Лекция №3. Методы решения линейных моделей. Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и условия его существования. Методы Гаусса, Крамера, методы обратных матриц в решении СЛАУ.

Определения, понятия, обозначения.

Будем рассматривать системы из *p* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными переменными (*p* может быть равно *n*) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные переменные, a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, n$ - коэффициенты (некоторые действительные или комплексные числа), $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - свободные члены (также действительные или комплексные числа).

Такую форму записи СЛАУ называют **координатной**.

В **матричной форме** записи эта система уравнений имеет вид $A \cdot X = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$ - основная матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных переменных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов.

Если к матрице *A* добавить в качестве *(n+1)-ого* столбца матрицу-столбец свободных членов, то получим так называемую **расширенную матрицу** системы линейных уравнений. Обычно расширенную матрицу обозначают буквой *T*, а столбец свободных членов отделяют вертикальной линией от остальных столбцов, то есть,

$$T = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} & b_n \end{array}\right)$$

Решением системы линейных алгебраических уравнений называют набор значений неизвестных переменных $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$, обращающий все уравнения системы в тождества. Матричное уравнение $A \cdot X = B$ при данных значениях неизвестных переменных также обращается в тождество $A \cdot X \equiv B$.

Если система уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система уравнений решений не имеет, то она называется **несовместной**. Если СЛАУ имеет единственное решение, то ее называют **определенной**; если решений больше одного, то – **неопределенной**.

Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, то система называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.

Решение элементарных систем линейных алгебраических уравнений.

Если число уравнений системы равно числу неизвестных переменных и определитель ее основной матрицы не равен нулю, то такие СЛАУ будем называть **элементарными**. Такие системы уравнений имеют единственное решение, причем в случае однородной системы все неизвестные переменные равны нулю.

Такие СЛАУ мы начинали изучать в средней школе. При их решении мы брали какое-нибудь одно уравнение, выражали одну неизвестную переменную через другие и подставляли ее в оставшиеся уравнения, следом брали следующее уравнение, выражали следующую неизвестную переменную и подставляли в другие уравнения и так далее. Или пользовались методом сложения, то есть, складывали два или более уравнений, чтобы исключить некоторые неизвестные переменные. Не будем подробно останавливаться на этих методах, так как они по сути являются модификациями метода Гаусса.

Основными методами решения элементарных систем линейных уравнений являются метод Крамера, матричный метод и метод Гаусса. Разберем их.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Пусть нам требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных переменных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то есть, $|A| \neq 0$.

Пусть Δ - определитель основной матрицы системы, а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n}$ - определители матриц, которые получаются из A заменой *1-ого, 2-ого, …, n-ого* столбца соответственно на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

При таких обозначениях неизвестные переменные вычисляются по формулам метода Крамера как $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$. Так находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

Пример.

Решите систему линейных уравнений методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$.

Решение.

Основная матрица системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислим ее определитель (при необходимости смотрите статью определитель матрицы: определение, методы вычисления, примеры, решения):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 0 -$$

$$-(-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 0 = -13$$

Так как определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

Составим и вычислим необходимые определители Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} (определитель Δ_{x_1} получаем, заменив в матрице A первый столбец на столбец свободных членов $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, определитель Δ_{x_2} - заменив второй столбец на столбец свободных членов, Δ_{x_3} - заменив третий столбец матрицы A на столбец свободных членов):

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}9 & 3 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=9\cdot(-2)\cdot 2+3\cdot 1\cdot 2+(-1)\cdot 3\cdot 0-$$

$$-(-1)\cdot(-2)\cdot 2-3\cdot 3\cdot 2-9\cdot 1\cdot 0=-52$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2 & 9 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot 2+9\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 1\cdot 2-$$

$$-(-1)\cdot 3\cdot 1-9\cdot 1\cdot 2-2\cdot 1\cdot 2=0$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 9\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 2+3\cdot 3\cdot 1+9\cdot 1\cdot 0-$$

$$-9\cdot(-2)\cdot 1-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 3\cdot 0=13$$

Находим неизвестные переменные по формулам $x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{-52}{-13}=4,$$

$$x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{0}{-13}=0,$$

$$x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{13}{-13}=-1$$

Ответ:

$x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

Основным недостатком метода Крамера (если это можно назвать недостатком) является трудоемкость вычисления определителей, когда число уравнений системы больше трех.

Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом (с помощью обратной матрицы).

Пусть система линейных алгебраических уравнений задана в матричной форме $A\cdot X=B$, где матрица *A* имеет размерность *n* на *n* и ее определитель отличен от нуля.

Так как $|A| \neq 0$, то матрица A – обратима, то есть, существует обратная матрица A^{-1}. Если умножить обе части равенства $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева, то получим формулу для нахождения матрицы-столбца неизвестных переменных $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$. Так мы получили решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

Пример.

Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ матричным методом.

Решение.

Перепишем систему уравнений в матричной форме:

$$A \cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 -$$
$$-(-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13$$

то СЛАУ можно решать матричным методом. С помощью обратной матрицы решение этой системы может быть найдено как

$$X = A^{-1} \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Построим обратную матрицу A^{-1} с помощью матрицы из алгебраических дополнений элементов матрицы A (при необходимости смотрите статью методы нахождения обратной матрицы):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} (-2)\cdot 2 - 1\cdot 0 & -(1\cdot 2 - 1\cdot 1) & 1\cdot 0 - (-2)\cdot 1 \\ -(3\cdot 2 - (-1)\cdot 0) & 2\cdot 2 - (-1)\cdot 1 & -(2\cdot 0 - 3\cdot 1) \\ 3\cdot 1 - (-1)\cdot(-2) & -(2\cdot 1 - (-1)\cdot 1) & 2\cdot(-2) - 3\cdot 1 \end{pmatrix}^T =$$

$$= -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}$$

Осталось вычислить $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрицу неизвестных переменных, умножив обратную матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}$ на матрицу-столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (при необходимости смотрите статью операции над матрицами):

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \cdot 9 + \frac{6}{13} \cdot 3 + \left(-\frac{1}{13}\right) \cdot 2 \\ \frac{1}{13} \cdot 9 + \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot 3 + \frac{3}{13} \cdot 2 \\ \left(-\frac{2}{13}\right) \cdot 9 + \left(-\frac{3}{13}\right) \cdot 3 + \frac{7}{13} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ или в другой записи $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -1$.

Основная проблема при нахождении решения систем линейных алгебраических уравнений матричным методом заключается в трудоемкости нахождения обратной матрицы, особенно для квадратных матриц порядка выше третьего.

Более подробное описание теории и дополнительные примеры смотрите в статье матричный метод решения систем линейных уравнений.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Пусть нам требуется найти решение системы из n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

с n неизвестными переменными определитель основной матрицы которой отличен от нуля.

Суть метода Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных переменных: сначала исключается x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго, далее исключается x_2 из всех уравнений, начиная с третьего, и так далее, пока в последнем уравнении останется только неизвестная переменная x_n. Такой процесс преобразования уравнений системы для последовательного исключения неизвестных переменных называется **прямым ходом метода Гаусса**. После завершения прямого хода метода Гаусса из последнего уравнения находится x_n, с помощью этого значения из предпоследнего уравнения вычисляется x_{n-1}, и так далее, из первого уравнения находится x_1. Процесс вычисления неизвестных переменных при движении от последнего уравнения системы к первому называется **обратным ходом метода Гаусса**.

Кратко опишем алгоритм исключения неизвестных переменных.

Будем считать, что $a_{11} \neq 0$, так как мы всегда можем этого добиться перестановкой местами уравнений системы. Исключим неизвестную переменную x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению системы прибавим первое, умноженное на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, к третьему уравнению прибавим первое, умноженное на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и так далее, к *n-ому* уравнению прибавим первое, умноженное на $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$. Система уравнений после таких преобразований примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

где

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + a_{1j} \cdot \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right), \quad i = 2, 3, \ldots, n, \quad j = 2, 3, \ldots, n$$

,

а

$$b_i^{(1)} = b_i + b_1 \cdot \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right), \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

.

К такому же результату мы бы пришли, если бы выразили x_1 через другие неизвестные переменные в первом уравнении системы и полученное выражение подставили во все остальные уравнения. Таким образом, переменная x_1 исключена из всех уравнений, начиная со второго.

Далее действуем аналогично, но лишь с частью полученной системы, которая отмечена на рисунке

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Будем считать, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (в противном случае мы переставим местами вторую строку с *k-ой*, где $a_{k2}^{(1)} \neq 0$). Приступаем к исключению неизвестной переменной x_2 из всех уравнений, начиная с третьего.

Для этого к третьему уравнению системы прибавим второе, умноженное на $-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, к четвертому уравнению прибавим второе, умноженное на $-\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, и так далее, к *n-ому* уравнению прибавим второе, умноженное на $-\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$. Система уравнений после таких преобразований примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \ldots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + a_{2j}^{(1)} \cdot \left(-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right), \quad i = 3, 4, \ldots, n, \quad j = 3, 4, \ldots, n$,

а $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + b_2^{(1)} \cdot \left(-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right), \quad i = 3, 4, \ldots, n$. Таким образом, переменная x_2 исключена из всех уравнений, начиная с третьего.

Далее приступаем к исключению неизвестной x_3, при этом действуем аналогично с отмеченной на рисунке частью системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \ldots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

Так продолжаем прямой ход метода Гаусса пока система не примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

С этого момента начинаем обратный ход метода Гаусса: вычисляем x_n из последнего уравнения как $x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$, с помощью полученного значения x_n находим x_{n-1} из предпоследнего уравнения, и так далее, находим x_1 из первого уравнения.

Пример.

Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение.

Исключим неизвестную переменную x_1 из второго и третьего уравнения системы. Для этого к обеим частям второго и третьего уравнений прибавим соответствующие части первого уравнения, умноженные на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}} = -\dfrac{1}{2}$ и на $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{1}{2}$ соответственно:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (2x_1 + 3x_2 - x_3) = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 9 \\ x_1 + 2x_3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (2x_1 + 3x_2 - x_3) = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ -\frac{7}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Теперь из третьего уравнения исключим x_2, прибавив к его левой и правой частям левую и правую части второго уравнения, умноженные на $$-\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{7}{2}}=-\frac{3}{7}$$:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=9\\ -\frac{7}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3=-\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}x_2+\frac{5}{2}x_3=-\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=9\\ -\frac{7}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3=-\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}x_2+\frac{5}{2}x_3+\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\right)=-\frac{5}{2}+\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=9\\ -\frac{7}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3=-\frac{3}{2}\\ \frac{13}{7}x_3=-\frac{13}{7}\end{cases}$$

На этом прямой ход метода Гаусса закончен, начинаем обратный ход.

Из последнего уравнения полученной системы уравнений находим x_3:

$$x_3=\frac{-\frac{13}{7}}{\frac{13}{7}}=-1$$

Из второго уравнения получаем $x_2=-\frac{2}{7}\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x_3\right)=-\frac{2}{7}\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot(-1)\right)=0$.

Из первого уравнения находим оставшуюся неизвестную переменную и этим завершаем обратный ход метода Гаусса $x_1=\frac{1}{2}(9-3x_2+x_3)=\frac{1}{2}(9-3\cdot 0+(-1))=4$.

Ответ:

$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -1.$

Метод Жордана. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n = a_m \end{cases}$$

Составим жорданову таблицу для этой задачи:

	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$a_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
$a_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$a_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Чтобы перейти на следующую таблицу, выполняем метод жордановых исключений над этой таблицей:

1) Элемент, который находится в верхнем левом углу, выбираем в качестве разрешающего элемента;
2) Число, которое находится в разрешающей строке, и переменная, которая находится в разрешающем столбце, меняются местами;
3) Вместо разрешающего элемента записываем обратное число;
4) Элементы разрешающего столбца делим на разрешающий элемент и записываем в соответствующие клетки;
5) Элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент, меняем знак на противоположный и записываем в соответствующие клетки;
6) Остальные клетки заполняются методом прямоугольника.

Например, клетка (2,2) заполняется с помощью следующей формулы:

$$a_{22}^{1} = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}}.$$

7) Разрешающий элемент выбирается по диагонали до тех пор, пока все элементы нижнего правого угла этого элемента не станут нулем:
8)

	a_1	a_2	…	a_k	x_{k+1}	…	x_n
$x_1 =$	a'_{11}	a'_{12}	…	a'_{1k}	$a'_{1,k+1}$	…	a'_{1n}
$x_2 =$	a'_{21}	a'_{22}	…	a'_{2k}	$a'_{2,k+1}$	…	a'_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
$x_k =$	a'_{k1}	a'_{k2}	…	a'_{kk}	$a'_{k,k+1}$	…	a'_{kn}
$a_{k+1} =$	$a'_{k+1,1}$	$a'_{k+1,2}$	…	$a'_{k+1,k}$	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…
$a_m =$	a'_{m1}	a'_{m2}	…	a'_{mk}	0	…	0

9) В противном случае вычисления проводятся до конца, до нижнего правого угла таблицы.

Задача:

Решить с помощью метода жордановых исключений следующую СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение задачи:

Создаём жордановую таблицу для вышеуказанной таблицы:

	x_1	x_2	x_3
4=	2	1	2

1=	1	-1	2
3=	3	1	-2

После жордановых преобразований таблица имеет следующий вид:

	4	x_2	x_3
$x_1 =$	1/2	-1/2	-1
1=	1/2	-	1
3=	3/2	-1/2	-5

В качестве разрешающего элемента выбираем $a_{22}^1 = -3/2$, выполняем жордановых преобразований и получаем следующую таблицу:

	4	1	x_3
$x_1 =$	1/3	1/3	-4/3
$x_2 =$	1/3	-2/3	2/3
3=	4/3	1/3	-

В качестве разрешающего элемента выбираем $a_{33}^2 = -16/3$, выполняем жордановые преобразования и получаем следующую таблицу:

	4	1	3
$x_1 =$	0	1/4	1/4
$x_2 =$	1/2	-5/8	-1/8
$x_3 =$	1/4	1/16	-3/16

С помощью последней таблицы определяем решение системы:

$$x1 = 4*0 + 1*1/4 + 3*1/4 = 1/4 + 3/4 = 1$$
$$x2 = 4*1/2 - 1*5/8 - 3*1/8 = 2 - 5/8 - 3/8 = 1$$
$$x3 = 4*1/4 + 1*1/16 - 3*3/16 = 1 - 8/16 = 1/2$$