

Мавзу:

Коши масаласини Эйлер ва Рунге-Кутта
усулларида ечиш

Режа:

- 1. Масаланинг қўйилиши.*
- 2. Эйлер усули.*
- 3. Рунге-Кутта усули.*
- 4. Мисоллар.*

Масаланинг қўйилиши

Берилган ушбу

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

тенгламанинг

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини аниқланг.

Масаланинг қўйилиши

Берилган масalani қўйдаги стандарт кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{array} \right.$$

$$y(x_0) = y_0 ; \quad y_1(x_0) = y_{10} ; \quad \dots \quad ; \quad y_{n-1}(x_0) = y_{n-1,0}$$

Масалани вектор кўринишда ифодалаймиз:

$$\frac{dY}{dX} = F(X, Y) ; \quad Y(x_0) = Y_0 ;$$

$[a; b]$ оралиқни h қадам билан $N+1$ та тенг оралиқга ажратамиз:

$$a \leq X \leq b ; \quad a = X_0 \quad a = X_0 < X_1 < \dots < X_N = b$$

$$h = \frac{(b-a)}{N} ; \quad x_k = a + k \cdot h ; \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

Ҳар бир оралиқда берилган дифференциал тенгламани унга яқин бўлган чекли айирмага алмаштирамиз:

$$Y_{k+1} = Y_k + h \cdot F(X_k, Y_k) ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Бу формула *Эйлер формуласи* деб аталади ва у кетма-кет ечимларни топиш имконини беради.

Рунге-Кутта усули

Рунге-Кутта усули алгоритми куйидаги амаллар кетма-кетлигидан иборат:

$$K_1 = hF(X_k, Y_k); \quad K_2 = hF\left(X_k + \frac{h}{2}, Y_k + \frac{K_1}{2}\right);$$
$$K_3 = hF\left(X_k + \frac{h}{2}, Y_k + \frac{K_2}{2}\right); \quad K_4 = hF(X_k + h, Y_k + K_3);$$
$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6} \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Бу формула *Рунге-Кутта формуласи* деб аталади ва у кетма-кет ечимларни топиш имконини беради.

Масала

Қуйидаги $\frac{dy}{dx} = x + y; \quad y(0) = 1; \quad x \in [0, 1].$

Коши масаласини Эйлер ва Рунге-Кутта усуллари ёрдамида ечинг ва олинган натижаларни масаланинг аниқ ечими $y(x)=2e^x-x-1$ билан солиштиринг.

Эйлер усули:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot (0 + 1) = 1,1$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1 \cdot (0,1 + 1,1) = 1,1 + 0,12 = 1,22$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1,22 + 0,1 \cdot (0,2 + 1,22) = 1,22 + 0,142 = 1,362$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1,362 + 0,1 \cdot (0,3 + 1,362) = 1,362 + 0,1662 = 1,5282$$

.....

Масала

Рунге-Кутта усули:

$$K_1 = h(x_0 + y_0) = 0,1 \cdot (0 + 1) = 0,1;$$

$$K_2 = h\left(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{K_1}{2}\right) = 0,1 \cdot (0 + 0,05 + 1 + 0,05) = 0,11;$$

$$K_3 = h\left(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{K_2}{2}\right) = 0,1 \cdot (0 + 0,05 + 1 + 0,055) = 0,1105;$$

$$K_4 = h(x_0 + h + y_0 + K_3) = 0,1 \cdot (0 + 0,1 + 1 + 0,1105) = 0,12105;$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1 + \frac{1}{6}(0,1 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,1105 + 0,12105) \approx 1,1103.$$

$$K_1 = h(x_1 + y_1) = 0,1 \cdot (0,1 + 1,1103) = 0,121;$$

$$K_2 = h\left(x_1 + \frac{h}{2} + y_1 + \frac{K_1}{2}\right) = 0,1 \cdot (0,1 + 0,05 + 1,1103 + 0,0605) = 0,1321;$$

$$K_3 = h\left(x_1 + \frac{h}{2} + y_1 + \frac{K_2}{2}\right) = 0,1 \cdot (0,1 + 0,05 + 1,1103 + 0,066) = 0,1326;$$

$$K_4 = h(x_1 + h + y_1 + K_3) = 0,1 \cdot (0,1 + 0,1 + 1,1103 + 0,1326) = 0,1443;$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1,1103 + \frac{1}{6}(0,121 + 2 \cdot 0,1321 + 2 \cdot 0,1326 + 0,1443) = 1,2428.$$

Масала ечими

Аргумент	Аниқ ечим	Эйлер усули		Рунге-Кутта усули	
x_k	y	y_k	$ y-y_k $	y_k	$ y-y_k $
0,0	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0
0,1	1,1103	1,1000	0,0103	1,1103	$0,9 \cdot 10^{-6}$
0,2	1,2428	1,2200	0,0228	1,2428	$0,2 \cdot 10^{-5}$
0,3	1,3997	1,3620	0,0377	1,3997	$0,4 \cdot 10^{-5}$
0,4	1,5836	1,5282	0,0554	1,5836	$0,5 \cdot 10^{-5}$
0,5	1,7974	1,7210	0,0764	1,7974	$0,6 \cdot 10^{-5}$
0,6	2,0442	1,9431	0,1011	2,0442	$0,7 \cdot 10^{-5}$
0,7	2,3275	2,1974	0,1301	2,3275	$0,9 \cdot 10^{-5}$
0,8	2,6511	2,4872	0,1639	2,6511	$0,1 \cdot 10^{-4}$
0,9	3,0192	2,8159	0,2033	3,0192	$0,12 \cdot 10^{-4}$
1,0	3,4366	3,1875	0,2491	3,4365	$0,14 \cdot 10^{-4}$