Лекция №9. Двойственность в ЗЛП. Методы создания и решения двойственных симплексных таблиц. Решение двойственных задач.

Рассмотрим математическую модель следующей задачи:

Задача №1. Предприятие использует m вида сырьё для изготовления n вида продуктов. Даны запасы сырья $a_1, a_2, \ldots, a_n$, прибыль от одной единицы продуктов $c_2, c_2, \ldots c_n$, объём сырья для изготовления единицы продуктов $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nm}$. Составить план изготовления продуктов так, чтобы при этом расход сырья не превышал запасы сырья, получить максимальную прибыль от реализации продукта. Неизвестен объём изготавливаемых продуктов. Обозначим их через $x_1, x_2, \ldots x_n$. 1- вид сырья, которое используется для изготовления одной единицы продуктов. Умножая a_{11} на x_1, получаем общий расход сырья 1-вида для изготовления продуктов 1-вида. Аналогично получаем расходы сырья для остальных продукций: $a_{12}x_2, a_{13}x_3, a_{1n}x_n$. Слагая полученные выражения, имеем общий расход сырья 1-вида:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

По условию расход сырья не должен превышать его запасы:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1$$

Аналогичные соотношения имеем для остального сырья:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_m$$

Прибыль от реализации продуктов имеет вид соответственно: $c_1x_1,\ c_2x_2, \ldots, c_nx_n$. Общая прибыль от реализации всех продуктов имеет вид: $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$. По условию мы должны получить максимальную прибыль:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$$

Объём выпускаемой продукции не должен принимать отрицательных значений. Это условие обозначается следующим образом:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots, x_n \ge 0$$

Объединив вышеуказанные соотношения, имеем математическую модель рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le a_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_m \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots, x_n \ge 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Задача №2. Предприятие должно покупать несколько видов сырья из одного хозяйства. Стоимость сырья $u_1, u_2, \ldots, u_m$ должна быть такой, чтобы была выполнялись следующие условия:

1) предприятие должно минимизировать стоимость сырья;

2) хозяйству должны платить такую сумму, чтобы эта сумма не была меньше, чем прибыль хозяйства от реализации продуктов при переработке сырья.

Обозначим через $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$-запасы сырья, $a_{ij}, i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m$-объём сырья вида j, используемого для изготовления продуктов вида i, $c_1,\ c_2, \ldots, c_n$ -

стоимость одной единицы продуктов. Общая стоимость продуктов имеет вид: $w = a_1 \ + a_2u_2 + \ldots + \ a_mu_m$, которую необходимо минимизировать: $w = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + \ a_mu_m \to min$. Общая стоимость сырья для изготовления одной единицы продукта первого вида имеет вид: $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + \ a_{m1}u_m$, и она не должна быть меньше, чем стоимость продукта первого вида: $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + \ a_{m1}u_m \ge c_1$. Аналогичные соотношения получаем для остальных продукций:

$$
\begin{array}{l}
a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + \ a_{m2}u_m \ge c_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + \ a_{mn}u_m \ge c_n
\end{array}
$$

Стоимость сырья не должна принимать отрицательных значений :

$$u_1 \ge 0 \ , \ \ u_2 \ge 0 \ , \ \ldots, \ u_m \ge 0$$

Объединяя вышеуказанные соотношения, получаем математическую модель рассматриваемой задачи:

$$
\begin{array}{l}
w = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + \ a_mu_m \to min \\
a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + \ a_{m1}u_m \ge c_1 \\
a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + \ a_{m2}u_m \ge c_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + \ a_{mn}u_m \ge c_n \\
u_1 \ge 0 \ , \ \ u_2 \ge 0 \ , \ \ldots, \ u_m \ge 0
\end{array}
\qquad (2)
$$

Одна из задач (1) и (2) называется прямой, а вторая - двойственной относительно первой.

Если дана прямая задача, то двойственная задача строится следующим образом:

1) В качестве коэффициентов целевой функции двойственной задачи берём свободные члены прямой задачи;

2) Если целевая функция прямой задачи стремится к максимуму, то целевая функция двойственной задачи стремится к минимуму;

3) Число неравенств двойственной задачи равно числу неизвестных прямой задачи, и наоборот число неравенств прямой задачи равно числу неизвестных двойственнной задачи;

4) Матрица коэффициентов двойственной задачи получается транспонированием матрицы коэффициентов прямой задачи;

5) Если неравенства прямой задачи имеют вид $\ge$, то неравенства двойственной задачи имеют вид $\le$;

6) В качестве свободных членов двойственной задачи берём коэффициенты целевой функции прямой задачи;

Прямую и двойственную задачу можно решать с помощью одной симплексной таблицы. Для этого неравенства обеих задач приводится к виду ≥ 0.

Прямая задача:

$$
\begin{array}{l}
z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + \ c_nx_n \ \to max \\
y_1 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n \ + a_1 \ge 0 \\
y_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - \ a_{2n}x_n \ + a_2 \ge 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..
\end{array}
$$

$$y_m = -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n + a_m \geq 0$$
$$x_1 \geq 0\ ,\ \ x_2 \geq 0\ ,\ \ldots,\ x_n \geq 0$$

Двойственная задача:

$$w = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + \ a_mu_m \to min$$
$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + \ a_{m1}u_m - c_1 \geq 0$$
$$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + \ a_{m2}u_m - c_2 \geq 0$$
…………………………………………..
$$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + \ a_{mn}u_m - c_n \geq 0$$
$$u_1 \geq 0\ ,\ \ u_2 \geq 0\ ,\ \ldots,\ u_m \geq 0$$

Для полученных соотношений составляем следующую симплексную таблицу:

Двойственная задача		$v_1 =$	$v_2 =$	…	$v_n =$	$w =$
	Прямая задача	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	1
u_1	$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	a_1
u_2	$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…
u_m	$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	a_m
1	$z =$	c_1	c_2	…	c_n	0

Выполняя симплексные преобразования в этой таблице, получаем оптимальное решение обеих задач. В прямой задаче значение переменной x 2-столбца и значение целевой функции z приравнивается соответствующим свободным членам, значений переменной x, находящево 2- строке, приравнивается нулю. В двойственной задаче значение переменной u 1-строки и значение целевой функции w приравниваются соответствующим свободным членам, значение переменной u, находящееся 1- столбце, приравнивается нулю.

Для рассматриваемой задачи составляем двойственную задачу и находим оптимальные решения для этих задач.

$$z = 12x_1 + 6x_2 - 7x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \leq 12 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 8 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 \leq 11 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Составляем двойственную задачу для рассматриваемой прямой задачи:

$$w = 5u_1 + 12u_2 + 8u_3 + 11u_4 \to min$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 \geq 12 \\ u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 \geq 6 \\ -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 \geq -7 \end{cases}$$

$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0,\ u_4 \geq 0$$

Обе задачи приводятся к виду ≥0:

$$z = 12x_1 + 6x_2 - 7x_3 \to max$$

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 + x_3 + 5 \geq 0 \\ y_2 = -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 12 \geq 0 \\ y_3 = -x_1 + 3x_2 - x_3 + 8 \geq 0 \\ y_4 = -2x_1 - 8x_2 + x_3 + 11 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

$$w = 5u_1 + 12u_2 + 8u_3 + 11u_4 \to min$$

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 - 12 \geq 0 \\ v_2 = u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 - 6 \geq 0 \\ v_3 = -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 + 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0,\ u_4 \geq 0$$

Составляем симплексную таблицу для вышеуказанных соотношений:

Двойственная задача		$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$w =$
	Прямая задача	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
u_1	$y_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	2	4	-5	12
u_3	$y_3 =$	1	-3	1	8
u_4	$y_4 =$	2	8	-1	11
1	$z =$	-12	-6	7	0

Все свободные члены прямой задачи неотрицательны, поэтому считается, что опорное решение существует. Чтобы найти оптимальное решение, выбираем наименьшее число в строке z: -12. Столбец , где находится число -12, является разрешающим столбцом. На положительные числа разрешающего столбца делим соответствующие свободные члены, и составляем симплексные соотношения. Среди этих соотношений находим наименьшее: $min\left\{\frac{5}{1}, \frac{12}{2}, \frac{8}{1}, \frac{11}{2}\right\} = 5$. Коэффициент 1, который соответствует минимальному соотношению, выбираем в качестве разрешающего элемента. 1- строка будет разрешающей. Таблица принимает следующий вид:

1-таблица

Двойственная задача	Прямая задача	$v_1 =$ $-x_1$	$v_2 =$ $-x_2$	$v_3 =$ $-x_3$	$w =$ 1
u_1	$y_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	2	4	-5	12
u_3	$y_3 =$	1	-3	1	8
u_4	$y_4 =$	2	8	-1	11
1	$z =$	-12	-6	7	0

Выполняя симплексные преобразования, переходим к следующей таблице:

2-таблица

Двойственная задача	Прямая задача	$u_1 =$ $-y_1$	$v_2 =$ $-x_2$	$v_3 =$ $-x_3$	$w =$ 1
v_1	$x_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	-2	2	-3	2
u_3	$y_3 =$	-1	-4	2	3
u_4	$y_4 =$	-2	6	1	1
1	$z =$	12	6	-5	60

В 2-таблице в строке z столбец содержащий -5, является разрешающим, а разрешающий элемент будет 1, соответствующий минимальному соотношению $min\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{1}\right\}=1$.

Двойственння задача	Прямая задача	$u_1 =$ $-y_1$	$v_2 =$ $-x_2$	$v_3 =$ $-x_3$	$w =$ 1
v_1	$x_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	-2	2	-3	2
u_3	$y_3 =$	-1	-4	2	3
u_4	$y_4 =$	-2	6	1	1
1	$z =$	12	6	-5	60

Выполняя симплексные преобразования, переходим к следующей таблице:

3-таблица

Двойственная задача		$u_1 =$	$v_2 =$	$u_4 =$	$w =$
	Прямая задача	$-y_1$	$-x_2$	$-y_4$	1
v_1	$x_1 =$	-1	7	1	6
u_2	$y_2 =$	-8	20	3	5
u_3	$y_3 =$	3	-16	-2	1
v_3	$x_3 =$	-2	6	1	1
1	$z =$	2	36	5	65

В прямой задаче переменные x находящиеся в 2- строке, приравниваем нулю, переменные x находящиеся во 2- столбце, и целевую функцию z приравниваем соответствующим свободным членам: $x_1 = 6,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ z_{max} = 65$. В двойственной задаче переменные u первого столбца приравниваются нулю, а переменные u первой строки и целевую функцию w приравниваем соответствующим свободным членам:

$u_1 = 2,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_4 = 5,\ w_{min} = 65$.