ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛЛАРИ

Маълумки, баъзи бир объектларни математик моделлаштиришда жисм сирти ва ҳажмини, жисм оғирлик маркази ва инерция моментини, бирор куч таъсирида бажарилаган иш миқдорини аниқлашга тўғри келади. Бу катталиклар эса берилган функцияни бирор оралиқда аниқ интеграллашга келтирилади. Шу билан бирга қаралаётган

масаланинг хусусиятига боғлиқ равишда интеграл остидаги функция шундай кўринишни оладики, натижада уни аниқ интеграллаш имкони ҳар доим ҳам мумкин бўлавермайди. Бу ҳолда интегрални тақрибий ҳисоблашга тўғри келади. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашнинг бир неча усуллари мавжуд. Шу усуллардан айримлари билан танишиб чиқамиз.

Масаланинг қуйилиши. $[a;b]$ ораликда аниқланган узлуксиз $f(x)$

функция бўлиб қуйидаги $I=\int_a^b f(x)dx$ (3.1)

интегрални берилган ε аниқликда ҳисоблаш талаб қилинсин.

Олий математика курсидан маълумки, агар $f(x)$ функция $[a;b]$

ораликда берилган бўлиб, $f(x)\geq 0$ бўлса, у ҳолда (3.1) аниқ

Интеграл $x=a$ $y=f(x)$

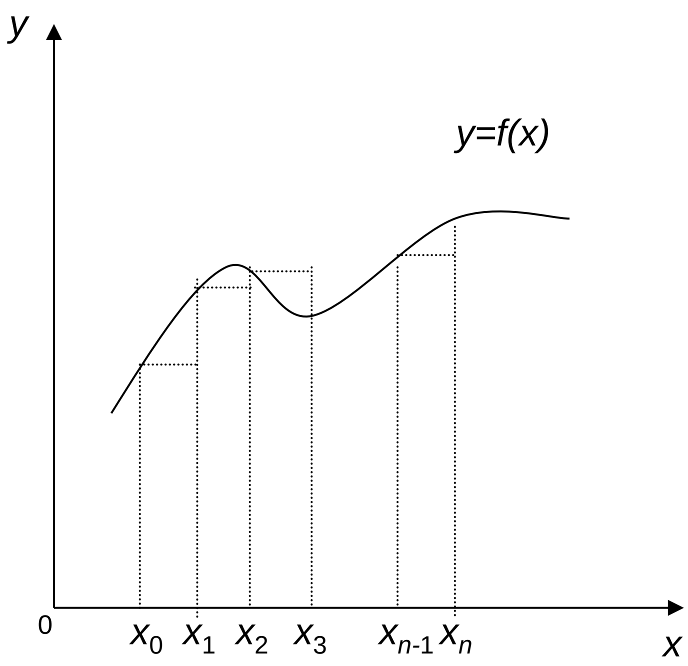
чизиқлар ва абцисса ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзасини ифодалайди. қуйида берилган (3.1) аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун бир неча сонли тақрибий усулларини келтирамиз.

3.1. Тўғритўртбурчак усули

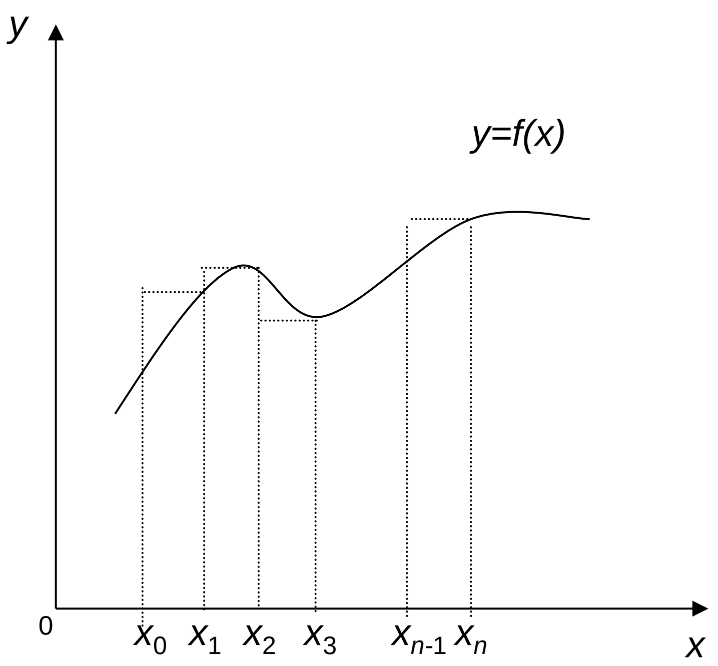
- Берилган $[a;b]$ оралиқни $h=\frac{b-a}{n}$ қадам билан $n+1$ та оралиқга бўламиз. ҳосил бўлган оралиқларда жойлашган эгри чизиқли трапеция юзаларини тақрибий равишда тўғритўртбурчак юзига алмаштирамиз (3.1 ва 3.2 расмлар). Натижада (3.1) интегрални тақрибий ҳисоблаш учун қуйидаги
$S=h\sum_{i=0}^{n-1} y_i,\qquad Q=h\sum_{i=1}^{n} y_i$
- формулаларни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$x_i = x_{i-1}+h \quad y_i = f(x_i) \quad i=1,2,\dots,n$$

$$x_0 = a \quad x_n = b \quad n$$ – натурал сон.



3.1-расм



3.2-расм

Тўғритўртбурчак усули учун хатолик қуйидагича аниқланади:

$$\left|I - S\right| < Mh(b-a) \quad M = max\left|f^{/}(z)\right| \quad z \in \left[a;b\right]$$

Мисол. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ **интегрални тўғритўртбурчак усули ёрдамида тақрибий ҳисобланг ва натижани интегралнинг аниқ қиймати** $arctg1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$

билан таққосланг.

- **Ечиш.** Аниқлик Тўғритўртбурчак усули учун хатолик қуйидагича аниқланади:
- Учун $n = 10$ $\Delta x = 0{,}1$ $x_k = k \cdot 0{,}1$ деб олиб, интеграл остидаги функция қийматини аниқликда ҳисоблаймиз:

$y_0 = 1$, $y_1 = \frac{1}{1+(0{,}1)^2} \approx 0{,}990$, $y_2 = \frac{1}{1+(0{,}2)^2} \approx 0{,}962$, $y_3 = \frac{1}{1+(0{,}3)^2} \approx 0{,}917$, $y_4 \approx 0{,}862$,

$y_5 = 0{,}800$, $y_6 \approx 0{,}735$, $y_7 \approx 0{,}671$, $y_8 \approx 0{,}610$, $y_9 \approx 0{,}552$, $y_{10} = 0{,}500$, У ҳолда берилган интегралнинг тақрибий қиймати учун

$$S = 0{,}1 \cdot (1 + 0{,}990 + 0{,}962 + 0{,}917 + 0{,}862 + 0{,}800 + 0{,}735 + \\ + 0{,}671 + 0{,}610 + 0{,}552) \approx 0{,}810$$

$$Q = 0{,}1 \cdot (0{,}990 + 0{,}962 + 0{,}917 + 0{,}862 + 0{,}800 + 0{,}735 + 0{,}671 + \\ + 0{,}610 + 0{,}552 + 0{,}500) \approx 0{,}755$$

Уларга эга бўламиз, яъни 0,755<0,785<0,810. Бу ерда интегрални тақрибий ҳисоблашда йўл қуйилган абсолют хато $|I - S| < 0{,}028$ дан ошмаслигини ва нисбий хато эса $\frac{0{,}028 \cdot 100}{0{,}782} \approx 3{,}6\%$ га тенглигини кўришимиз мумкин.

Аниқ интегрални тўғритўртбурчак усулида ҳисоблаш учун Паскал тилида тузилган дастур матни:

```
program turt_burchak; uses crt;
var a,b,int:real; n:integer;
function f(x:real):real;
begin
```

- *h1:=(b1-a1)/n1;*
- *c:=0; int1:=0; c:=a1-h1/2;*
- *for i:=1 to n1 do*
- *beginc:=c+h1; int1:=int1+f(c)*
- *end;*
- *int1:=int1*h1;*
- *end;*
- *begin clrscr;*
- *read(a,b,n);*
- *turtburchak(a,b,n,int);*
- *writeln('Интеграл =',int:10:4);*
- *end.*

Мисол. $\int_1^3 (x^3 - x^2 + 5)e^{-2x}\sin(x+1)dx$ интегрални тўртбурчак усулига тузилган дастур ёрдамида тақрибий ҳисоблан $n=50$ олинг).

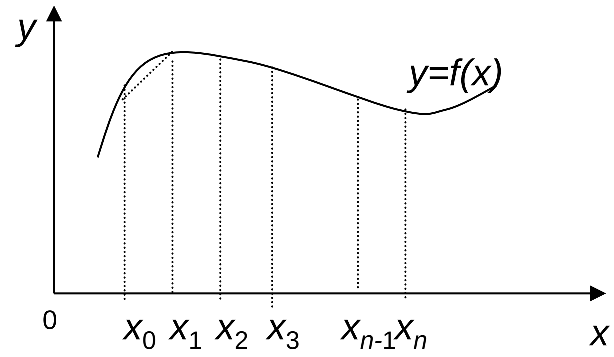
Жавоб: Интегрални тақрибий қиймати 0,2002. Интегрални тақрибий қиймати 0,2002.

3.2. Трапеция усули

- $[a;b]$ оралиқ $x_i = a + i \cdot h$ нўқталар билан (бу ерда $i = 1,2,\ldots,n;$ $x_0 = a,$
- $x_n = b$ n - натурал сон) $n+1$ та оралиқга ажратилади ва ҳар бир оралиқда эгри чизиқли трапеция юзи тақрибий равишда тўғри чизиқли трапеция юзига алмаштирилиб (3.3-расм), қуйидаги тақрибий формулани ҳосил қиламиз

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = S$$

- бу ерда -(3.1) интегралнинг аниқ қиймати, -(3.1) интегралнинг тақрибий қиймати, $y_i = f(x_i)$



3.3-расм

- Хатоликни баҳолаш:

- $\left|I - S\right| = R \le \frac{h^2}{12}(b-a)M, M = max\left|f^{//}(z)\right|, \quad z \in [a;b]$

Мисол. $I = \int_0^{\pi} sin\, xdx$ интеграл қийматини $n = 6$ учун трапеция усулидан фойдаланиб тақрибий ҳисобланг.

Ечиш.

$$S = \frac{\pi}{6}\left(\frac{sin\,0 + sin\,\pi}{2} + sin\frac{\pi}{6} + sin\frac{2\pi}{6} + sin\frac{3\pi}{6} + sin\frac{4\pi}{6} + sin\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(0{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 0{,}5\right) \approx 1{,}9541$$

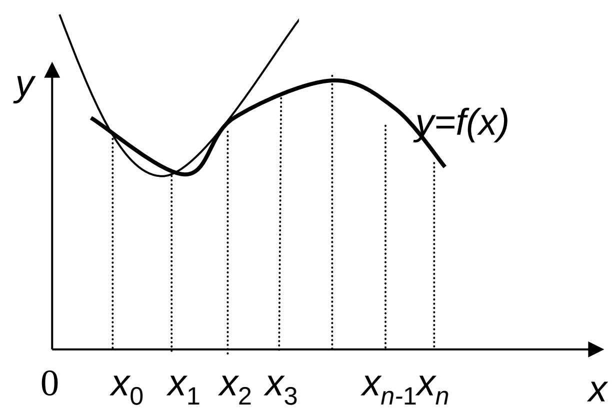
Агар берилган интегралнинг аниқ қиймати 2 га тенглигини ҳисобга олсак, йўл қуйилган абсолют хато 0,0459 га, нисбий хато эса $\frac{0{,}0459\cdot 100}{2}\approx 2{,}5\,\%$ га тенглигини кўрамиз.

Аниқ интегрални трапеция усулида ҳисоблаш учун Паскал тилида тузилган дастур матни:

```
program trapesiya; uses crt;
var n1:integer; a,b,i1:real;
function f(x:real):real;
begin
 f:=x*exp(-x*ln(2))*cos(x*x+1)
{ f(x) функциянинг кўриниши }
end;
procedure trap1(a1,b1:real;N:integer; var int:real);
var i:integer; h,s:real;
begin h:=(b1-a1)/n; s:=(f(a1)+f(b1))/2;
```

3.3. Симпсон усули

- $[a;b]$ оралиқда аниқланган узлуксиз $f(x)$ функция бўлиб қуйидаги $I=\int_a^b f(x)dx$ интегрални берилган ε аниқликда тақрибий қийматини ҳисоблаш талаб $[a;b]$ оралиқни $h=\dfrac{b-a}{2n}$ қадам билан
- $2n$ оралиққа ажратайлик (3.4- расм).
- $x_0=a$, $x_{2n}=b$, $y_i=f(x_i)$, $i=1,2,...,2n$, n - натурал сон бўлсин.



3.4-расм

- Узунлиги $2h$ га тенг бўлган $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$,…., $[x_{2n-2}, x_{2n}]$
- оралиқлар учун

$$\int_{x_0}^{x_2} y(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

- Симпсон формуласини қўллаймиз. Натижада интегрални тақрибий ҳисоблаш учун

$$\int_a^b y(x)dx \approx S = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) + \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) + \ldots + \frac{h}{3}\left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

- Ёки

$$\int_a^b y(x)dx \approx S = \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_{2n}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}\right)\right]$$

- формулага эга бўламиз. Бу формула интегрални тақрибий ҳисоблаш учун умумлашган Симпсон формуласи деб аталади. Охирги формулани

$$S = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2n} + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right)$$

- кўринишда ёзиш ҳам мумкин. Симпсон усулида йўл қўйилган хатолик

$R \le \frac{(b-a)h^4}{180} \cdot M$, $M = max\left| f^{IV}(z) \right|$, $z \in [a,b]$, тенгсизлик ёрдамида баҳоланади.

Мисол. Дарё кенглиги 20 метрга тенг. Дарё чуқурлиги кўндаланг кесими бўйича ҳар 2 метр ораликда ўлчаб чиқилди. Ўлчаш натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган.

x (метр)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
(метр)	0,2	0,5	0,9	1,1	1,3	1,7	2,1	1,5	1,1	0,6	0,2

Дарё кўндаланг кесими юзасини трапеция ва Симпсон формулалари ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. Трапеция формуласи бўйича:

$$S = 2\left(\frac{0,2+0,2}{2} + 0,5 + 0,9 + 1,1 + 1,3 + 1,7 + 2,1 + 1,5 + 1,1 + 0,6\right) = 22 м^2$$

Симпсон формуласи бўйича:

$$S = \frac{2}{3}\left(0,2 + 4\cdot 0,5 + 2\cdot 0,9 + 4\cdot 1,1 + 2\cdot 1,3 + 4\cdot 1,7 + 2\cdot 2,1 + 4\cdot 1,5 + \right.$$
$$\left. + 2\cdot 1,1 + 4\cdot 0,6 + 0,2\right) = 21,9 м^2$$

- Аниқ интегрални Симпсон усулида ҳисоблаш учун Паскал тилида тузилган дастур матни:
- *program simpson; uses crt;*
- *var a,b,int1:real; n:integer;*
- *function f(x:real):real;*
- *begin*
- *f:=(x+3)*exp(x)*sin(x*x*x)   { f(x) функциянинг кўриниши }*
-

```
procedure simps(a,b:real;n:integer;var int:real);
       var h,s,s1,s2:real; i:integer;
          begin  h:=(b-a)/(2*n);
                     s1:=0; s2:=0;  s:=f(a)+f(b);
                     for i:=1 to n do s1:=s1+f(a+(2*i-1)*h);
                    for i:=1 to n-1 do s2:=s2+f(a+2*i*h);
                    int:=h*(s+4*s1+2*s2)/3;
          end;
    begin      clrscr;
                      write('a='); read(a);   write('b='); read(b);
                 write('n='); read(n);   simps(a,b,n,int1);
                 writeln('integral=',int1:10:4);
    end.
```

Мисол. интегрални Симпсон усулига тузилган дастур ёрдамида тақрибий ҳисобланг (*n*=40 деб олинг).

Жавоб: Интегрални тақрибий қиймати *1,9975.*

Агар биз юқорида келтирилган тақрибий ҳисоблаш формулалари аниқлиги ҳақида гапирадиган бўлсак, бу ерда энг юқори аниқликга эга бўлган усул – Симпсон усулидир. Ундан кейинги аниқроқ усул эса – трапеция усули. Тўғритўртбурчак усули эса бу усуллар орасида энг катта хатоликка йўл қўйиладиган усул ҳисобланади.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $\int_0^1 (2x^2 - 4x + 2)dx$ интеграл қийматини $n=5$ учун тўғри тўртбурчак усули ёрдамида тақрибий ҳисобланг.
2. $\int_0^1 (5x^2 - 6x + 1)dx$ интеграл қийматини $n=10$ учун тўғри тўртбурчак усули ёрдамида тақрибий ҳисобланг.
3. $\int_0^1 (x^2 - x + 1)dx$ интеграл қийматини $n=10$ учун трапеция усули ёрдамида тақрибий ҳисобланг.