

Использованная литература

1. Коллатц А. Задачи на собственные значения. М. Наука, 1968.
2. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент, Мехнат, 1987.
3. Юсупов М. Об одном подходе к решению нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка. Сборник тезисов конференции «Интегральные уравнения - 2009», стр.157-159, Киев, 26-29 января 2009г.

ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРОНИЦАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Комилова Х.М., Сафарбаева Н.М. (ТИИМ)

Известно, что интерес к изучению движения жидкости в трубе с проницаемыми стенками вызван потребностью техники орошения. В результате выполнения данного исследования приводит к разработке прогрессивным способом орошения, в частности внутрпочвенного и капельного.

Для решения поставленной задачи рассмотрим движение вязкой жидкости при учете расхода через пористости стенок и гидравлического сопротивления, пропорционального первой степени расхода [1],

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - dQ, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = k(t)(p - p_c); \quad (2)$$

здесь Q – расход жидкости по сечению трубы, (m^3/c); S – площадь поперечного сечения трубы, (m^2); $k(t)$ -функция, характеризующая проницаемость среды;

p , p_c – соответственно давление жидкости в трубе и давление внешней среды

Начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи

При $t=0$ $Q=0$;

При $x=0$ ($t > 0$) $Q = Q_0 = const$, (3)

$p = p_0 = const$

$\alpha = 32 \frac{\mu}{\rho g \sigma^2} (l - \text{длина трубы, } (m^3/c); d - \text{диаметр, } (m)).$