Лекция №7. Численное вычисление площади поверхности конструктивных сечений. Методы прямоугольника, трапеции и Симпсона для решение задач.

При решении задач научного и инженерно-технического характера математическими методами часто возникает необходимость проинтегрировать какую-либо функцию. Есть функции, которые невозможно интегрировать аналитически, т.е. только в некоторых случаях по заданной функции можно найти первообразную. Общим способом интегрирования любых функций является численное интегрирование, методы которого в большинстве своем просты и легко переводятся на алгоритмические языки.

Геометрически интеграл функции $f(x)$ в пределах от a до b представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком этой функции, осью x и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Численные методы интегрирования используют замену площади криволинейной трапеции на конечную сумму площадей более простых геометрических фигур, которые могут быть вычислены точно. В этом смысле говорят об использовании квадратурных формул (по аналогии с задачей о квадратуре круга – построение квадрата с площадью, равной площади круга с определенным радиусом).

В большинстве методов используется приближенной представление интеграла в виде конечной суммы (квадратурная формула):

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

где c_i – постоянные, называемые весами, а x_i – принадлежат интервалу $[a, b]$ и называются узлами.

В основе квадратурных формул лежит идея аппроксимации на отрезке интегрирования графика подынтегрального выражения функциями более простого вида, которые легко могут быть проинтегрированы аналитически и, таким образом, легко вычислены. Наиболее просто задача построения квадратурных формул реализуется для полиномиальных математических моделей.

Многочлен (полином) порядка n имеет вид

$$L_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$$,

и определяется, таким образом, значениями (n+1) констант ai . Если известно значение функции в (n+1) точках $y_i = f(x_i)$ i = 0, 1, …, n, то данные параметры легко определяются из системы (n+1) линейных уравнений с (n+1) переменными ai

$$\begin{cases} a_n x_0^n & +a_{n-1}x_0^{n-1} & +\ldots+ & a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n & +a_{n-1}x_1^{n-1} & +\ldots+ & a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \ldots & \ldots & +\ldots+ & \ldots \; \ldots \; \ldots \\ a_n x_n^n & +a_{n-1}x_n^{n-1} & +\ldots+ & a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases}$$

Если все xi различны, то данная система уравнений имеет единственное решение, так как определитель системы, составленный из коэффициентов системы линейных уравнений (так называемый определитель Вандермонда) будет отличен от нуля

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 \; 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 \; 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n \; 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Определив коэффициенты интерполяционного многочлена, можно легко вычислить приближенное значение интеграла, заменив подынтегральную функцию на полученный многочлен

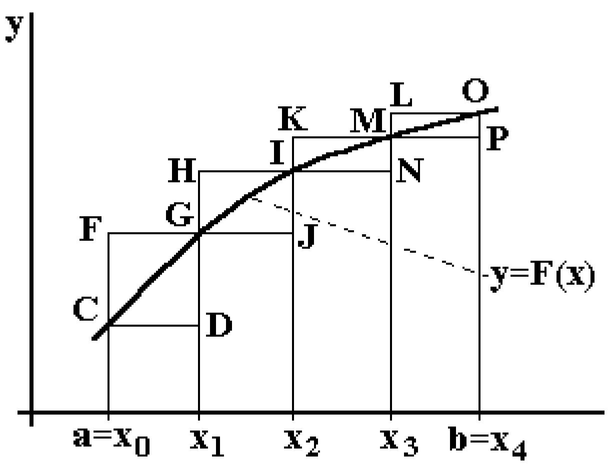
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b L_n(x)\,dx = \left(\frac{a_n x^{n+1}}{(n+1)} + \frac{a_{n-1}x^n}{n} + \ldots + \frac{a_1 x^2}{2} + a_0 x \right) \Bigg|_a^b$$

Узлы интерполирования на отрезке интегрирования могут быть расположены на равном удалении друг от друга (эквидистантные узлы). В этом случае для полинома степени n имеем следующее

$h = \dfrac{(b-a)}{n}$, $x_0 = a$, $x_i = a + i \cdot h$ $x_n = a + nh = b$

h – шаг, xi – узлы интерполирования.

При n = 0 получаем метод прямоугольников. График функции f(x) на отрезке интегрирования заменяется на горизонтальную линию (полином степени 0).



Формула прямоугольников.

Интегрирование методом прямоугольников (метод Эйлера).

Пусть функцию (рисунок справа) необходимо проинтегрировать численным методом на отрезке [a, b]. Разделим отрезок на N равных интервалов (на рисунке N = 4).

Площадь каждой из 4-х криволинейных трапеций можно заменить на площадь прямоугольника.

Ширина всех прямоугольников одинакова и равна $h = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{4}$

В качестве выбора высоты прямоугольников можно предложить выбрать значение функции на левой границе. В этом случае высота первого прямоугольника составит f(a), второго – f(x1), третьего – f(x2), последнего – f(x3). Приближенное значение интеграла получается суммированием площадей прямоугольников

$$I_л = f(x_0)h + f(x_1)h + f(x_2)h + f(x_3)h$$

Если в качестве выбора высоты прямоугольников взять значение функции на правой границе, то в этом случае высота первого прямоугольника составит f(x1), второго – f(x2), третьего – f(x3), последнего – f(b).

$$I_п = f(x_1)h + f(x_2)h + f(x_3)h + f(b)h$$

Как видно, в этом случае, одна из формул дает приближение к интегралу с избытком, а вторая с недостатком. Можно предложить еще один способ, очевидно лучший, чем обе эти формулы – использовать для аппроксимации значение функции в середине отрезка интегрирования.

$$I_c = f(\frac{x_0 + x_1}{2})h + f(\frac{x_1 + x_2}{2})h + f(\frac{x_2 + x_3}{2})h + f(\frac{x_3 + x_4}{2})h$$

В общем виде, если отрезок [a, b] разбить на N равных интервалов интегрирования (h) и к каждому интервалу применить формулу прямоугольников, то получим

$$h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{N}$$

$$I_л = h\sum_{i=0}^{N-1} f(a+ih) \qquad I_п = h\sum_{i=1}^{N} f(a+ih) \qquad I_c = h\sum_{i=0}^{N-1} f(a+ih+\frac{h}{2})$$

Формула трапеций

Использование для интерполяции полинома первой степени (прямая линия, проведенная через две точки) приводит к формуле трапеций. В качестве узлов интерполирования берутся концы отрезка интегрирования. Таким образом, криволинейная трапеция заменяется на обычную трапецию, площадь которой может быть найдена как произведение полусуммы оснований на высоту.

$$I = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}h$$

В случае N отрезков интегрирования для всех узлов, за исключением крайних точек отрезка, значение функции войдет в общую сумму дважды (так как соседние трапеции имеют одну общую сторону).

$$h = \frac{(b-a)}{N} \qquad I = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih)\right]$$

Интересно, что формула трапеций может быть получена, если взять половину суммы формул прямоугольников по правому и левому краям отрезка

$$I_л = h\sum_{i=0}^{N-1} f(a+ih) \qquad I_п = h\sum_{i=1}^{N} f(a+ih)$$

$$\frac{I_л + I_п}{2} = h\frac{\sum_{i=1}^{N} f(a+ih) + \sum_{i=0}^{N-1} f(a+ih)}{2} = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih)\right]$$

Проиллюстрируем использование формулы трапеций на примере рисунка 1

$$I = \left[\frac{F(a)}{2} + F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + \frac{F(b)}{2}\right]h$$

Величину I можно представить как сумму площадей трапеций (в данном случае четырех)

$$T_1 = x_0 \leftrightarrow C \leftrightarrow G \leftrightarrow x_1 \leftrightarrow x_0 = h[f(x_0) + f(x_1)]/2$$
$$T_2 = x_1 \leftrightarrow G \leftrightarrow I \leftrightarrow x_2 \leftrightarrow x_1 = h[f(x_1) + f(x_2)]/2$$
$$T_3 = x_2 \leftrightarrow I \leftrightarrow M \leftrightarrow x_3 \leftrightarrow x_2 = h[f(x_2) + f(x_3)]/2$$
$$T_4 = x_3 \leftrightarrow M \leftrightarrow O \leftrightarrow x_4 \leftrightarrow x_3 = h[f(x_3) + f(x_4)]/2$$

$$I = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

Проверка устойчивости решения

Как правило, чем меньше длина каждого интервала, т.е. чем больше число этих интервалов, тем меньше различаются приближенное и точное значение интеграла. Это справедливо для большинства функций. В методе трапеций ошибка вычисления интеграла (δ) приблизительно пропорциональна квадрату шага интегрирования h 2

δ ~ h 2

Таким образом, для вычисления интеграла некоторой функции в пределах a, b необходимо разделить отрезок [a, b] на n0 интервалов и найти сумму площадей трапеций. Затем нужно увеличить число интервалов (n1), опять вычислить сумму трапеций и сравнить полученное значение с предыдущим результатом. Это следует повторять до тех пор (ni), пока не будет достигнута заданная точность результата (критерия сходимости).

Для методов прямоугольников и трапеций обычно на каждом шаге итерации число интервалов увеличивается в 2 раза, т.е. ni+1 = 2 ni. Алгоритм процедуры интегрирования можно записать следующим образом:

интеграл (I) рассчитывается по формуле

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right] + h\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\,h)$$, где $$h = \frac{b-a}{n}$$,

а критерий сходимости

$$\left|\frac{I(h/2)-I(h)}{I(h/2)}\right| \le \varepsilon$$

Главное преимущество правила трапеций – его простота. Однако если при вычислении интеграла требуется высокая точность, применение этого метода может потребовать слишком большого количества итераций или машинного времени.

Пример:

Пользуясь правилом трапеций вычислить интеграл $\int_0^1 x^2 dx$. (Точное решение 1/3)

Для n = 1 $\quad h=\frac{1-0}{1}=1 \qquad I=\frac{1}{2}[F(0)+F(1)]=\frac{1}{2}(0+1)=0{,}5$

$$h=\frac{1-0}{2}=0{,}5$$

Для n = 2 $\quad I=\frac{1}{4}\left[F(0)+F(1)+\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{4}(0+1)+\frac{1}{2}\frac{1}{4}=\frac{3}{8}=0{,}375$

Для n = 4 $\quad h=\frac{1-0}{4}=0{,}25$

$$I=\frac{1}{4}[F(0)+F(1)+\sum_{i=1}^{3}F(0+0{,}25i)]=$$

$$=\frac{1}{8}(0+1)+\frac{1}{4}\left[F(0{,}25)+F(0{,}5)+F(0{,}75)\right]=\frac{22}{64}=0{,}34375$$

Для n = 64 $\quad h=0{,}0156 \qquad I=0{,}333$

Использование трех точек для интерполирования подынтегрального выражения позволяет использовать параболическую функцию (полином второй степени). Это приводит к формуле Симпсона приближенного вычисления интеграла.

Рассмотрим произвольный интеграл

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

Воспользуемся заменой переменной таким образом, чтобы границы отрезка интегрирования вместо [a,b] стали [-1,1], для этого введем переменную z:

$$z = \frac{2x - a - b}{b - a}$$, Тогда $$x = \frac{z(b-a) + a + b}{2}$$ и $$dx = \frac{(b-a)}{2}dz$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{z(b-a)+a+b}{2})dz$$

Рассмотрим задачу интерполирования полиномом второй степени (параболой) подынтегральной функции, используя в качестве узлов три равноудаленные узловые точки – z = -1, z = 0, z = +1 (шаг равен 1, длина отрезка интегрирования равна 2). Обозначим соответствующие значения подынтегральной функции в узлах интерполяции

$$f(-1) = f_{-1} \qquad f(0) = f_0 \qquad f(+1) = f_1$$

Система уравнений для нахождения коэффициентов полинома

$L_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, проходящего через три точки $(-1, f_{-1})$, $(0, f_0)$ и $(+1, f_{+1})$

Примет вид

$$\begin{cases} a_2(-1)^2 & +a_1(-1) & +a_0 = f_{-1} \\ a_2(0)^2 & +a_1(0) & +a_0 = f_0 \\ a_2(+1)^2 & +a_1(1) & +a_0 \quad f_1 \end{cases}$$ или $$\begin{cases} a_2 & -a_1 & +a_0 = f_{-1} \\ & & +a_0 = f_0 \\ a_2 & +a_1 & +a_0 \quad f_1 \end{cases}$$

Коэффициенты легко могут быть получены

$$\begin{cases} a_0 = f_0 \\ a_1 = \dfrac{f_1 - f_{-1}}{2} \\ a_2 = \dfrac{1}{2}\left(f_1 - 2f_0 + f_{-1}\right) \end{cases}$$

Вычислим теперь значение интеграла от интерполяционного многочлена

$$\int_{-1}^{1} L_2(x)dx = \left(\frac{a_2x^3}{3} + \frac{a_1x^2}{2} + a_0x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{2a_2}{3} + 2a_0\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(f_1 - 2f_0 + f_{-1}\right) + 2f_0$$

$$= \frac{1}{3}f_1 - \frac{2}{3}f_0 + \frac{1}{3}f_{-1} + 2f_0 = \frac{1}{3}(f_1 + 4f_0 + f_{-1})$$

Путем обратной замены переменной вернемся к исходному интегралу. Учтем, что

$z = -1$ соответствует $x = \dfrac{-1(b-a) + a + b}{2} = a$

$z = 0$ соответствует $x = \dfrac{0(b-a) + a + b}{2} = \dfrac{a+b}{2} = a + h$

$z = +1$ соответствует $x = \dfrac{(+1)(b-a) + a + b}{2} = b = a + 2h$

Получим формулу Симпсона для произвольного интервала интегрирования:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f(a+h) + f(b)\right)$$, и $h = \dfrac{b-a}{2}$

При необходимости, исходный отрезок интегрирования может быть разбит на N сдвоенных отрезков, к каждому из которых применяется формула Симпсона. Шаг интерполирования при этом составит

$$h = \frac{b-a}{2N}$$

Для первого отрезка интегрирования узлами интерполирования будут являться точки a, a+h, a+2h, для второго – a+2h, a+3h, a+4h, третьего a+4h, a+5h, a+6h и т.д. Приближенное значение интеграла получается суммированием N площадей:

$$I \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{3}(f(a + (2i-2)h) + 4f(a + (2i-1)h) + f(a + 2ih)$$

В данную сумму входят одинаковые слагаемые (для внутренних узлов с четным значением индекса - 2i). Поэтому можно перегруппировать слагаемые в этой сумме таким образом

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(a) - f(b) + 4\sum_{i=1}^{N} f(a+(2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{N} f(a+2ih) \right]$$

, что эквивалентно

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{N} f(a+(2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a+2ih) \right]$$

, так как $f(a+2Nh) = f(b)$

Погрешность этого приближенного метода уменьшается пропорционально длине шага интегрирования в четвертой степени, т.е. при увеличении числа интервалов вдвое ошибка уменьшается в 16 раз

δ ~ h 4

Пример:

Пользуясь правилом Симпсона вычислить интеграл $\int_0^1 x^4 dx$. (Точное решение - 0,2)

Для n = 1

$$h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2} \qquad I = \frac{1}{6}[F(0) + 4F(\frac{1}{2}) + F(1)] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[(0) + 4(\frac{1}{16}) + 1 \right] = 0{,}20833$$

Для n = 2

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$I = \frac{1}{12}[F(0) + 4F(\frac{1}{4}) + 2F(\frac{1}{2}) + 4F(\frac{3}{4}) + F(1)] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[(0) + 4(\frac{1}{256}) + 2(\frac{1}{16}) + 4(\frac{81}{256}) + 1 \right] = 0{,}20052$$

Правило Симпсона позволяет точно рассчитать интеграл не только от квадратичной функции, но и для полинома третей степени

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{6}\left[F(0) + 4F(\frac{1}{2}) + F(1) \right] = \frac{1}{6}\left[0 + \frac{4}{8} + 1 \right] = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$