Лекция №15. Дифференциальные модели и приведенные задачи к ним. Исследование задач Эйлера и Коши. Методы решения дифференциальных моделей.

Рассмотрим некоторые численные методы решения задачи Коши (начальной задачи) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Запишем данное уравнение в общем виде, разрешенном относительно производной (правая часть уравнения не зависит от первой производной):

$$y' = \frac{dy}{dx} = F(x,y) \tag{6.2}$$

Необходимо найти значения функции y в заданных точках сетки $x_1, x_2, \ldots, x_N$, если известны начальные значения (x_0, y_0), где $y_0 = y(x_0)$ есть значение функции y(x) в начальной точке x0.

Преобразуем уравнение умножением на dx

$$dy = F(x,y)dx$$

И проинтегрируем левую и правую части между i-ым и i+1-ым узлами сетки.

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x,y)dx$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x,y)dx \tag{6.3}$$

Мы получили выражение для построения решения в i+1 узле интегрирования через значения x и y в i-ом узле сетки. Сложность, однако, заключается в том, что интеграл в правой части есть интеграл от неявно заданной функции, нахождение которого в аналитическом виде в общем случае невозможно. Численные методы решения ОДУ различным способом аппроксимируют (приближают) значение этого интеграла для построения формул численного интегрирования ОДУ.

Из множества разработанных для решения ОДУ первого порядка методов рассмотрим методы Эйлера, Рунге-Кутта и прогноза и коррекции. Они достаточно просты и дают начальное представление о подходах к решению данной задачи в рамках численного решения задачи Коши.

Метод Эйлера

Исторически первым и наиболее простым способом численного решения задачи Коши для ОДУ первого порядка является метод Эйлера. В его основе лежит аппроксимация производной отношением конечных приращений зависимой (y) и независимой (x) переменных между узлами равномерной сетки:

$$y' = \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = F(x_i, y_i)$$

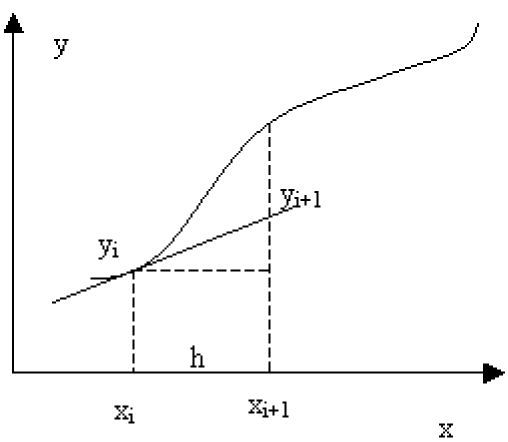
где yi+1 это искомое значение функции в точке xi+1.

Если теперь преобразовать это уравнение, и учесть равномерность сетки интегрирования, то получится итерационная формула, по которой можно вычислить yi+1 , если известно yi в точке xi:

$$y_{i+1} = y_i + F(x_i, y_i)h \qquad (6.4)$$

Сравнивая формулу Эйлера с общим выражением, полученным ранее, видно, что для приближенного вычисления интеграла в (6.3) в методе Эйлера используется простейшая формула интегрирования - формула прямоугольников по левому краю отрезка.

Графическая интерпретация метода Эйлера также не представляет затруднений (см. рисунок ниже). Действительно, исходя из вида решаемого уравнения (6.2) следует, что значение $F(x_i, y_i)$ есть значение производной функции y(x) в точке x=xi - $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i}$, и, таким образом, равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции y(x) в точке x=xi.



Из прямоугольного треугольника на рисунке можно найти

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i)y'(x_i) = hF(x_i, y_i),$$

откуда и получается формула Эйлера. Таким образом, суть метода Эйлера заключается в замене функции y(x) на отрезке интегрирования прямой линией, касательной к графику в точке x=xi. Если искомая функция сильно отличается от линейной на отрезке интегрирования, то погрешность вычисления будет значительной. Ошибка метода Эйлера прямо пропорциональна шагу интегрирования:

Ошибка ~ h

Процесс вычислений строится следующим образом. При заданных начальных условиях x0 и y0 можно вычислить

$$y_1 = y_0 + F(x_0, y_0)h \qquad x_1 = x_0 + h$$
$$y_2 = y_1 + F(x_1, y_1)h \qquad x_2 = x_1 + h$$
$$y_3 = y_2 + F(x_2, y_2)h \qquad x_3 = x_2 + h$$

…………………………………………………

$$y_N = y_{N-1} + F(x_{N-1}, y_{N-1})h \qquad x_N = x_{N-1} + h$$

Таким образом, строится таблица значений функции y(x) с определенным шагом (h) по x на отрезке [x0, xN]. Ошибка в определении значения y(xi) при этом будет тем меньше, чем меньше выбрана длина шага h (что определяется точностью формулы интегрирования).

При больших h метод Эйлера весьма неточен. Он дает все более точное приближение при уменьшении шага интегрирования. Если отрезок [xi, xi+1] слишком велик, то каждый участок [xi, xi+1] разбивается на N отрезков интегрирования и к каждому их них применяется формула Эйлера с шагом $h = \frac{x_{i+1} - x_i}{N}$, то есть шаг интегрирования h берется меньше шага сетки, на которой определяется решение.

Пример:

Используя метод Эйлера, построить приближенное решение для следующей задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx} = x - y \quad (x_0 = y_0 = 0)$$

На сетке с шагом 0,1 в интервале [0, 1] (6.5)

Решение:

Данное уравнение уже записано в стандартном виде, резрешенном относительно производной искомой функции.

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

Поэтому, для решаемого уравнения имеем

$$F(x,y) = x - y$$

Примем шаг интегрирования равным шагу сетки h = 0,1. При этом для каждого узла сетки будет вычислено только одно значение (N=1). Для первых четырех узлов сетки вычисления будут следующими:

$$y_1 = y(0,1) \approx y_0 + hF(x_0, y_0) = 0 + 0,1(0 - 0) = 0$$
$$y_2 = y(0,2) \approx y_1 + hF(x_1, y_1) = 0 + 0,1(0,1 - 0) = 0,01$$
$$y_3 = y(0,3) \approx y_2 + hF(x_2, y_2) = 0,01 + 0,1(0,2 - 0,01) = 0,029$$
$$y_4 = y(0,4) \approx y_{32} + hF(x_3, y_3) = 0,029 + 0,1(0,3 - 0,029) = 0,0561$$

И т. д.

Полные результаты (с точностью до пятого знака после запятой) приведены в таблице 1 в третьей колонке - h=0,1 (N=1). Во второй колонке таблицы для сравнения приведены значения, вычисленные по аналитическому решению данного уравнения $y = e^{-x} + x - 1$.

Во второй части таблицы приведена относительная погрешность полученных решений. Видно, что при h=0,1 погрешность весьма велика, достигая 100% для первого узла x=0,1.

Таблица 1 Решение уравнения (6.5) методом Эйлера (для колонок указан шаг интегрирования и число отрезков интегрирования N между узлами сетки)

x	Точное решение	0,1	0,05	0,025	0,00625	0,0015625	0,0007813	0,0001953
		1	2	4	16	64	128	512
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	0,004837	0,000000	0,002500	0,003688	0,004554	0,004767	0,004802	0,004829

0,2	0,018731	0,010000	0,014506	0,016652	0,018217	0,018603	0,018667	0,018715
0,3	0,040818	0,029000	0,035092	0,037998	0,040121	0,040644	0,040731	0,040797
0,4	0,070320	0,056100	0,063420	0,066920	0,069479	0,070110	0,070215	0,070294
0,5	0,106531	0,090490	0,098737	0,102688	0,105580	0,106294	0,106412	0,106501
0,6	0,148812	0,131441	0,140360	0,144642	0,147779	0,148554	0,148683	0,148779
0,7	0,196585	0,178297	0,187675	0,192186	0,195496	0,196314	0,196449	0,196551
0,8	0,249329	0,230467	0,240127	0,244783	0,248202	0,249048	0,249188	0,249294
0,9	0,306570	0,287420	0,297214	0,301945	0,305423	0,306284	0,306427	0,306534
1	0,367879	0,348678	0,358486	0,363232	0,366727	0,367592	0,367736	,36 7844

Относительные погрешности вычисленных значений функции при различных h

x	h	0,1	0,05	0,025	0,00625	0,0015625	0,0007813	0,0001953
	N	1	2	4	16	64	128	512
0,1		100,00%	48,32%	23,76%	5,87%	1,46%	0,73%	0,18%
0,2		46,61%	22,55%	11,10%	2,74%	0,68%	0,34%	0,09%
0,3		28,95%	14,03%	6,91%	1,71%	0,43%	0,21%	0,05%
0,4		20,22%	9,81%	4,83%	1,20%	0,30%	0,15%	0,04%
0,5		15,06%	7,32%	3,61%	0,89%	0,22%	0,11%	0,03%
0,6		11,67%	5,68%	2,80%	0,69%	0,17%	0,09%	0,02%
0,7		9,30%	4,53%	2,24%	0,55%	0,14%	0,07%	0,02%
0,8		7,57%	3,69%	1,82%	0,45%	0,11%	0,06%	0,01%
0,9		6,25%	3,05%	1,51%	0,37%	0,09%	0,05%	0,01%
1		5,22%	2,55%	1,26%	0,31%	0,08%	0,04%	0,01%

Уменьшим шаг интегрирования вдвое, h = 0.05, в этом случае для каждого узла сетки вычисление будет проводиться за два шага (N=2). Так, для первого узла x=0,1 получим:

$$y(0,05) \approx y_0 + hF(x_0, y_0) = 0 + 0,05(0-0) = 0$$
$$y_1 = y(0,1) \approx y(0,05) + hF(x_0, y(0,05)) = 0 + 0,05(0,05-0) = 0,0025$$

И так далее, до конца отрезка.

Из таблицы 1 (четвертая колонка, N=2) видно, что погрешность решения резко снизилась, примерно вдвое, хотя и осталась по-прежнему, значительной.

При шаге интегрирования h=0,025 для каждого узла сетки необходимо выполнить 4 вычисления по формуле Эйлера в промежуточных точках (N=4).

$$y(0.025) \approx y_0 + hF(x_0, y_0) = 0 + 0.025(0-0) = 0$$
$$y(0.05) \approx y(0.025) + hF(0.025, y(0,025)) =$$
$$= 0 + 0,025(0,025-0) = 0,000625$$
$$y(0.075) \approx y(0.05) + hF(0.05, y(0,05)) =$$
$$= 0.000625 + 0,025(0,05 - 0.000625) = 0,001859375$$
$$y_1 = y(0.1) \approx y(0.075) + hF(0.075, y(0,075)) =$$
$$= 0.001859375 + 0,025(0,075 - 0,001859375) = 0,003687890625$$

(Для других узлов значения приведены в таблице 1, колонка N=4)

В таблице 1 приведены для сравнения вычисления для некоторых других значений N, вплоть до 512. Видно, что точность решения возрастает весьма медленно при уменьшении шага интегрирования, необходимо брать очень маленький шаг для достижения приемлемой точности (и, следовательно, много раз вычислять значение F(x,y)). Поэтому метод Эйлера практически не используется в вычислительной практике.