Эконометрические модели

Лектор: доцент Мирзаев С.С.

9 февраля 2019 г.

План:

Введение

1. Корреляционные модели
2. Парный регрессионный анализ
3. Множественный регрессионный анализ

Определение эконометрики

Эконометрика – наука, исследующая количественные закономерности и взаимозависимости в экономике при помощи методов математической статистики

Основные задачи статистического анализа

- Выявление наличия или отсутствия взаимосвязи между изучаемыми факторами (корреляционный анализ)
- Определение вида взаимосвязи между изучаемыми факторами (регрессионный анализ)
- Проверка гипотезы о виде взаимосвязи между факторами

Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости

- Две случайные величины могут быть связаны либо ***функциональной*** зависимостью, либо зависимостью другого рода, называемой ***статистической***, либо быть ***независимыми.***
- *Функциональная* зависимость: Если каждому значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют функцией случайного аргумента X:

$$Y = \varphi(X)$$

Статистическая зависимость

- *<u>Статистической</u>* называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение ***распределения*** другой
- В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется ***среднее*** значение другой; в этом случае статистическую зависимость называют ***<u>корреляционной</u>***

Корреляционные модели

- Пусть изучается зависимость между факторами ***(X, Y)***. В результате ***n*** независимых опытов получены ***n*** пар чисел:

$$(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$$

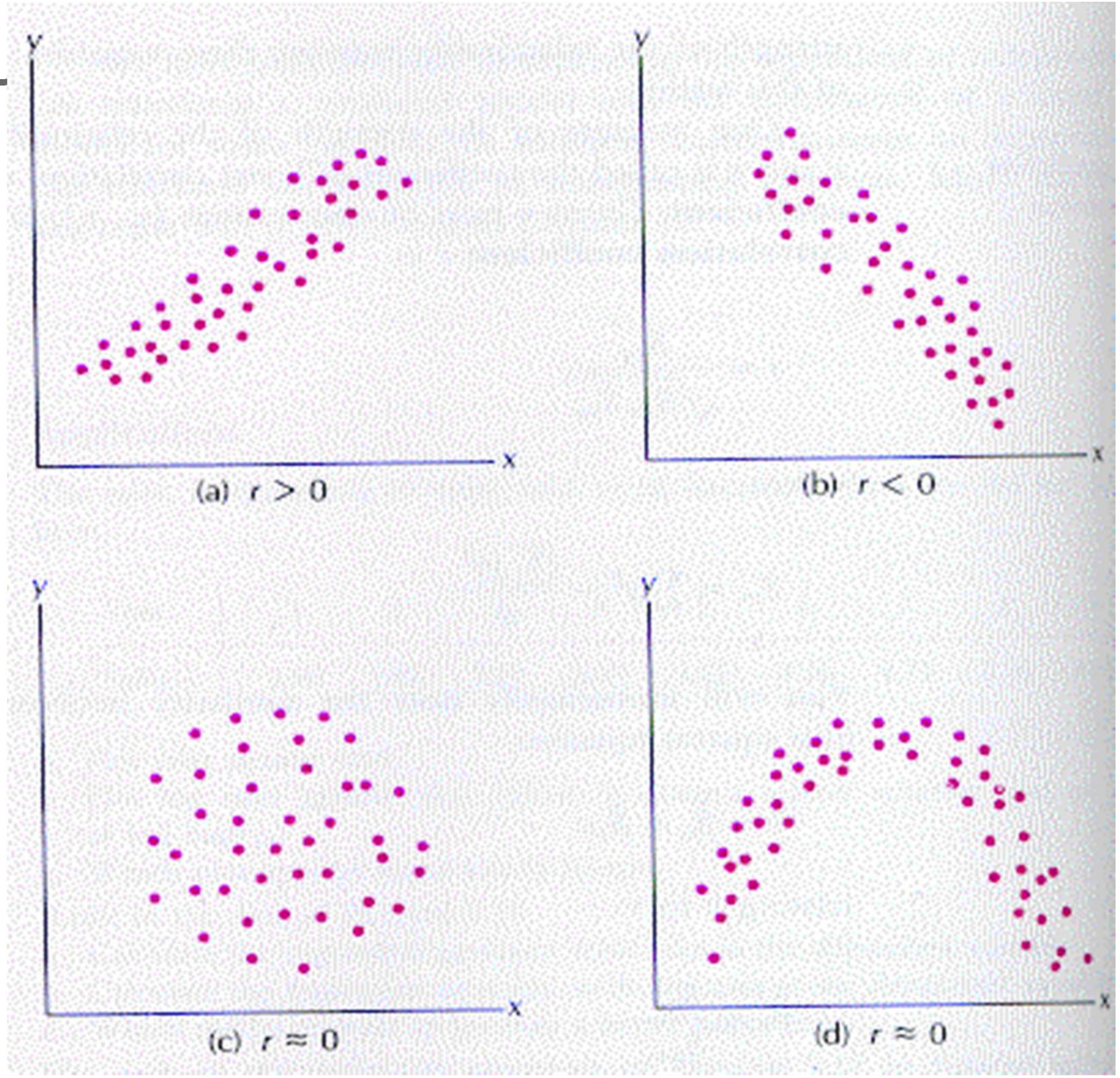
Тесноту связи между двумя взаимозависимыми рядами характеризует ***коэффициент линейной корреляции***, который показывает, существует ли и насколько велика связь изучаемых явлений

$$r = \frac{\sum (x - \overline{x})(y - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x - \overline{x})^2 \sum (y - \overline{y})^2}}$$

Коэффициент корреляции

- Коэффициент корреляции r может принимать значения от -1 до 1. Если r<0, то связь обратная, если r>0, то связь прямая

ʉ ɘtsʔfnʝsɘʘ r



Коэффициент корреляции

- Коэффициент корреляции указывает следующую степень связи:
- $0 \div \pm 0{,}15$ – отсутствие связи
- $\pm 0{,}16 \div \pm 0{,}20$ – плохая
- $\pm 0{,}21 \div \pm 0{,}30$ – слабая
- $\pm 0{,}31 \div \pm 0{,}40$ – умеренная
- $\pm 0{,}41 \div \pm 0{,}60$ – средняя
- $\pm 0{,}61 \div \pm 0{,}80$ – высокая
- $\pm 0{,}81 \div \pm 0{,}9$ – очень высокая
- $\pm 0{,}91 \div \pm 1{,}0$ – полная

Коэффициент детерминации

При анализе взаимосвязи между факторами также вычисляют *коэффициент детерминации (r-квадрат)*

$$D = r^2$$

Коэффициент детерминации

- Коэффициент детерминации показывает, какое влияние оказывают выбранные факторы на результативный показатель
- Например, если ***r = 0.9*** (***r*** - коэффициент корреляции), то ***D=0.81***, то есть величина результативного показателя на ***81%*** ***(0.81·100)*** зависит от изменения исследуемых факторов

При анализе тесноты связи между переменной и несколькими факторами определяют <u>*коэффициент множественной корреляции*</u> по формуле

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_i (y_i - \overline{Y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \overline{y}_i)^2}}$$

Парный регрессионный анализ

- Коэффициент корреляции показывает, что две переменные связаны друг с другом, однако он не дает представления о том, каким образом они связаны.
- Для определения вида зависимости между переменными проводят регрессионный анализ

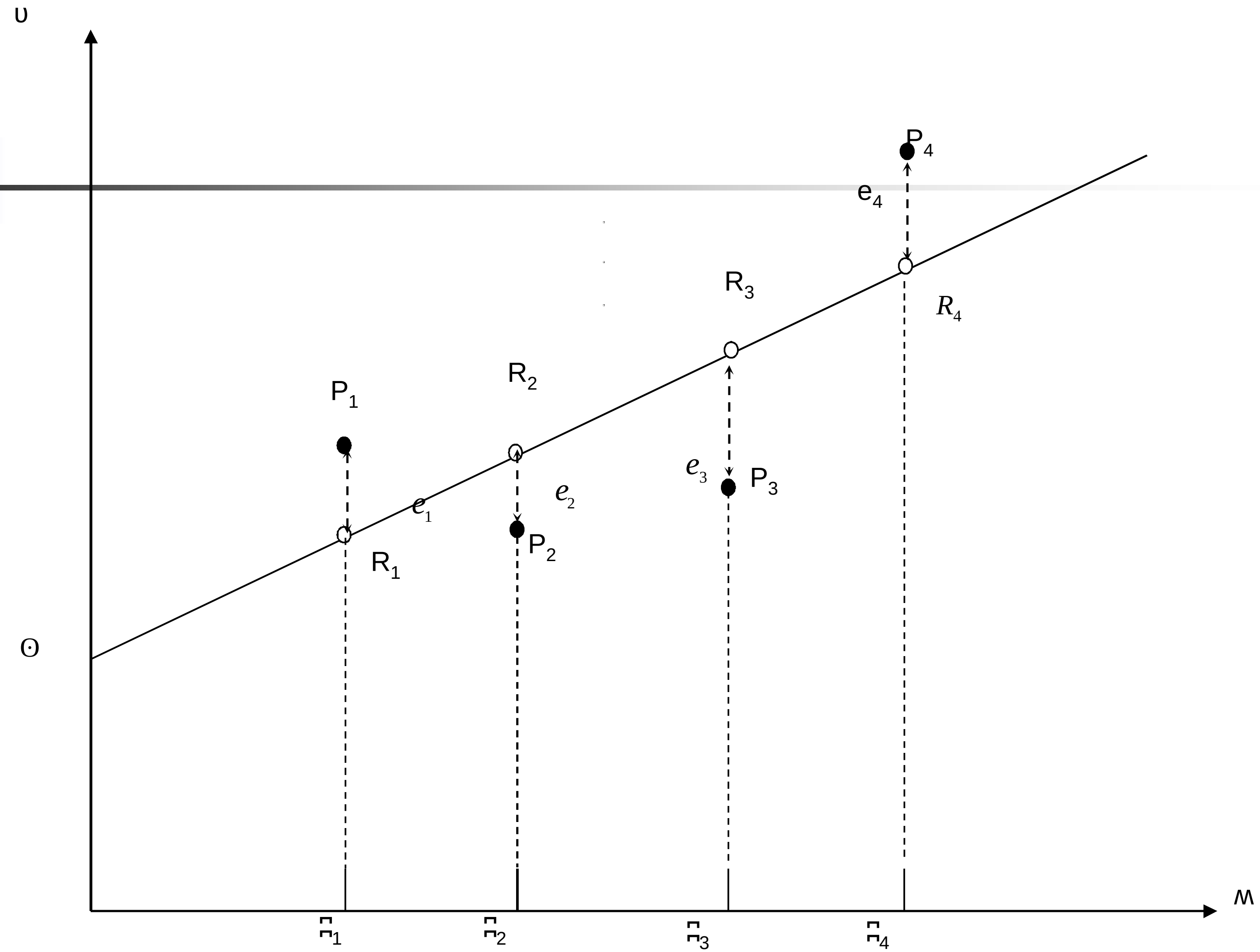
Рассмотрим более подробно случай, когда одна переменная зависит от другой. Рассмотрим простейшую, т.е. линейную модель

$$Y = \alpha + \beta x$$

Оценка параметров по методу наименьших квадратов

Допустим, что мы имеем четыре наблюдения для X и Y.

Мы хотим построить линию регрессии таким образом, чтобы отклонения были минимальными.



P1
P2
P3
P4
R1
R2
R3
R4
e1
e2
e3
e4

Одним из способов решения поставленной проблемы состоит в минимизации суммы квадратов отклонений

$$S(a,b)=\sum_{i}(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2\to min$$

Система нормальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = -2 \displaystyle\sum_{i=2}^{n} (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = -2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i) x_i = 0 \end{cases}$$

Решение системы

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

$$a = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

Пример

–	[illegible] (X1)	[illegible] (X2)	[illegible] (Y)
1	31	75	22
2	34	72	23
3	40	79	23
4	44	81	24
5	51	83	25
6	56	81	25
7	62	90	27
8	64	95	29
9	69	100	31
10	75	95	33
11	81	110	34
12	83	115	36
13	88	110	35
14	95	120	36
15	98	130	37

Получено следующее уравнение регрессии:

$$\hat{y} = 1{,}39 + 0{,}28\,x$$

Полученный результат можно истолковать следующим образом. Если количество вносимых удобрений увеличить на 1 кг, то урожайность увеличится в среднем на 0,28 ц/га. Если $x = 0$, то прогнозируемый уровень урожайности равняется 1,39 ц/га

Множественный регрессионный анализ

Множественный регрессионный анализ является развитием парного регрессионного анализа применительно к случаям, когда зависимая переменная гипотетически связана с более чем одной независимой переменной

Рассмотрим пример, который исследован для парной зависимости (пример 2).
Теперь исследуем зависимость урожайности от двух факторов: балла бонитета и количества вносимых удобрений. Получим следующее уравнение регрессии:

$$\hat{y} = 12{,}35 + 0{,}23x_1 + 0{,}02x_2$$

Полученное уравнение следует интерпретировать следующим образом. При каждом увеличении балла бонитета земли на 1 балл урожайность увеличится на 0,23 ц/га. На каждую единицу увеличения вносимых удобрений урожайность увеличится на 0,02 ц/га. Коэффициент множественной корреляции *r = 0,81*, то есть связь между исследуемыми факторами и урожайностью хлопка очень высокая*;* коэффициент детерминации *D = 0,7*, то есть изменение значений урожайности на 70% зависит от исследуемых факторов, и на 30% – от других факторов, не включенных в модель