

7.4. Транспорт масаласи ва уни потенциаллар усулида ечиш

Юк захиралари a_1, a_2, \dots, a_m бўлган m та жўнатиш пункти, юкка бўлган талаб b_1, b_2, \dots, b_n бўлган n та қабул пунктлари берилган бўлиб, жўнатиш пунктларидан қабул пунктларига бирлик юкни ташиш ҳаражатлари $c_{ij}, i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$ бўлсин. Бу ерда i - жўнатиш пункти номери, j - қабул пункти номерини билдиради. Умумий юк ташиш ҳаражатлари

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

формула орқали берилади. Бу ерда X - J номерли жўнатиш пунктидан J номерли қабул пунктига ташиладиган юк ҳажми. Юк ташиш ҳаражатларини иложи борича камайтириш учун функцияни минимумга интилтирамиз:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (7.9)$$

Юқоридаги масала жадвал кўринишида қуйидагича ифодаланади:

қабул пунктлари Жўнатиш пунктлари	1	2	...	n	Юк захиралари
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	...	b_n	

Юк ташишнинг шундай ташкил этиш керакки, жўнатиш пунктларидаги барча юк олиб чиқиб кетилиши ва қабул пунктларидаги юкка бўлган талаб тўлиқ қондирилиши керак:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m \end{array} \right. \quad (7.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n \end{array} \right. \quad (7.11)$$

Агар

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

муносабат бажарилса, транспорт масаласи ёпиқ масала дейилади ва масалани ечишга киришиш мумкин. Агар (7.12) шарт бажарилмаса, масала очиқ дейилади. Очиқ масалани ечиш учун у ёпиқ масалаги келтирилади. Масалан, бўлган талаби бўлган қўшимча қабул пункти бўлади, Ушбу пункт учун бирлик юкни ташиш харажатларини 0 га тенг деб оламиз: . Натижада қуйидаги ёпиқ масалани ҳосил қиламиз.

$$C_{1,n+1} = C_{2,n+1} = \dots = C_{m,n+1} = 0$$

қабул пунктлари Жўнатиш пунктлари	1	2	...	n	$n+1$	Юк захиралари
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	0 x_{1n+1}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	0 x_{2n+1}	a_2
...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	0 x_{mn+1}	a_m
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	...	b_n	b_{n+1}	

Агар $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ бўлса, юк захиралари $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ бўлган

қўшимча жўнатиш пункти тузилади ва юқоридаги каби ёпиқ масалаги келтирилади.

Транспорт масаласини ечиш икки босқичда олиб борилади:

1) Биринчи босқичда (7.10)-(7.11) шартларни қаноатлантирувчи бошланғич $x_{ij}, i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ ечим топилади. Бошланғич режани топишнинг бир неча усуллари бўлиб, уларга шимоли-шарқ усули, минимал элемент усули ва бошқалар киради. Шимоли-шарқ усулида (1,1) каттак танлаб олиниб, $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ деб олинади. Агар $\min(a_1, b_1) = a_1$ бўлса, бу 1-

жўнатиш пунктидаги барча юк 1 –қабул пунктига юборилишини, 1-жўнатиш пунктидан қолган қабул пунктларига юк юборилмаслигини билдиради. Шунинг учун жойлашган сатрдаги бошқа катакларга минус қўйилади. 1- қабул пунктидаги юкка бўлган талаб бўлиб қолади. Агар $b_1^1 = b_1 - 0$ бўлса, 1- қабул пунктидаги юкка бўлган талаб тўлиқ қондирилганлигини, 1-жўнатиш пунктида эса миқдор юк қолганлигини билдиради. 1- қабул пунктига бошқа жўнатиш пунктларидан юк келтирилмайди.

1-жадвал



қабул пунктлари	1	2	...	n	Юк захиралари	
Жўнатил пунктлари						
1	c_{11} x_{11}	c_{12} —	...	c_{1n} —	a_1	0
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2	
...	
n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nn}	a_n	
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	...	b_n		

2-жадвал

қабул пунктлари Жўнатиш пунктлари	1	2	...	n	Юк захиралари	
1	c_{11} x_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1	a_1'
2	c_{21} —	c_{22}	...	c_{2n}	a_2	
...	
m	c_{m1} —	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m	
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	...	b_n		
	0					

Хисоблашларни 1-жадвал бўйича давом эттириб, (2,1) кататка ўтамыз. бўлсин. Жадвални юқоридаги усул билан тўлдириб, қуйидагини ҳосил қиламыз

:

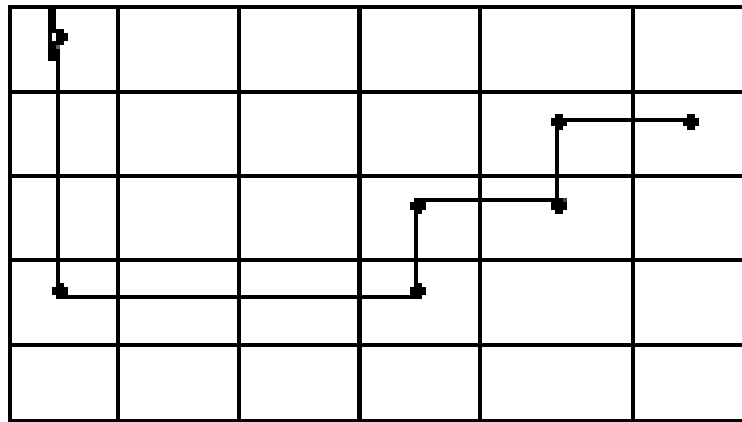
қабул пунктлари Жўнатилш пунктлари	1	2	...	n	Юх захиралари	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} -	...	c_{1n} -	a_1	0
2	c_{21} x_{12}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2	a_2^1
...	
m	c_{m1} -	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m	
Юхка бўлган талаб	b_1	b_2	...	b_n		
	b_1^1					
	0					

Шу тариқа ҳисоблашларни жадвалнинг қуйи ўнг бўрчагигача давом эттириб, x_{ij} жадвалдаги барча ларни аниқлаймиз. Бунда (7.10)-(7.11) шартлар бажарилиши керак.

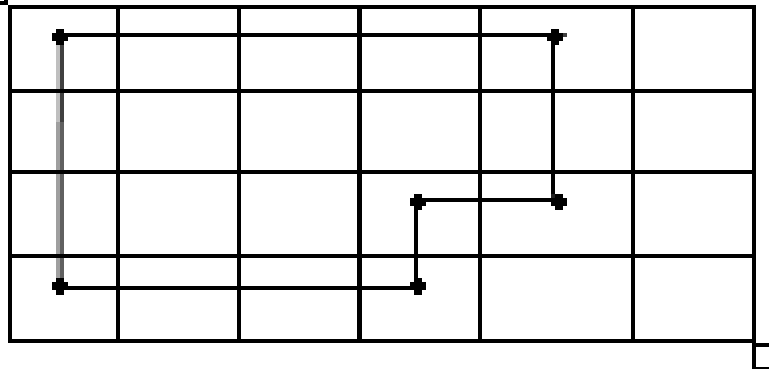
Масаланинг иккинчи босқичида бошланғич режа асосида (7.9) шартни қаноатлантирувчи оптимал ечим топилади. Оптимал ечимни топишнинг потенциаллар, тақсимот каби бир неча усуллари мавжуд бўлиб, биз потенциаллар усулини қараб чиқамиз. Ушбу усулни қарашдан олдин ҳисоблаш жараёнида ишлатиладиган айрим тушунчалар билан танишамиз. Жадвалдаги ихтиёрий нуқталар тўплами набор дейилади.

•					
		•		•	•
			•		
	•				
					•

Наборни ташкил қилувчи нуқталар ҳар бир қаторда иккитадан ошиб кетмаса, бундай набор занжир дейилади.



Агар закрит қавр бўлса, у цикл дейилади.



Агар жадвалдаги та нуқталар тўплами цикл ташкил қилмаса, уларга битта нуқта қўшиш орқали цикл ҳосил қилсак, бундай та нуқталар тўплами ациклик режани ташкил қилади дейилади.

Агар транспорт масаласида бўлса, катак белгиланган катак дейилади.

$$x_{ij} > 0 \quad (i,j)$$

Агар транспорт масаласида барча катаклар учун (7.12) шартни, белгиланган катаклар учун эса шартни қаноатлантирувчи сонлари мавжуд бўлса, режа оптимал бўлади. $v_j - u_i$ сонлари эса потенциаллар дейилади. $i=1,2,\dots,n; u_i, i=1,2,\dots,m$

Транспорт масаласини потенциаллар усулида ечиш қўйидаги тартибда бажарилади:

- 1) Белгиланган катаклар учун $y_j - u_i = c_{ij} \quad v_j, j=1,2,\dots,n; \quad u_i, i=1,2,\dots,m$ шартни қаноатлантирувчи тенгламалар системаси тузилади. Бунда тенгламалар сони ўзгарувчилар сонидан битта кам бўлгани учун система чексиз кўп ечимга эга бўлади. Системанинг битта хусусий ечимини топиб потенциалларнинг қийматини аниқлаймиз;
- 2) Белгиланмаган катаклар учун шартни текшираемиз. Агар ушбу шарт барча катаклар учун бажарилса, оптимал ечим топилган ҳисобланади ва функция қиймати ҳисобланади;
- 3) Агар шарт бир ёки бир неча катаклар учун бажарилмаса, Ушбу катаклар учун айри-айри ҳисобланади ва топилади;
- 4) катак белгиланган катаклар қаторига қўшилади $\delta_{ij} = \max \delta_{ij}$ ва белгиланган катаклардан цикл тузилади;
- 5) катакдан бошлаб циклни ташкил қилувчи катакларга "–" ва "+" ишоралари навбат билан қўйилиб чиқилади;
- 6) "–" ишорали катаклар учун ни аниқлаймиз;
- 7) "- " ишорали катаклардан θ ни айриб, "+" ишорали катакларга ни қўшамиз;
- 8) жойлашган катакни белгиланган катаклар қаторидан чиқазамиз.

Натижада янги планни ҳосил қиламиз ва бу план учун (1)-(7) амалларни такрорлаймиз. Юқоридаги ҳисоблашлар барча катаклар учун шарт бажарилиб, оптимал план топилгунча давом эттирилади.

Куйидаги мисолни қараймиз:

Транспорт масаласи куйидаги жадвал кўринишида берилган бўлиб, уни потенциаллар усули билан ечамиз.

қабул пунктлари Жўнатилган пунктлари	v_j u_i	1	2	3	4	Юк закиралари
		v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2	4	6	10	90
2	u_2	1	3	7	4	100
3	u_3	4	8	13	7	140
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330

Бошланғич планни тузиш учун шимоли-шарқ усулидан фойдаланамиз. (1,1) катакка мос захира ва талабнинг кичигини деб оламиз $x_{11} = 90$

қабул пунктлари Жўнатилш пунктлари		қабул пунктлари				Юк захиралари	
		1	2	3	4		
		v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	
		u_i					
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0
2	u_2	1	3	7	4	100	
3	u_3	4	8	13	7	140	
Юкка бўлган талаб			110	100	80	40	330
			20				

Юқоридаги жадвалга кўра 1-жўнатиш пунктидан 1-қабул пунктига 90 бирлик юк юборилади, 1-жўнатиш пунктида бошқа юк қолмайди, шунинг учун 1-жўнатиш пунктидан бошқа қабул пунктларига юк ташилмайди, 1- қабул пунктига яна 30 бирлик юк келтириш керак. (2,1) катакка ўтиб, шу катакка мос талаб ва захираларнинг кичигини $x_{21} = 20$ деб оламиз.

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">+</div> қабул пунктлари Жўнатиш пунктлари						Юк захиралари	
		1	2	3	4		
		u_j	v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0
2	u_2	1 20	3	7	4	100	80
3	u_3	4 -	8	13	7	140	
Юкка бўлган талаб			110	100	80	40	330
			20				
			0				

(2,3) катакка ўтиб, юқоридаги қонда $x_{23} = 80$ ни аниқлаймиз.

қабул пунктлари	Жўнатилш пунктлари	v_i	1	2	3	4	Юк захиралари			
			v_1	v_2	v_3	v_4				
1	u_1	2	90	4	6	10	90	0		
2	u_2	1	20	80	3	7	4	100	80	0
3	u_3	4	-	8	13	7	140			
Юкка бўлган талаб			110	100	80	40	330			
			20	20						
			0							

Қисоблашларни шу тартиқ давом эттирамиз ва охириги жадвал кўйидаги кўринишга келади:

қабул пунктлари Жўнатиш Пунктлари	v_j u_i	1	2	3	4	Юк захиралари		
		v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0
3	u_3	4 -	8 20	13	7	140	120	
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330		

		-	20			
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330

	20	20
	0	0

қабул пунклари	Жўнатиш пунклари	u_i	v_j	1	2	3	4	Юк захиралари	
				v_1	v_2	v_3	v_4		
1	u_1	2	4	6	10	90	0		
		90	-	-	-				
2	u_2	1	3	7	4	100	80	0	
		20	80	-	-				
3	u_3	4	8	13	7	140	120	40	
		-	20	80					
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330			

	20	20	0
	0	0	

□

қабул пунктлари	Жўнатиш пунктлари	v_i	1	2	3	n	Юк захиралари				
			v_1	v_2	v_3	v_n					
1	u_1		2 90	4 -	6 -	10 -	90	0			
2	u_2		1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0		
3	u_3		4 -	8 20	13 80	7 40	140	120	40	0	
Юкка Бўлган талаб			110 20	100 20	80 0	40 0	330				

Шу тариқа бошланғич планни ҳосил қилдик: $x_{11} = 90, x_{21} = 20, x_{22} = 80,$

$x_{32} = 20, x_{33} = 80, x_{34} = 40, x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{23} = x_{24} = x_{31} = 0,$

$$z = 90 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 80 \cdot 3 + 20 \cdot 8 + 80 \cdot 13 + 40 \cdot 7 =$$

$$= 180 + 20 + 240 + 160 + 1040 + 280 = 1920$$

Масаланинг оптимал ечимини топиш учун охирги жадвални қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

$v_j \backslash u_j$	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90
u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100
u_3	4 -	8 20	13 80	7 40	140
	110	100	80	40	

Белгиланган катаклар учун
шарт бўйича тенгламалар системасини $v_j - u_i = c_{ij}$ тузамиз: $v_j, j=1, \dots, 4, u_i, i=1, 2, 3$

$$v_1 - u_1 = 2$$

$$v_1 - u_2 = 1$$

$$v_2 - u_2 = 3$$

$$v_2 - u_3 = 8$$

$$v_3 - u_3 = 13$$

$$v_4 - u_3 = 7$$

Тенгламалар системасидаги номаълумлар 7 та, тенгламалар эса 6 та бўлгани учун система чексиз кўп ечимга эга. Хусусий ечимни топиш учун ўзгарувчилардан бирига ихтиёрий қиймат берамиз, масалан бўлсин. У ҳолда

$$v_1 = 2, u_2 = 1, v_2 = 4, u_3 = -4, v_3 = 9, v_4 = 3$$

келиб чиқади. Потенциалларнинг қийматларини жадвалга қўямиз:

v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 3$	
u_i					
$u_1 = 0$	2 90	4 80	6 80	10 40	90
$u_2 = 1$	1 20	3 80	7 80	4 40	100
$u_3 = -4$	4 110	8 100	13 80	7 40	140
	$110 - u_i \leq 100$	100	80	40	

Белгиланмаган катоклар

$$v_j - u_i \leq c_{ij}$$

учун

$$v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = c_{12}$$

$$v_3 - u_1 = 9 - 0 = 9 > 6 = c_{13}$$

$$v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}$$

$$v_3 - u_2 = 9 - 1 = 8 > 7 = c_{23}$$

$$v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24}$$

$$v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}$$

Учта (1,3), (2,3), (3,1) катаклар учун $v_j - u_i < c_{ij}$ шарт бажарилмайди. Ушбу катаклар учун $\delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ ларни ҳисоблаймиз:

$$\delta_{13} = v_3 - u_1 - c_{13} = 9 - 6 = 3$$

$$\delta_{23} = v_3 - u_2 - c_{23} = 8 - 7 = 1$$

$$\delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 6 - 4 = 2$$

Бўлиб, унга мос катакни белгиланган катаклар қаторига қўшиб, белгиланган катаклар ёрдамида цикл тузамиз. Циклни ташкил этувчи катакларга (1,3) катакдан бошлаб "+" ва "-" ишораларини навбат билан қўйиб чиқамиз:

$u_i \backslash v_j$	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 3$	
$u_1 = 0$	2 90	4	6	10	90
$u_2 = 1$	1 20	3 80	7	4	100
$u_3 = -4$	4	8 20	13 80	7 40	140
	110	100	80	40	

Белгиланмаган каталар учун $v_j - u_i \leq c_{ij}$ шартни текширалик:

