Лекция №5. Численные методы Джордана и метод итерации для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Метод Жордана. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n = a_m \end{cases}$$

Составим жордановую таблицу для этой задачи:

	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$a_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
$a_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$a_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Чтобы перейти на следующую таблицу, выполняем метод жордановых исключений над этой таблицей:

1) Элемент, который находится в верхнем левом углу, выбираем в качестве разрешающего элемента;
2) Число, которое находится в разрешающей строке, и переменная, которая находится в разрешающем столбце, меняются местами;
3) Вместо разрешающего элемента записываем обратное число;
4) Элементы разрешающего столбца делим на разрешающий элемент и записываем в соответствующие клетки;
5) Элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент, меняем знак на противоположный и записываем в соответствующие клетки;
6) Остальные клетки заполняются методом прямоугольника.

Например, клетка (2,2) заполняется с помощью следующей формулы:

$$a_{22}^{1} = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}}.$$

7) Разрешающий элемент выбирается по диагонали до тех пор, пока все элементы нижнего правого угла этого элемента не станут нулем:
8)

	a_1	a_2	…	a_k	x_{k+1}	…	x_n
$x_1 =$	a'_{11}	a'_{12}	…	a'_{1k}	$a'_{1,k+1}$	…	a'_{1n}
$x_2 =$	a'_{21}	a'_{22}	…	a'_{2k}	$a'_{2,k+1}$	…	a'_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
$x_k =$	a'_{k1}	a'_{k2}	…	a'_{kk}	$a'_{k,k+1}$	…	a'_{kn}
$a_{k+1} =$	$a'_{k+1,1}$	$a'_{k+1,2}$	…	$a'_{k+1,k}$	*0*	…	*0*
…	…	…	…	…	…	…	…
$a_m =$	a'_{m1}	a'_{m2}	…	a'_{mk}	*0*	…	*0*

9) В противном случае вычисления проводятся до конца, до нижнего правого угла таблицы.

Задача:

Решить с помощью метода жордановых исключений следующую СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение задачи:

Создаём жорданову таблицу для вышеуказанной таблицы:

$\downarrow$

	x_1	x_2	x_3
4=	2	1	2

1=	1	-1	2
3=	3	1	-2

После жордановых преобразований таблица имеет следующий вид:

	4	x_2	x_3
$x_1 =$	1/2	-1/2	-1
1=	1/2	-3/2	1
3=	3/2	-1/2	-5

В качестве разрешающего элемента выбираем $a_{22}^{1} = -3/2$, выполняем жордановых преобразований и получаем следующую таблицу:

	4	1	x_3
$x_1 =$	1/3	1/3	-4/3
$x_2 =$	1/3	-2/3	2/3
3=	4/3	1/3	-16/3

В качестве разрешающего элемента выбираем $a_{33}^{2} = -16/3$, выполняем жордановые преобразования и получаем следующую таблицу:

	4	1	3
$x_1 =$	0	1/4	1/4
$x_2 =$	1/2	-5/8	-1/8

$x_3 =$	1/4	1/16	-3/16

С помощью последней таблицы определяем решение системы:

$$x1 = 4*0 + 1*1/4 + 3*1/4 = 1/4 + 3/4 = 1$$
$$x2 = 4*1/2 - 1*5/8 - 3*1/8 = 2 - 5/8 - 3/8 = 1$$
$$x3 = 4*1/4 + 1*1/16 - 3*3/16 = 1 - 8/16 = 1/2$$

Метод итераций решения системы уравнений. Пример решения

ПРИМЕР №1. Найти приближенное решение системы уравнений:
$10x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$
$-2x_1 - 6x_2 - x_3 = 24{,}42$
$x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 36$
методом простых итераций, сделав три итерации. Предварительно проверить достаточное условие сходимости метода простых итераций.

Достаточное условие сходимости метода простых итераций

Прежде чем применять метод итераций, необходимо переставить строки исходной системы таким образом, чтобы на диагонали стояли наибольшие по модулю коэффициенты матрицы. Если при этом условие все таки не выполняется, то иногда удается обеспечить сходимость метода с помощью следующего метода.
Пусть дана система Ax = b. Преобразуем ее к виду: x= Qx + c
где Q = E - D•A, c = D•b
Здесь D - некоторая матрица. Нам необходимо подобрать такую матрицу D, чтобы выполнялось условие |Q| < 1.
Чтобы получить |Q| < 1, используем следующий способ.
Имеем СЛАУ
A x =b (1)
Предполагая, что $a_{ii} \neq 0$ разрешим новое уравнение системы (1) относительно x_1, второе – относительно x_2,…, *n-ое* уравнение – относительно x_n. В результате получим:
$x_1=\beta_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - ... - \alpha_{1n}x_n$
$x_2=\beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{23}x_3 - ... - \alpha_{2n}x_n$
$x_n=\beta_n - \alpha_{n1}x_n - \alpha_{n3}x_3 - ... - \alpha_{nn-1}x_{n-1}$
где $\beta_i=b_i/a_{ii}$; $\alpha_{ij}=a_{ij}/a_{ii}$ при $i \neq j$; $\alpha_{ii}=0$
Система (2) в матричной форме имеет вид:
$x=\beta - \alpha x$
Систему будем решать методом последовательных приближений. Пусть $x^0=\beta$, тогда:
$x^1=b - a\ x^0$
$x^2=b - a\ x^1$
....
$x^{k+1}=b - a\ x^k$
Для нашей задачи достаточное условие сходимости выполняется.

10	2	-1
-2	-6	-1

1	-3	12

Приведем к виду:
x_1=0.5-(0.2x_2-0.1x_3)
x_2=-4.07-(0.33x_1+0.17x_3)
x_3=3-(0.0833x_1-0.25x_2)
Покажем вычисления на примере нескольких итераций.
N=1
x_1=0.5 - 0 • 0.2 - 0 • (-0.1)=0.5
x_2=-4.07 - 0 • 0.33 - 0 • 0.17=-4.07
x_3=3 - 0 • 0.0833 - 0 • (-0.25)=3
N=2
x_1=0.5 - (-4.07) • 0.2 - 3 • (-0.1)=1.61
x_2=-4.07 - 0.5 • 0.33 - 3 • 0.17=-4.74
x_3=3 - 0.5 • 0.0833 - (-4.07) • (-0.25)=1.94
N=3
x_1=0.5 - (-4.74) • 0.2 - 1.94 • (-0.1)=1.64
x_2=-4.07 - 1.61 • 0.33 - 1.94 • 0.17=-4.93
x_3=3 - 1.61 • 0.0833 - (-4.74) • (-0.25)=1.68
Остальные расчеты сведем в таблицу.

N	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
0	0	0	0			
1	0.5	-4.07	3	0.5	4.07	3
2	1.61	-4.74	1.94	1.11	0.67	-1.06
3	1.64	-4.93	1.68	0.0274	0.19	-0.26
4	1.65	-4.9	1.63	0.013	-0.0341	-0.051
5	1.64	-4.89	1.64	-0.0119	-0.00416	0.00744
6	1.64	-4.89	1.64	-8.8E-5	-0.00273	0.00203
7	1.64	-4.89	1.64	-0.000343	0.00031	0.000691

Ответ: x_1=1.64, x_2=-4.89, x_3=1.64