Лекция №10. Транспортная задача и ее решение методом потенциалов. Пункты отправки, пункты назначения, стоимость доставки. Открытая и закрытая транспортная задача. Понятии как набор, цепь, цикл. Методы определения начального решения. Потенциалы и их определения. Правила нахождения оптимального решения с помощью цикла.

Пусть имеются m пунктов отправления и n пунктов назначения груза. Обозначим через c_{ij}, стоимость перевозки груза из пункта отправления с номером i к пункту назначения с номером j, а через x_{ij} обозначим объём перевозки груза в вышеуказанных пунктах. Запасы груза в пунктах отправлений обозначим через $a_1, a_2, \dots a_m$, потребности к грузам в пунктах назначений обозначим через $b_1, b_2, \dots b_n$. Общий стоимость перевозки груза обозначим через формулы:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Общую стоимость перевозки груза необходимо уменьшить. Поэтому функцию z следует минимизировать:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \qquad (1)$$

Задачу представляем с помощью следующей таблицы:

	1	*2*	...	*n*	Запасы
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	$\dots$	b_n	

Перевозимый груз нужно распределить так, что при этом все грузы из пункта отправления должны быть вывезены, а потребности к грузу в пунктах назначений должны быть удовлетворены:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases} \qquad (3)$$

Если выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{j=1}^{m} a_j$, то транспортная задача называется закрытой, и можно приступить к решению задачи. Если выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} b_i \neq \sum_{j=1}^{m} a_j$, то задача называется открытой. В этом случае с помощью ввода дополнительных пунктов задача приводится к закрытой. Например, если $\sum_{i=1}^{n} b_i > \sum_{j=1}^{m} a_j$, то вводится дополнительный пункт отправления с номером m+1, с запасами $a_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{j=1}^{m} a_j$ и со стоимостью перевозки груза, равную к 0: $c_{1,n+1} = c_{2,n+1} = \ldots = c_{m,n+1} = 0$. В результате задача принимает вид:

Пункты назначений / Пункты отправлений	1	2	…	n	n+1	Запасы груза
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	0 x_{1n+1}	a_1

2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	0 x_{2n+1}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	0 x_{mn+1}	a_m
Потребность в грузах	b_1	b_2	$\dots$	b_n	b_{n+1}	

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, составляются дополнительные пункты отправлений с запасами груза, и задача приводится к закрытой.

Клетки с грузами $x_{ij} \neq 0$ называются отмеченными, а клетки с грузами $x_{ij} = 0$ называются не отмеченными. Для отмеченных клеток с помощью формулы $v_j - u_i = c_{ij}$ определяем значения потенциалов $v_j, j = 1,2,...n$ и $u_i, i = 1,2,...m$.

Транспортная задача решается в два этапа:

1) В первом этапе находится первоначальное решение $x_{ij},\ i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$, удовлетворяющее условиям (2)-(3). Имеются несколько способов для нахождения первоначального решения, например, метод северо-западного угла, метод минимального элемента и другие. В методе северо-западного угла выбирается клетка (1,1) и отметим, что $x_{11} = min(a_1,b_1)$. Если $min(a_1,b_1) = a_1$, то это означает, что все грузы из 1-пункта отправления направлены к 1-пункту назначений, другим пунктам назначений из 1- пункта отправления груз не отправляется. Поэтому, к остальным клеткам в строке, где находится a_1 вставляется знак «-». В 1-пункте назначения потребность в грузах будет $b_1^1 = b_1 - a_1$.

1-таблица

Пункты назначений / Пункты отправлений	1	2	…	n	Запасы груза	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} –	…	c_{1n} –	a_1	0
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2	
…	…	…	…	…	…	
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m	
Потребность в грузах	b_1	b_2	…	b_n		
	b_1^1					

Если $min(a_1,b_1)=b_1$, то в 1- пункте назначения потребность в грузах будет удовлетворена, в 1-пункте отправления остаётся груз $a_1^1 = a_1 - b_1$. К первому пункту назначения из остальных пунктов отправлений груз не привозится.

2-таблица

Пункты назначений / Пункты отправлений	1	2	…	n	Запасы груза	
1	c_{11} x_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1	a_1^1
2	c_{21} –	c_{22}	…	c_{2n}	a_2	
…	…	…	…	…	…	
m	c_{m1} –	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m	
Потребность в грузах	b_1	b_2	…	b_n		
	0					

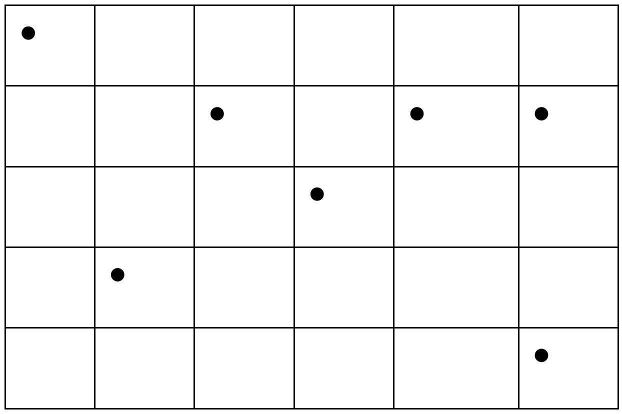
Продолжая вычисления по 1-таблице, переходим к клетке (2,1). Пусть будет $x_{21} = min(a_1, b_1^1) = b_1^1$. Заполняя клетку вышеуказанным способом получаем следующее:

3-таблица

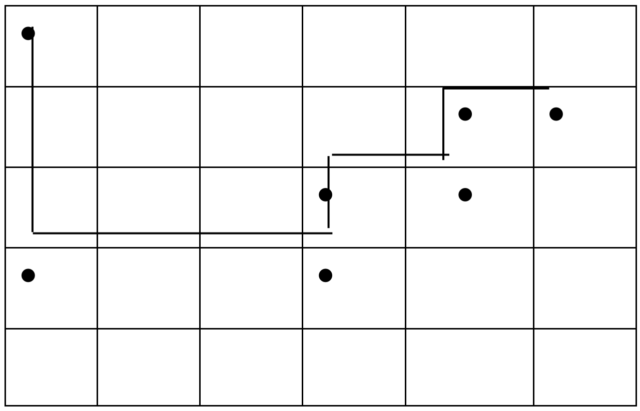
Пункты назначений / Пункты отправлений	1	2	…	n	Запасы груза	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} –	…	c_{1n} –	a_1	0
2	c_{21} x_{12}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2	a_2^1
…	…	…	…	…	…	
m	c_{m1} –	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m	
Потребность в грузах	b_1	b_2	…	b_n		
	b_1^1					
	0					

Продолжая вычисления таким образом до правого нижнего угла, определяем все значения $x_{ij},\ i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$. При этом должнық выполняться условия (2)-(3).

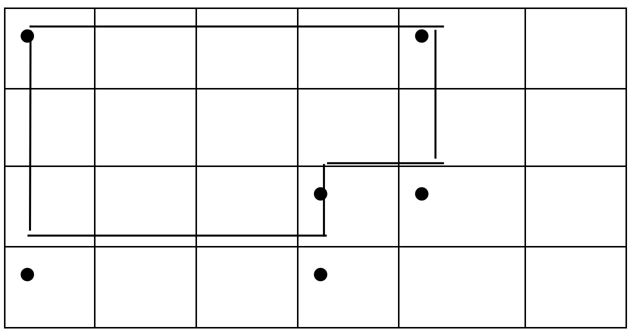
Во втором этапе находится оптималное решение(план), удовлетворяющее условиям (1). Для нахождения оптималного плана имеется несколько способов, например петод потенциалов, метод распределений и тд. Рассмотрим метод потенциалов. Для этого сначала ознакомимся с некоторыми понятиями. Произвольное множество точек в таблице называетя набором. Например,



Если в наборе число точек в каждой строке не превышает двух, то такой набор называется цепью. Например,



Замкнутый цепь называется циклом. Например,



Если в таблице набор из n количество точек не образуют цикл, при добавлении определенной точки набор $n+1$ точек образуют цикл, то первоначальный набор n точек называется ациклическим планом.

Если в транспортной задаче $x_{ij} > 0$, то клетка *(i,j)* называется отмеченной.

Если в транспортной задаче для всех клеток находится план $x_{ij},\ i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$, для которой удовлетворяется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ (4) , а для отмеченных клеток удовлетворятся условие $v_j - u_i = c_{ij}$, то полученный план называется оптимальным. Множество чисел $v_j,\ j=1,2,\ldots,n;\ \ u_i,\ i=1,2,\ldots,m$ называются потенциалами.

Метод потенциалов в транспортной задаче выполняется в следующем порядке:

1) Составляется система уравнений для отмеченных клеток удовлетворяющая следующим условиям $v_j - u_i = c_{ij}$, $v_j,\ j=1,2,\ldots,n;\ \ u_i,\ i=1,2,\ldots,m$. При этом число уравнений на одно меньше, чем число неизвестных. Поэтому система имеет бесконечное число решений. Найдя одно частное решение системы, определим значение потенциалов;

2) Для не отмеченных клеток проверим условие $v_j - u_i \le c_{ij}$. Если это условие выполняется для всех клеток, то этот план будет оптимальным, и вычисляется значение функции $z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$;

3) Если условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ не выполняется для некоторых клеток, то для этих клеток вычисляем $\delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ и находим $\delta_{i_0 j_0} = \max_{i,j} \delta_{ij}$;

4) клетка (i_0,j_0) добавляется в набор отмеченных клеток, и для этого набора составляется цикл;

5) Начиная с клетки (i_0,j_0), по очереди вставляем знаки "+" и "-" к клеткам цикла. Вставка начиная со знака "+";

6) Для клеток со знаком "–" определяем $\theta = min(x_{ij})$;

7) Из чисел x_{ij} в клетках со знаком "-" вычитываем θ, к числам x_{ij} в клетках со знаком "+" прибавляем θ;

8) Клетка с θ удаляется из числа отмеченных клеток.

В результате получаем новый план. Для нового плана повторяем операции (1)-(7). Вышеуказанные операции повторяются до тех пор, пока не выполняется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ для всех клеток.

Рассмотрим следующую задачу:

Пусть дана следующая транспортная задача, и эту задачу решаем с помощью метода потенциалов.

Пункты назначений / Пункты отправлений		1	2	3	4	Запасы груза
	v_j / u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2	4	6	10	90
2	u_2	1	3	7	4	100
3	u_3	4	8	13	7	140
Потребность в грузах		110	100	80	40	330

Чтобы найти первоначальный план, используем метод северо-западного угла. В клетке (1,1) записываем наименьшее число среди соответствующего запаса и потребности. $x_{11} = 90$.

Пункты назначений Пункты отправлений		1	2	3	4	Запасы груза	
	v_j u_i	v_1	v_2	v_3	v_4		
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0
2	u_2	1	3	7	4	100	
3	u_3	4	8	13	7	140	
Потребность в грузах		110	100	80	40	330	
		20					

По этой таблице видно, что из первого пункта отправления к первому пункту назначения отправляется 90 единиц груза, в 1-пункте отправления грузов не остаётся, поэтому из 1-пункта отправления к остальным пунктам грузов не отправляются к 1- пункту назначения ещё потребуется 20 единиц груза. Переходим к клетке (2,1), и записываем наименьшее среди соответствующего запаса и потребности: $x_{21} = 20$.

<table>
<tr><td rowspan="2">Пункты назначений
Пункты отправлений</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td rowspan="2">Запасы груза</td><td></td></tr>
<tr><td>v_j
u_i</td><td>v_1</td><td>v_2</td><td>v_3</td><td>v_4</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>u_1</td><td>2
90</td><td>4
-</td><td>6
-</td><td>10
-</td><td>90</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>u_2</td><td>1
20</td><td>3</td><td>7</td><td>4</td><td>100</td><td>80</td></tr>
<tr><td>3</td><td>u_3</td><td>4
-</td><td>8</td><td>13</td><td>7</td><td>140</td><td></td></tr>
<tr><td>Потребность в грузах</td><td></td><td>110</td><td>100</td><td>80</td><td>40</td><td>330</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>20</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Переходим к клетке (2,3) и вышеуказанным способом записываем $x_{22} = 80$.

Пункты назначений Пункты отправлений		1	2	3	4	Запасы груза		
	v_j u_i	v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0
3	u_3	4 -	8	13	7	140		
Потребность к грузам		110	100	80	40	330		
		20	20					
		0						

Продолжая таким образом, в конце имеем следующие таблицы:

Пункты назначений / Пункты отправлений	v_j / u_i	1	2	3	4	Запасы груза		
		v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0
3	u_3	4 -	8 20	13	7	140	120	
Потребность в грузах		110	100	80	40	330		
		20	20					
		0	0					

Пункты назначений / Пункты отправлений	v_j / u_i	1	2	3	4	Запасы груза		
		v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0
3	u_3	4 -	8 20	13 80	7	140	120	40
Потребность в грузах		110	100	80	40	330		
		20	20	0				
		0	0					

Пункты назначений / Пункты отправлений	v_j / u_i	1	2	3	n	Запасы груза			
		v_1	v_2	v_3	v_4				
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0		
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0	
3	u_3	4 -	8 20	13 80	7 40	140	120	40	0
Потребность в грузах		110	100	80	40	330			
		20	20	0	0				
		0	0						

Таким образом, имеем решение задачи: $x_{11} = 90, x_{21} = 20, x_{22} = 80,$ $x_{32} = 20, x_{33} = 80,$

$x_{32} = 20, x_{33} = 80, x_{34} = 40, x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{23} = x_{24} = x_{31} = 0,$ $z = 90 \cdot 2 + 20 \cdot 1 +$ $+ 80 \cdot 3 + 20 \cdot 8 + 80 \cdot 13 + 40 \cdot 7 = 180 + 20 + 240 + 160 + 1040 + 280 = 1920$

.Чтобы найти оптимальное решение задачи, последняя таблица приводится к следующему виду:

v_j / u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	Запасы груза
u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90
u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100
u_3	4 -	8 20	13 80	7 40	140
Потребность в грузах	110	100	80	40	

Для отмеченных клеток по условию $v_j - u_i = c_{ij}$ v_j, $j = 1,\ldots,4$, u_i, $i = 1,2,3$ составляем систему уравнений:

$$v_1 - u_1 = 2; v_1 - u_2 = 1; v_2 - u_2 = 3; v_2 - u_3 = 8; v_3 - u_3 = 13; v_4 - u_3 = 7$$

В системе уравнений число неизвестных 7, число уравнений 6. Поэтому система имеет бесконечное число решений. Для того, чтобы найти частное решение системы , к одному из неизвестному даём произвольное значение. Например, $u_1 = 0$. Тогда имеем следующее $v_1 = 2,\ u_2 = 1,\ v_2 = 4,\ u_3 = \text{-}4,\ v_3 = 9,\ v_4 = 3$. Значение потенциалов вставляем в таблицу:

$u_i \backslash v_j$	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 3$	Запасы груза
$u_1 = 0$	2 90	4	6	10	90
$u_2 = 1$	1 20	3 80	7	4	100
$u_3 = -4$	4	8 20	13 80	7 40	140
Потребность в грузах	110	100	80	40	

Для отмеченных клеток проверим условие $v_j - u_i \le c_{ij}$:

$$v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = c_{12}$$
$$v_3 - u_1 = 9 - 0 = 9 > 6 = c_{13}$$
$$v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}$$
$$v_3 - u_2 = 9 - 1 = 8 > 7 = c_{23}$$
$$v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24}$$
$$v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}$$

Для клеток (1,3), (2,3), (3,1) условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ не выполняется. Для этих клеток вычисляем следующие выражения $\delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$:

$$\delta_{13} = v_3 - u_1 - c_{13} = 9 - 6 = 3$$
$$\delta_{23} = v_3 - u_2 - c_{23} = 8 - 7 = 1$$
$$\delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 6 - 4 = 2$$

Определяем наибольшее среди этих чисел: $\max_{ij} \delta_{ij} = \delta_{13} = 3$. Клетку (1,3) добавим в список отмеченных клеток, и с помощью отмеченных клеток составляем цикл. Начиная с клетки (1,3), вставляем знаки $''+''$ и $''-''$ по очереди, начиная со знака $''+''$:

v_j / u_i	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 3$	Запасы груза
$u_1 = 0$	- 2 90	4	+ 6 0	10	90
$u_2 = 1$	+ 1 20	- 3 80	7	4	100
$u_3 = -4$	4	+ 8 20	- 13 80	7 40	140
Потребность в грузах	110	100	80	40	

Для клеток со знаком "-" вычисляем $\theta = min\, x_{ij} = min\{90{,}80{,}80\}$. Имеются две клетки, удовлетворяющие этим условиям: (2,2) и (3,3). Выбираем одно из них, например (3,3).

v_j / u_i	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 3$	Запасы груза
$u_1 = 0$	- 2 90	4	+ 6 0	10	90
$u_2 = 1$	+ 1 20	- 3 80	7	4	100
$u_3 = -4$	4	+ 8 20	- 13 80=θ	7 40	140
Потребность в грузах	110	100	80	40	

Добавляем θ к клеткам с знаком ″+″, отнимаем из клеток со знаком ″-″. Клетка (3,3), где находится θ, отчисляется из списка отмеченных клеток. В результате имеем следующую таблицу:

v_j / u_i	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	Запасы груза
$u_1 =$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2 =$	1 100	3 0	7	4	100
$u_3 =$	4	8 100	13	7 40	140
Потребность в грузах	110	100	80	40	

В новом плане для отмеченных клеток с помощью условия $v_j - u_i = c_{ij}$ составляем систему уравнений и определяем значения потенциалов:

$$
\begin{aligned}
&v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = c_{11}\\
&v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}\\
&v_3 - u_2 = 6 - 1 = 5 < 7 = c_{23}\\
&v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24}\\
&v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}\\
&v_3 - u_3 = 6 - (-4) = 10 < 13 = c_{33}
\end{aligned}
$$

Допустим, что $u_1 = 0$. Тогда имеем $v_1 = 2,\ u_2 = 1,\ v_2 = 4,\ \ u_3 = -4, v_3 = 6, v_4 = 3$.

v_j \ u_i	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 6$	$v_4 = 3$	Запасы груза
$u_1 = 0$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2 = 1$	1 100	3 0	7	4	100
$u_3 = -4$	4	8 100	13	7 40	140
Потребность в грузах	110	100	80	40	

Для клетки (3,1) условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ не выполняется. Эта клетка добавляется в список отмеченных клеток и вышеуказанным способом в цикл. Означаем цикл и для клеток со знаком ″-″ и определяем θ. Грузы в клетках со знаком ″-″ имеют одинаковое значение 100 . Поэтому выбираем одно из них, например, (3,2). В результате имеем следующую таблицу:

v_j \ u_i	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	Запасы груза
$u_1 =$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2 =$	- 1 100	+ 3 0	7	4	100
$u_3 =$	+4 0	- 8 100=θ	13	7 40	140
Потребность в грузах	110	100	80	40	

Вычитываем θ из клеток со знаком "-", добавляем к клеткам со знаком "+". Вычитываем клетку (3,2) из списка отмеченных клеток и находим новый план с помощью метода потенциалов. В результате имеем следующую таблицу:

u_i \ v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 6$	$v_4 = 5$	Запасы груза
$u_1 = 0$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2 = 1$	1 0	3 100	7	4	100
$u_3 = -2$	4 100	8	13	7 40	140
Потребность в грузах	110	100	80	40	

В этой таблице для всех клеток выполняется условие потенциальности $v_j - u_i \leq c_{ij}$. Это означает, что оптимальный план найден, и этот план принимает следующий вид:

$x_{11} = 10$, $x_{13} = 80$, $x_{22} = 100$, $x_{31} = 100$, $x_{34} = 40$,

$x_{12} = x_{14} = x_{21} = x_{23} = x_{24} = x_{32} = x_{33} = 0$,

$z_{min} = 10 \cdot 2 + 80 \cdot 6 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 40 \cdot 7 = 20 + 480 + 300 + 400 + 280 = 1480$.