Гармоник тебранишлар Маятниклар

Тебранма ҳаракат ҳақида тушунча. Гармоник тебранма ҳаракат кинематикаси ва динамикаси. Гармоник тебранма ҳаракат энергияси. Тебранишларнинг скаляр ва вектор қўшилиши. Математик, физик, пружинали маятниклар ва тебраниш контури.

Табиатда, Фан ва техниканинг турли сохаларида биз жисмнинг ҳаракат ҳолати аниқ вақт оралиғидан сўнг такрорланиб туришини кўплаб кузатишимиз мумкин. Жисмнинг мувозанат ҳолатидан чиқиб қарама-қарши йўналишлардаги ҳаракатининг даврий такрорланиб туриши тебранма ҳаракат дейилади. Тебранма жараёнлар турли бўлишига қарамай, уларнинг барчаси умумий қонуниятлар асосида юзага келади. Бунинг учун жисм мувозанат вазиятига эга бўлиши зарур ва уни шу ҳолатидан чиқарилгач, аввалги вазиятига қайтарувчи куч пайдо бўлиши керак.

Агар жисм дастлаб олган энергияси хисобига ўз тебранишларини анча вақт амалга ошириб турса, бундай тебранишлар эркин ёки хусусий тебранишлар дейилади. Уларнинг ичида энг содда кўринишидагиси гармоник тебранишлардир. Гармоник тебранишлар жисмнинг тебраниши вақт ўтиши билан **синус ёки косинус қонуни бўйича** бажарилганда юзага келади.

$$Y = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

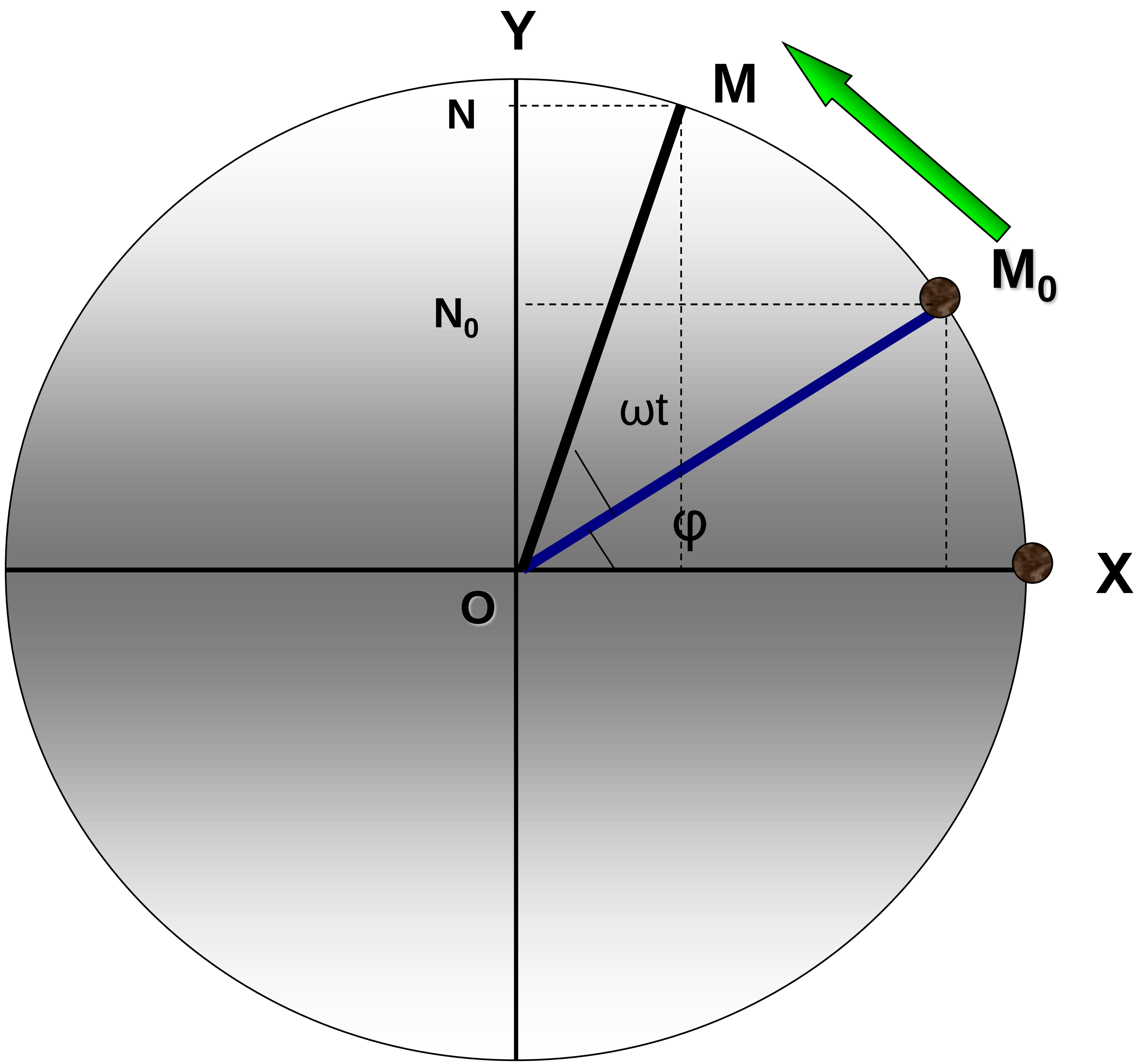
А–тебранишлар амплитудаси (максимал силжиши) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ доиравий ёки циклик частота, $\boldsymbol{\omega t}+\boldsymbol{\varphi}$ - тебранишлар фазаси, $\boldsymbol{\varphi}$- бошланғич фаза (t =0 ондаги фаза), $\boldsymbol{\nu}$-частота (хар секунддаги тебранишлар сони), Т-тебранишлар даври.

Қуйида тебранма ҳаракатлар турларидан айримларини келтирамиз:

Оддий тебранма ҳаракатлар

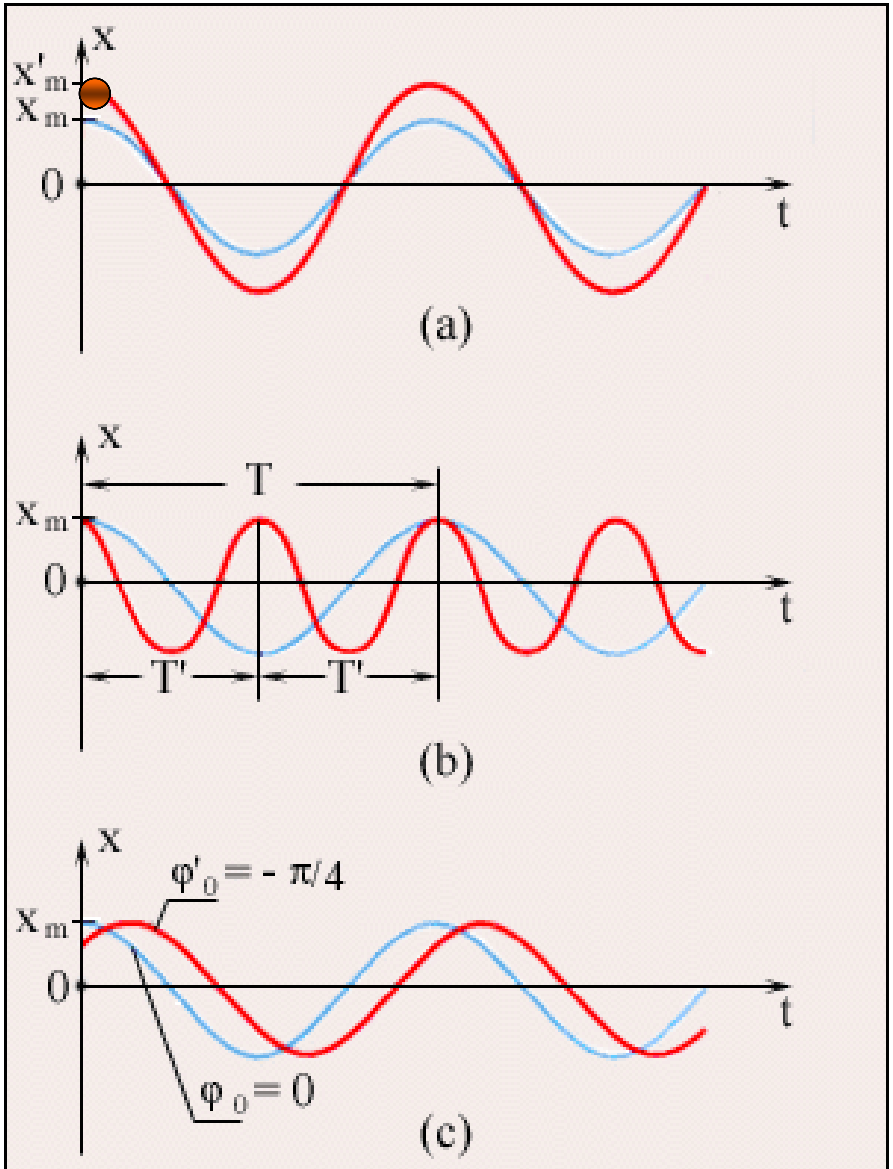
- Тебранма харакатга мисоллар

Мисол. М нуқта А радиусли айлана бўйлаб $\omega = \frac{2\pi}{T}$ бурчак тезлик билан ҳаракатланаётган бўлсин. 1-расм. t =0 онда Y M_0 нуқтада бўлади. Шу нуқтага ўтказилган айлананинг радиуси О M_0 худди шундай бурчак тезлик билан стрелка йўналишида айланади. Агар t=0 онда радиус горизонтал билан φ бурчак ҳосил қилган бўлса, t вақт ўтгандан сўнг эса бу бурчак ωt+φ қийматга эга бўлади. М нуқтанинг тик диаметрга проекцияси О нуқта атрофида гармоник тебранишлар ҳосил қилади. Нуқтанинг силжиши (1) формула билан ифодаланади. М нуқтанинг X ўққа проекцияси хам шундай қонун асосида тебранади. (Анимацион роликларга қаранг) t=0

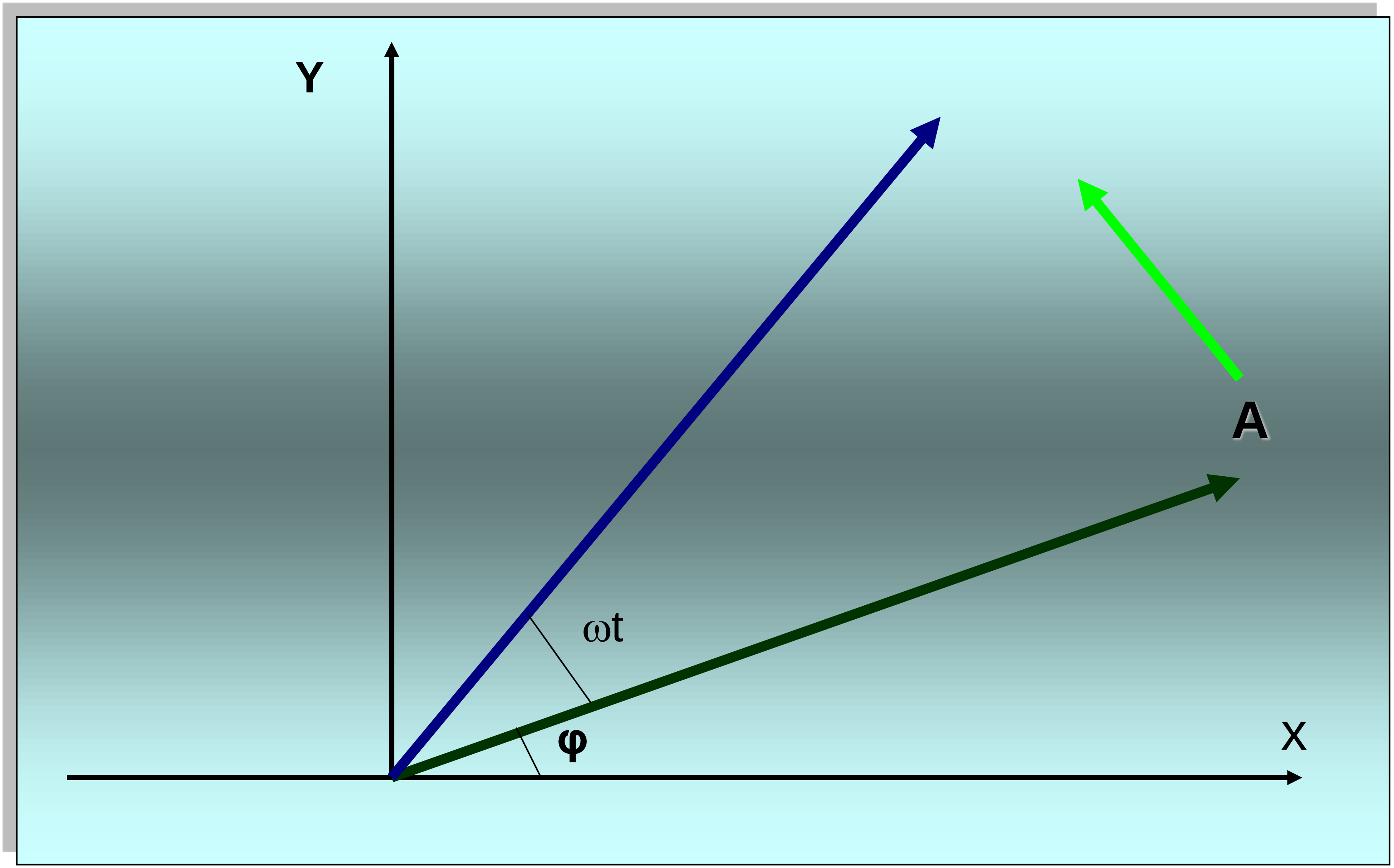


[Flash animation]

Силжишни **график** **асосда тасвирлаш мумкин. Бунинг учун горизонтал ўққа вақт, вертикал ўққа эса силжиш катталиги қўйилади**



Гармоник тебранишларнинг график тасвирлаш усулларидан яна бири **вектор диаграммалар** усули ҳисобланади.



Нуқтанинг силжишини t вақт мобайнида босиб ўтилган йўл сифатида қараб, унинг тезлигини топиш мумкин.

$$\vartheta = \frac{dY}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Тезланиш эса:

$$a = \frac{d\vartheta}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 y \qquad (3)$$

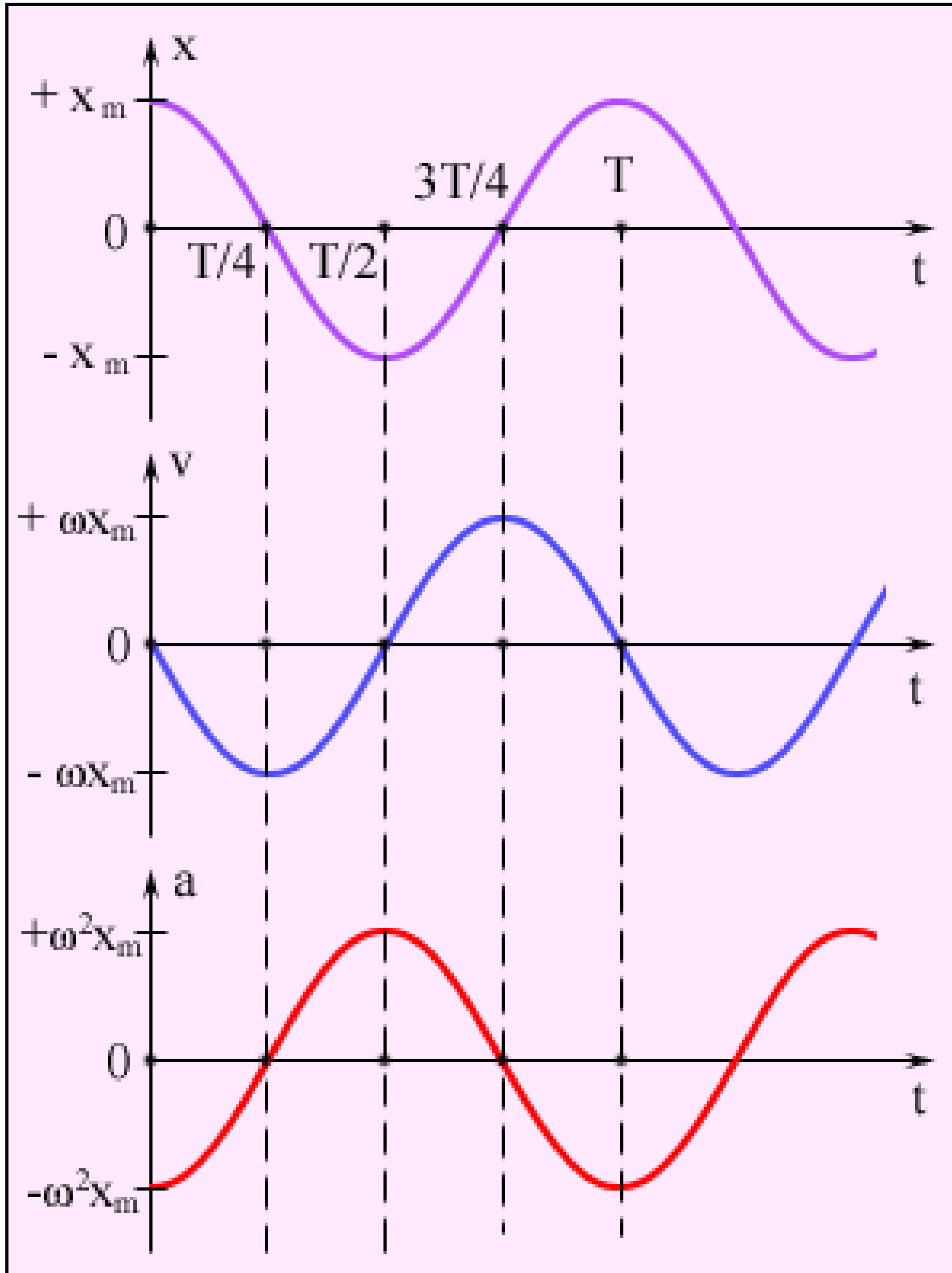
Демак, гармоник тебранаётган нуқтанинг тезланиши силжишга пропорционал бўлиб, тескари йўналган бўлади.

Кейинги слайда, силжиш катталиги, тезлик ва тезланишнинг вақт бўйича ўзгариши графиклари келтирилган .

X(t) координата

V(t)   тезлик

a(t) тезланиш



Гармоник тебранишлар учун динамикани 2-чи қонуни

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 \vec{A} \sin(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 \vec{y} \quad (4)$$

Гармоник тебранаётган жисмга қўйилган куч кўчишга тескари йўналган, у жисмни ўрта ҳолатга қайтаришга ҳаракат қилади, шунинг учун бу куч қайтарувчи куч дейилади.

Flash animation 1

Гармоник тебранаётган жисм учун энергиянинг сақланиш қонуни амал қилади, яъни тўла энергия ўзгармас бўлади.

$$E = T + U = const \qquad (5)$$

Кинетик энергия $T = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2}$ (6)

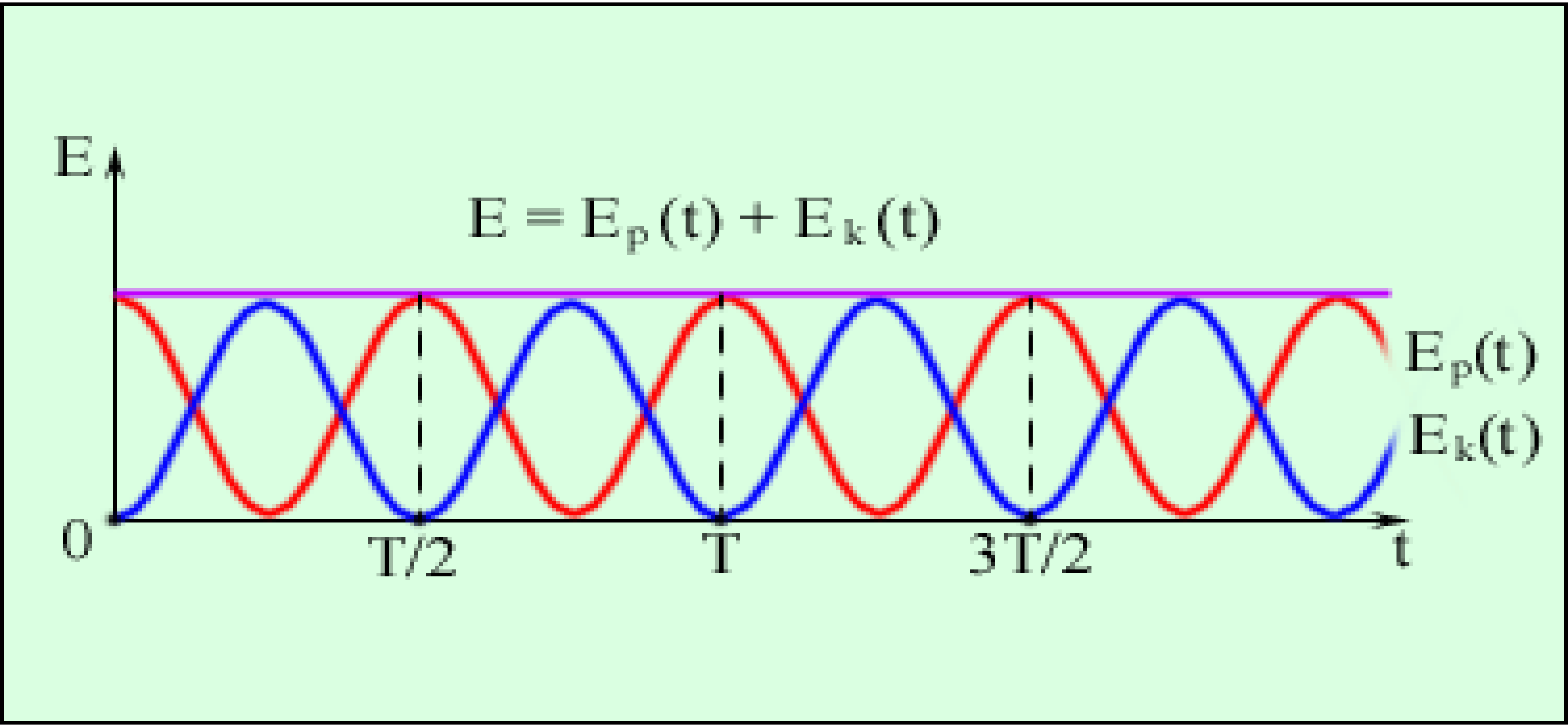
Кинетик энергиянинг максимал қиймати тўла энергияга тенг бўлишидан

$$E = T_{\max} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \qquad (7)$$

Бу ҳолатдан ушбу потенциал энергия формуласини олиш мумкин:

$$U = E - T = \frac{m\omega^2 A^2}{2} - \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{2} \quad (8)$$

Янада яққол тасавур қилиш учун қуйидаги анимацияга қараймиз Java Scr



Динамиканинг иккинчи қонунидан, тебранаётган жисмлар учун қуйдаги ифодани олиш мумкин: $ma = \frac{md^2Y}{dt^2} = F = -m\omega^2 Y$, бундан эса

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \omega^2 Y = 0 \qquad (9)$$

ифодани олиш мумкин.

(9)-ифода гармоник тебранишларнинг дифферинциал тенгламаси дейилади. Унинг ечими

$Y = A\sin(\omega t + \varphi)$ ифода ҳисобланади. Гармоник тебранма ҳаракат қилувчи тизимларга турли кўринишдаги маятникларни келтириш мумкин.

1. Пружинали маятник.

Юкчани пастга силжитиб ва уни қўйиб юбориб тебранишлар ҳосил бўлишини кузатиш мумкин. Юкчага таъсир этувчи кучни

$$F = -kY \qquad (10)$$

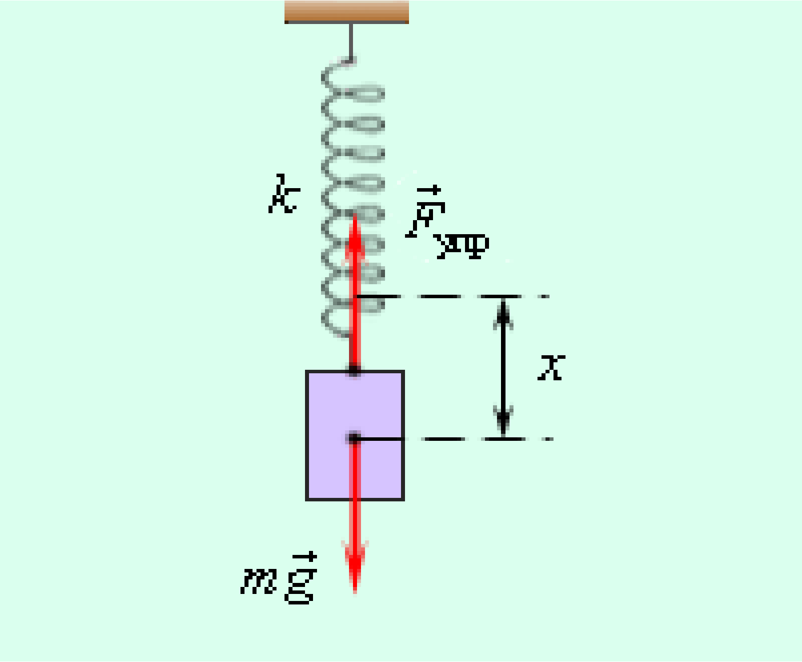
кўринишда ёзиш мумкин (эластиклик кучини силжишга пропорционал эканлигидан) ушбу формулани

$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 \vec{A}\sin(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 \vec{y}$ билан солиштирсак

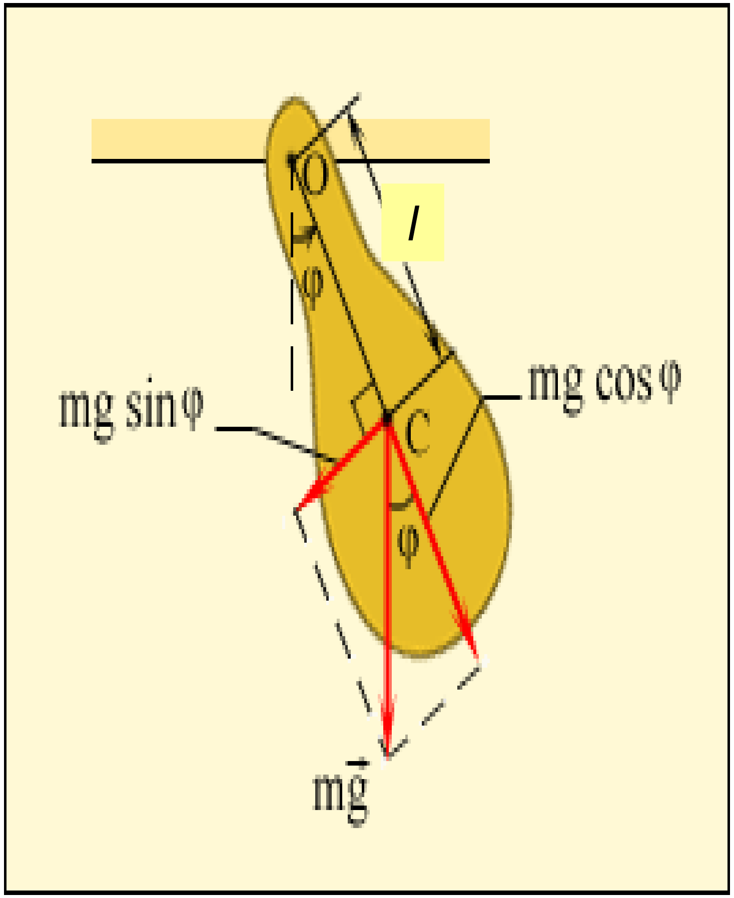
$k = m\omega^2 = m\dfrac{4\pi^2}{T^2}$ келиб чиқади.

Бундан эса $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, k-эластиклик коэффиценти.

Animation



2. Физик маятник.



Бу оғирлик маркази C дан ўтмаган O ўқ атрофида тебрана оладиган жисм хисобланади. Агар m массага ва I инерция моментига эга бўлган маятник кичик φ бурчакка оғдирилган бўлса, маятникка қўйилган куч моменти $M = -myl\sin\varphi \approx myl\varphi$ (минус ишораси куч моментининг жисмни **φ** бурчак йўналишини қарама-қарши томонга оғдиришини кўрсатади). Айланма ҳаракатнинг асосий қонуни $M = I\beta = I\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ дан

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0 \qquad (11)$$

Бундан, физик маятникнинг циклик частотаси

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}},$$

Даври $$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

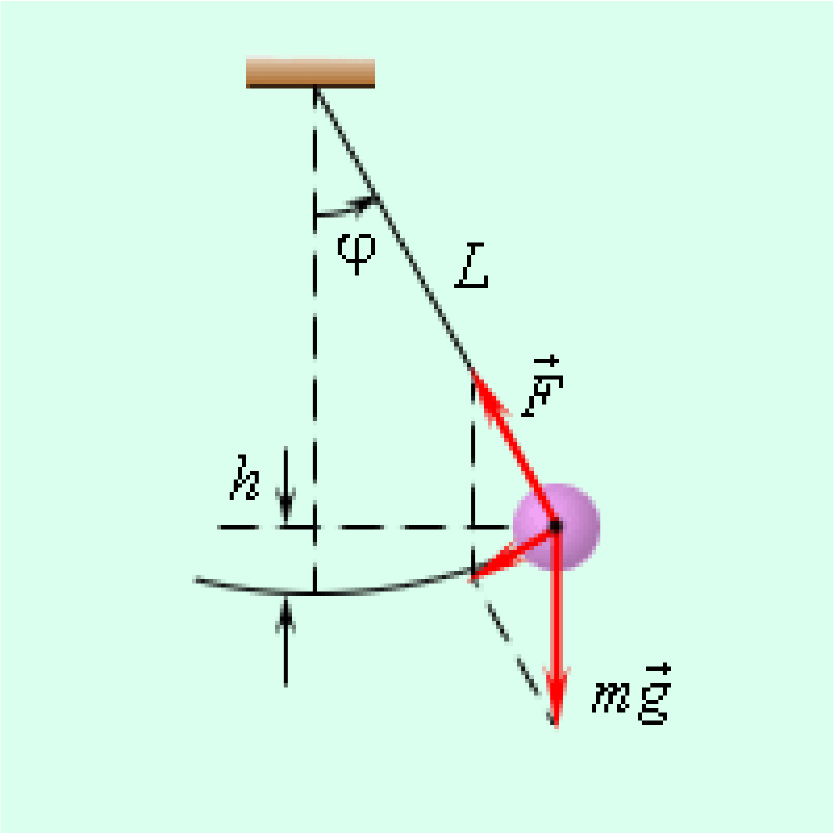
(12)

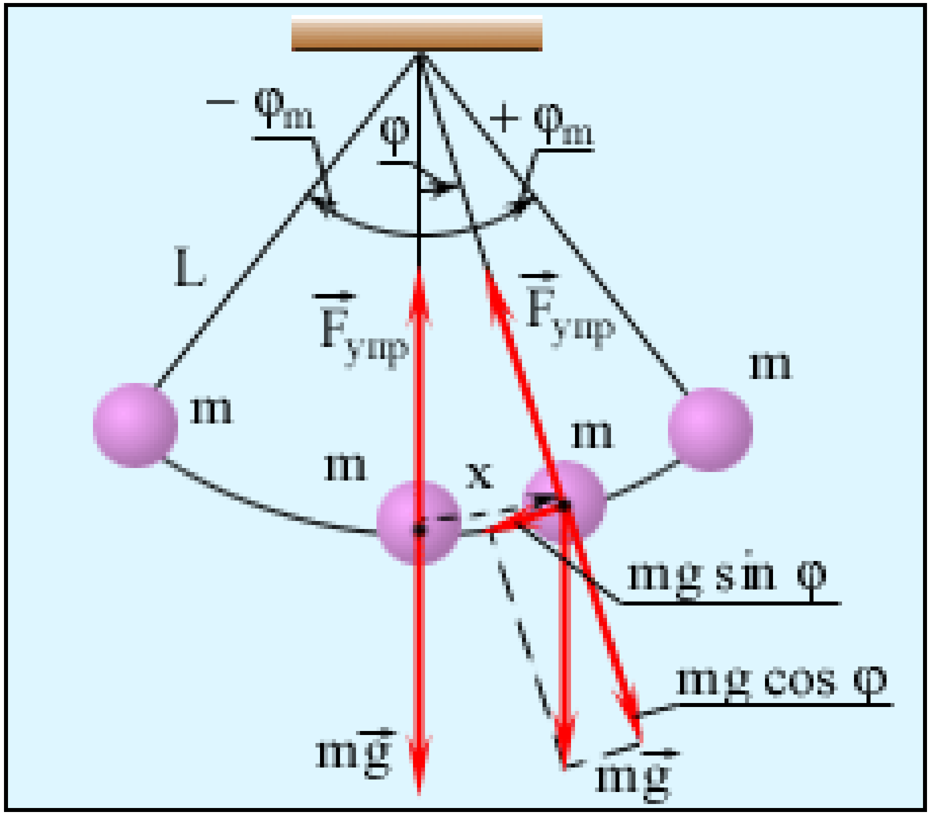
l -маятник оғирлик марказидан айланиш ўқигача бўлган масофа.

3.Математик маятник. ***L*** узунликдаги оғирлиги хисобга олинмайдиган, m массали моддий нуқта хисобланади. У физик маятникнинг хусусий холидир. Бу ҳолатда ***I=mℓ²*** бўлганлиги сабабли, математик маятникнинг тебранишлар даври

Animation

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (13)$$





Тебранишларни қўшиш.

Айрим тебранувчи тизимларда жисм бир вақтнинг ўзида бир неча ҳаракатда қатнашиш мумкин. Шунинг учун бундай тизимлардаги жисмнинг натижавий ҳаракатини аниқлаш мухим бўлади.

1. Бир йўналишдаги тебранишларни қўшиш.

Частоталари бир хил, амплитуда ва фазалари фарқ қилгандаги ҳолат. Бу ҳолатда тебранишларнинг ҳаракат тенгламалари

$$y_1 = A_1 \mathrm{Sin}(\omega t + \varphi_1) \qquad y_2 = A_2 \mathrm{Sin}(\omega t + \varphi_2)$$

Тебранишларни векторлар диаграммаси усулидан фойдаланиб қўшиш мумкин. $\vec{A}_1$ ва $\vec{A}_2$ векторлар бир хил **ω** бурчак тезлик билан ҳаракатланиш туфайли фаза силжиши ўзгармас бўлади.

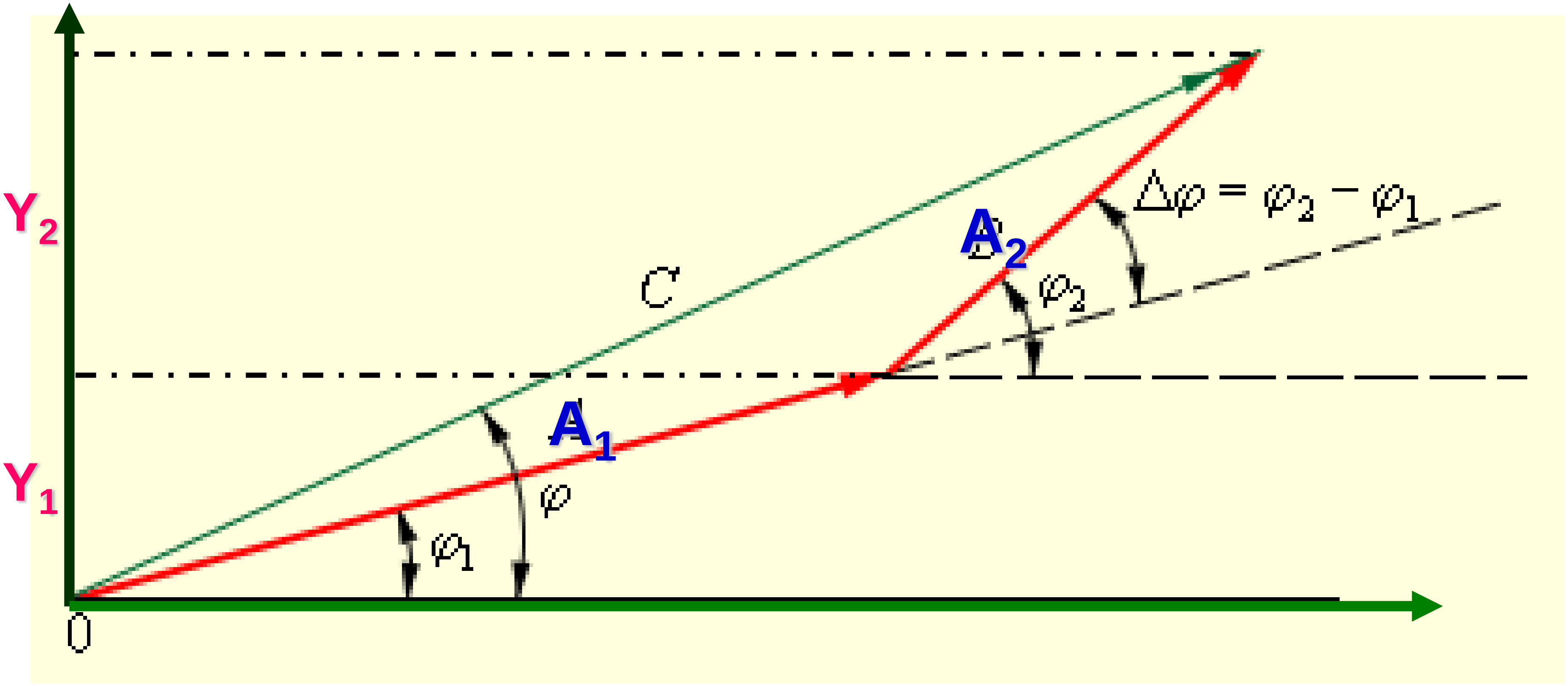
Натижавий тебранишлар тенгламаси

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (19)$$

Бунда, $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ ва **y** хам **ω** бурчак тезлик билан ҳаракат қилади.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (20)$$

animation



Y2
Y1
C
A1
A2
φ
φ_1
φ_2
$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$
0

animation

φ нинг қиймати эса

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \qquad (21)$$

(20) дан А амплитуда $\varphi_1 - \varphi_2 = m\pi$ ҳолатда **максимал**, $\varphi_1 - \varphi_2 = (2m-1)\frac{\pi}{2}$ ҳолатда эса **минимал** қийматларни қабул қилиши келиб чиқади. (m=0,1,2,3,4,…….).

Натижавий тебранишларга шу йўналишдаги ва шундай даврга эга бўлган 3-чи тебранишнинг қўшилиши шу даврга эга гармоник тебранишлар ҳосил қилади. Тебранишларнинг частота, амплитуда ва бошланғич фазалари фарқ қилиб, улар бир йўналишда тебранганда $y_1=A_1 Sin(\omega t+\varphi_1)$, $y_2=A_2 Sin(\omega t+\varphi_2)$ $A_1 = A_2 = A_0$, $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_o$ $\omega_1\approx\omega_2$ деб қабул қиламиз. Бундан тебранишларни аналитик йўл билан қўшиш мумкин (бурчак тезликлар фарқ қилиш сабабли, вектор диаграммалар усули нокулай ҳисобланади).

Натижавий тебранишлар тенгламаси

$$y = y_1 + y_2 = 2A_0 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi\right) \quad (22)$$

$A = \left|2A_0 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right|$ - **кўпайтма натижавий тебранишлар амплитудаси.**

Амплитуда вақтга ва частоталар фарқининг ярмига тенг бўлган қийматдаги частотага боғлиқ бўлади. Узилмаган чизиқлар силжишни, узилган чизиқлар эса амплитудани ўзгаришини тасвирлайди. Амплитудаси вақт бўйича ўзгариб турувчи тебранишлар **тепкили тебранишлар** дейилади.

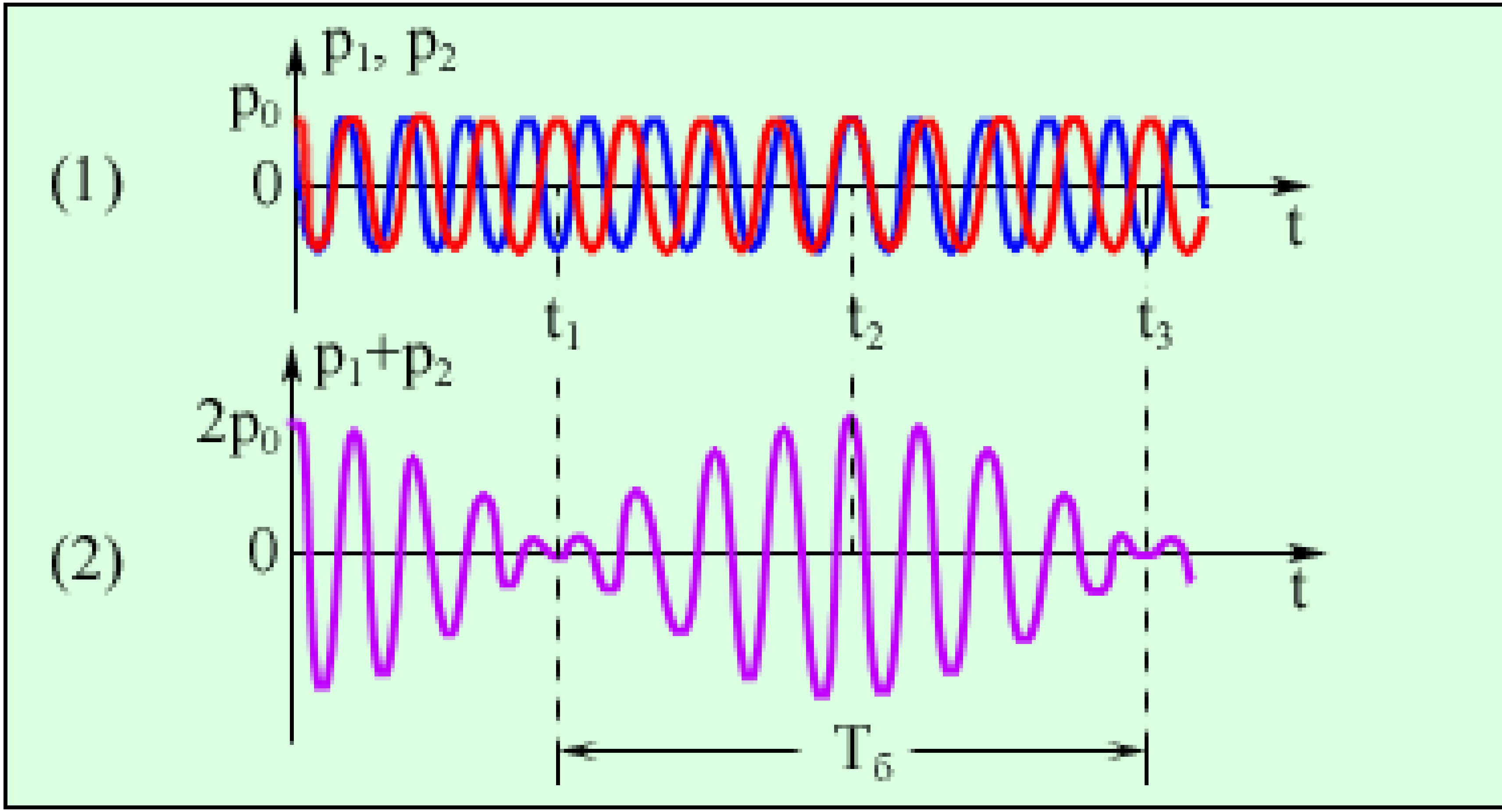
animation

Агар ташкил этувчи тебранишлар амплитудаси тенг бўлмаса, натижавий тебранишлар амплитудаси 0 гача камаймасдан. Маълум бир минимум орқали ўтади.

$$y = y_1 + y_2 = 2A_0 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \varphi\right)$$ ни $y = 2A_0 \cos\Omega t \sin\omega t$

кўринишида ёзиш мумкин, $\Omega = 2\pi\nu = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$, $\nu = \dfrac{\nu_1 - \nu_2}{2}$, яъни циклик частота $\omega = |\omega_1 - \omega_2|$, $\nu = |\nu_1 - \nu_2|$ частотага мос келади. Бир марта тўла тебранганда амплитуда **2 марта максимумга** эришади. Тепкилар товуш ва электр тебранишларида учраб туради.

animation



p_1, p_2
p_0
(1)
0
t
t_1
t_2
t_3
p_1+p_2
$2p_0$
(2)
0
t
T_6

2. Ўзаро перпендикуляр тебранишларни қўшиш.

Агар моддий нуқта бир вақтнинг ўзида х ва у ўқлари бўйлаб тебранаётган бўлса

$$y = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1),\ x = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \qquad (23)$$

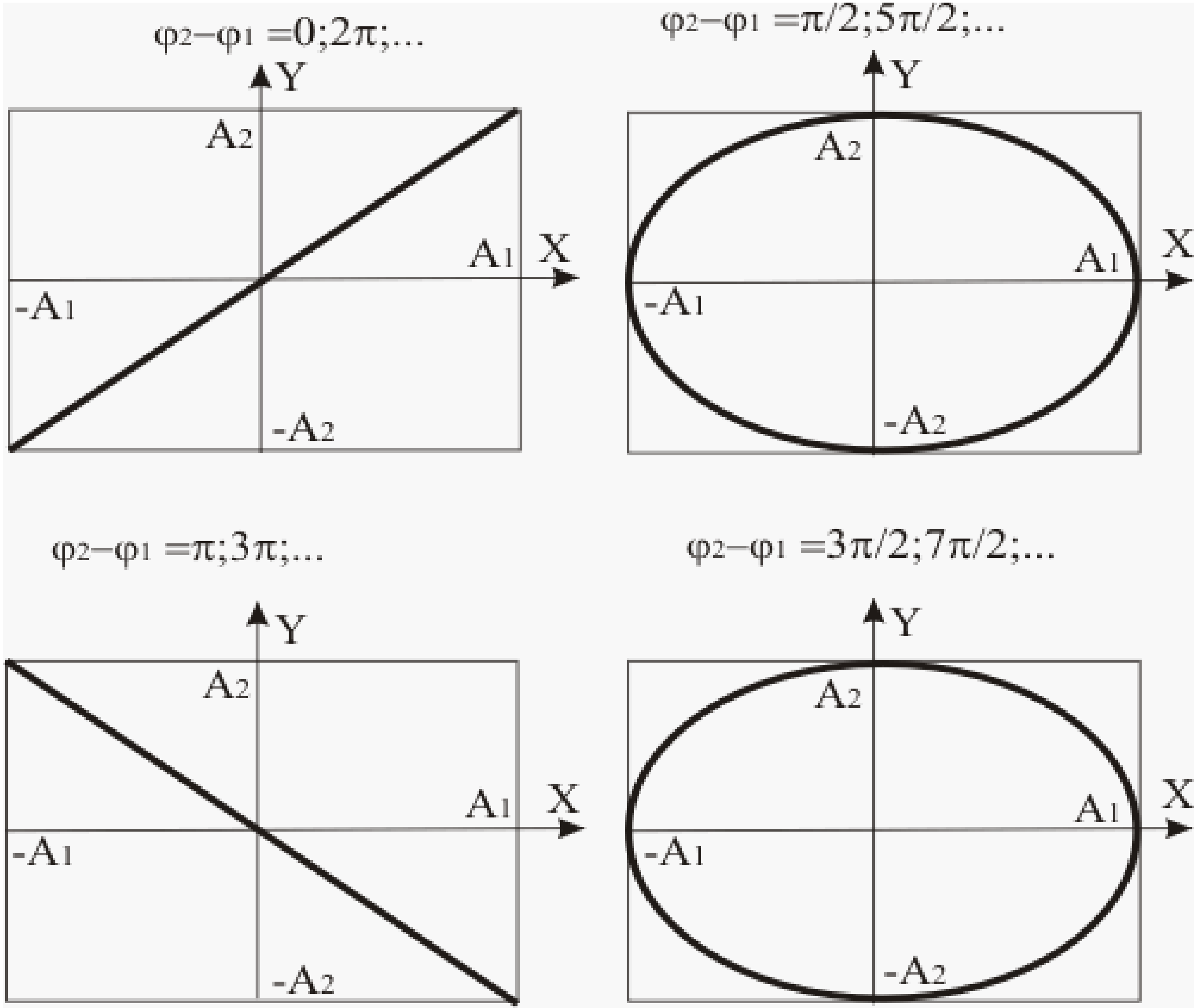
$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ – тебранишларнингфазалар фарқи нуқта траекториясининг тенгламаси

$\dfrac{y}{A_1} = \sin(\omega t + \varphi_1),\ \dfrac{x}{A_2} = \sin(\omega t + \varphi_2)$ вақт t ни чиқариб ташласак

$$\frac{y^2}{A_1^2} + \frac{x^2}{A_2^2} + \frac{2xy}{A_1 A_2} cos(\varphi_2 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (24)$$

(24) - формула эллипс тенгламаси бўлиб, қуйидаги хусусий ҳоллар учун кўриб чиқилади: 1) Δφ=0 . Бу ҳолатда $\dfrac{y}{A_1} = -\dfrac{x}{A_2}$,

$y = -\dfrac{A_1}{A_2} x$ ҳосил бўлади ва тўғри чизиқдан иборат бўлган траектория ҳосил бўлади .


φ2−φ1 =0;2π;...
Y
A2
A1
X
-A1
-A2
φ2−φ1 =π/2;5π/2;...
Y
A2
A1
X
-A1
-A2
φ2−φ1 =π;3π;...
Y
A2
A1
X
-A1
-A2
φ2−φ1 =3π/2;7π/2;...
Y
A2
A1
X
-A1
-A2

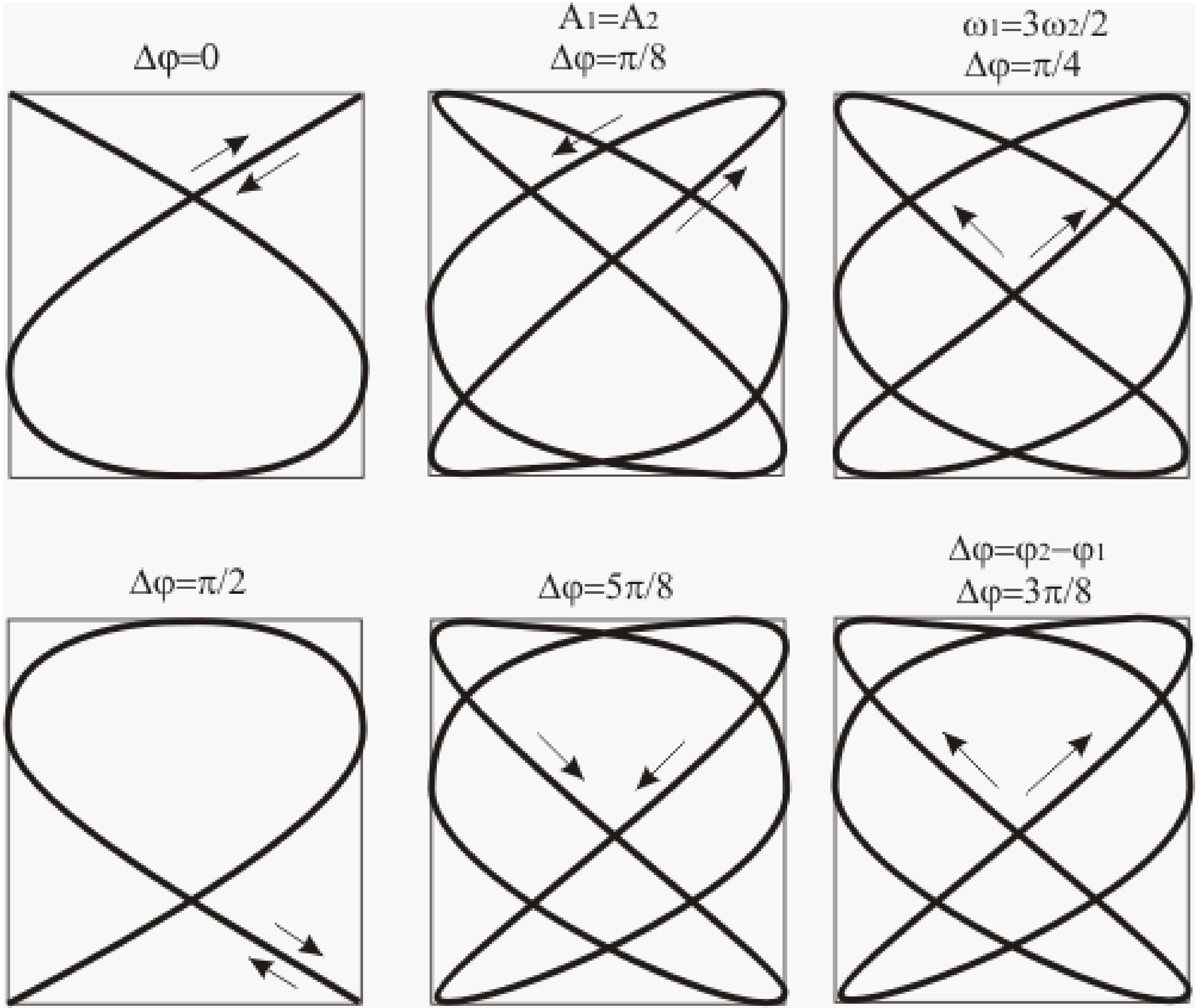
Нуқтанинг кўчиши $r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cdot \sin \omega t$, $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

2) $\Delta\varphi = \pi$. $\dfrac{y^2}{A_1^2} + \dfrac{x^2}{A_2^2} - \dfrac{2xy}{A_1 A_2} = 0$. $y = \dfrac{A_1}{A_2} x$ (10-расм)

3) $\Delta\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \dfrac{y^2}{A_1^2} + \dfrac{x^2}{A_2^2} = 1$ ва эллипс тенгламаси ҳосил бўлади (11-расм)

$A_1 = A_2$ ҳолатда ҳаракат траекторияси айланадан иборат бўлади. Тебранишлар даври бир хил, аммо фазалар фарқи $\dfrac{\pi}{2}$ га тенг бўлганда траектория эгилган эллипсдан иборат бўлади.

Даври ва фазалари фарқ қилувчи тебранишлар қўшилганда натижавий тебранишлар траекторияси мураккаб кўриниш олади ва улар Лесажур фигуралари дейилади.



Δφ=0
A1=A2
Δφ=π/8
ω1=3ω2/2
Δφ=π/4
Δφ=π/2
Δφ=5π/8
Δφ=φ2−φ1
Δφ=3π/8

Маърузани тайёрлашда фойдаланилган дастурлар, линклар ва адабиётлар

- Glencoe Science Physics. “principles and problems” 2012
- Halliday Resnick “Fundamentals of Physics” 2012
- Абдурахманов К.П., Эгамов У. Физика курси , 2011 й.
- Огурцов Н.А. Курс лекций по физике, Харьков,2007.
- Колмаков Ю.Н. Курс лекций по физике, Тула, 2002.
- Оплачко Т.М.,Турсунметов К,А. Физика, Ташкент, 2007
- http://phet.colorado.edu/
- http://www.falstad.com/mathphysics.html
- http://www.quantumatomica.co.uk/download.htm
- http://school-collection.edu.ru
- Microsoft Power Point
- Macromedia Flash MX Professional 2004
- “Открытая физика” ч.1. компания «Физикон»

- Эътборингиз учун раҳмат!