МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
АСТРАХАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.З. Пильтяй, И.А. Байгушева, А.Р. Гайсина

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Издательский дом «Астраханский университет»
2012

УДК 330. 105 (075.8)
ББК 65в6я73
Б12

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом
Астраханского государственного университета

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, доцент
А.Г. Кушнер
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН);
доктор экономических наук, доцент
В.Ю. Солопов
(ЗАО «ЛАНИТ Консалтинг»)

Пильтяй Г. З. **Математика для экономистов** / Г. З. Пильтяй, И. А. Байгушева, А. Р. Гайсина. – Астрахань: Астраханский государственный университет, Издательский дом «Астраханский университет», 2012. – 376 с.

Пособие подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по экономическим и управленческим направлениям подготовки. В пособии рассмотрены основы линейной алгебры и математического анализа. Изложение каждой главы сопровождается разбором типовых задач, в том числе на применение теории данной главы в социально-экономической сфере, большим количеством задач для самостоятельной работы студентов, типовым контрольным заданием.

Для студентов вузов, обучающихся по экономическим и управленческим направлениям подготовки, преподавателей и читателей, занимающихся самообразованием.

ISBN 978-5-9926-0632-4

© Астраханский государственный университет, Издательский дом «Астраханский университет», 2012
© Г. З. Пильтяй, И. А. Байгушева, А. Р. Гайсина, 2012
© Ю. А. Ященко, оформление обложки, 2012
© О. В. Трифонова, дизайн обложки, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 13

ГЛАВА 1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Системы линейных уравнений и их решение методом последовательного исключения неизвестных

Краткие теоретические сведения 15
Примеры решения типовых задач 17
Задания для самостоятельной работы 20
Ответы 21

1.2. Арифметические векторы

Краткие теоретические сведения 22
Примеры решения типовых задач 23
Задания для самостоятельной работы 28
Ответы 29

1.3. Однородная система линейных уравнений

Краткие теоретические сведения 29
Примеры решения типовых задач 30
Задания для самостоятельной работы 32
Ответы 32

1.4. Алгебра матриц

Краткие теоретические сведения 32
Примеры решения типовых задач 35
Задания для самостоятельной работы 37
Ответы 38

1.5. Определители

Краткие теоретические сведения 39
Примеры решения типовых задач 41
Задания для самостоятельной работы 42
Ответы 43

1.6. Комплексные числа и многочлены

Краткие теоретические сведения 43
Примеры решения типовых задач 46
Задания для самостоятельной работы 50
Ответы 50

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 1 50
Контрольная работа № 2 51
Контрольная работа № 3 51
Контрольная работа № 4 52

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Геометрические векторы и операции над ними

Краткие теоретические сведения ... 53
Примеры решения типовых задач ... 55
Задания для самостоятельной работы ... 57
Ответы ... 58

2.2. Прямые линии и плоскости

Краткие теоретические сведения ... 59
Примеры решения типовых задач ... 61
Задания для самостоятельной работы ... 63
Ответы ... 65

2.3. Системы линейных неравенств и задачи линейного программирования

Краткие теоретические сведения ... 65
Примеры решения типовых задач ... 68
Задания для самостоятельной работы ... 75
Ответы ... 77

2.4. Кривые второго порядка

Краткие теоретические сведения ... 77
Примеры решения типовых задач ... 81
Задания для самостоятельной работы ... 83
Ответы ... 84

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 5 ... 84
Контрольная работа № 6 ... 85

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

3.1. Линейные пространства

Краткие теоретические сведения ... 86
Примеры решения типовых задач ... 88
Задания для самостоятельной работы ... 92
Ответы ... 93

3.2. Евклидово пространство

Краткие теоретические сведения ... 94
Примеры решения типовых задач ... 95
Задания для самостоятельной работы ... 97
Ответы ... 98

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 7 ... 98

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
4.1. Алгебра линейных операторов
Краткие теоретические сведения 99
Примеры решения типовых задач 100
Задания для самостоятельной работы 102
Ответы 104
4.2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора
Краткие теоретические сведения 104
Примеры решения типовых задач 105
Задания для самостоятельной работы 110
Ответы 110
4.3. Квадратичные формы
Краткие теоретические сведения 111
Примеры решения типовых задач 112
Задания для самостоятельной работы 115
Ответы 116
Типовые варианты контрольных работ
Контрольная работа № 8 117
ГЛАВА 5. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ
5.1. Функции
Краткие теоретические сведения 118
Примеры решения типовых задач 120
Задания для самостоятельной работы 122
Ответы 124
5.2. Предел функции
Краткие теоретические сведения 124
Предел функции в точке 124
Бесконечные пределы функций 125
Пределы функций на бесконечности 125
Свойства функций, имеющих пределы 126
Замечательные пределы 127
Односторонние пределы 128
Примеры решения типовых задач 129
Задания для самостоятельной работы 136
Ответы 141
5.3. Бесконечно малые функции
Краткие теоретические сведения 141
Примеры решения типовых задач 142
Задания для самостоятельной работы 143
Ответы 144

5.4. Непрерывность функции
Краткие теоретические сведения ... 144
Определение непрерывности функции в точке ... 144
Односторонняя непрерывность ... 144
Точки разрыва ... 145
Свойства непрерывных функций ... 145
Понятие равномерной непрерывности ... 147
Примеры решения типовых задач ... 147
Задания для самостоятельной работы ... 152
Ответы ... 154
5.5. Применение пределов в экономических расчетах
Краткие теоретические сведения ... 154
Примеры решения типовых задач ... 156
Задания для самостоятельной работы ... 158
Ответы ... 160
Типовые варианты контрольных работ
Контрольная работа № 9 ... 160
Контрольная работа № 10 ... 160
Контрольная работа № 11 ... 161
ГЛАВА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
6.1. Производная функции. Основные правила дифференцирования
Краткие теоретические сведения ... 162
Примеры решения типовых задач ... 163
Задания для самостоятельной работы ... 167
Ответы ... 169
6.2. Производные высших порядков
Краткие теоретические сведения ... 169
Примеры решения типовых задач ... 169
Задания для самостоятельной работы ... 171
Ответы ... 172
6.3. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к кривой
Краткие теоретические сведения ... 172
Примеры решения типовых задач ... 173
Задания для самостоятельной работы ... 174
Ответы ... 174
6.4. Дифференциал. Приближенные вычисления с помощью дифференциала
Краткие теоретические сведения ... 175
Примеры решения типовых задач ... 176
Задания для самостоятельной работы ... 177
Ответы ... 177

6.5. Правило Лопиталя
Краткие теоретические сведения 178
Примеры решения типовых задач 179
Задания для самостоятельной работы 180
Ответы 181
6.6. Промежутки монотонности и экстремумы
Краткие теоретические сведения 181
Примеры решения типовых задач 182
Задания для самостоятельной работы 184
Ответы 184
6.7. Наибольшее и наименьшее значения функции на числовом промежутке
Краткие теоретические сведения 185
Примеры решения типовых задач… 185
Задания для самостоятельной работы 188
Ответы 189
6.8. Направления выпуклости графика функции одного переменного. Точки перегиба
Краткие теоретические сведения 189
Примеры решения типовых задач 190
Задания для самостоятельной работы 192
Ответы 192
6.9. Асимптоты графика функции
Краткие теоретические сведения 193
Примеры решения типовых задач 194
Задания для самостоятельной работы 194
Ответы 194
6.10. Построение эскиза графика функции одного переменного
Краткие теоретические сведения 195
Примеры решения типовых задач 195
Задания для самостоятельной работы 200
6.11. Приложения дифференциального исчисления к экономической теории
Краткие теоретические сведения 200
Предельные функции и теория фирм 200
Эластичность 201
Примеры решения типовых задач 202
Задания для самостоятельной работы 206
Ответы 209
Типовые варианты контрольных работ
Контрольная работа № 12 209
Контрольная работа № 13 209

ГЛАВА 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Первообразная. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования

Краткие теоретические сведения ... 210
Первообразная ... 210
Неопределенный интеграл, его основные свойства ... 210
Непосредственное интегрирование ... 211
Метод подстановки ... 212
Метод интегрирования по частям ... 212
Примеры решения типовых задач ... 213
Задания для самостоятельной работы ... 215
Ответы ... 216

7.2. Интегрирование рациональных функций

Краткие теоретические сведения ... 217
Примеры решения типовых задач ... 217
Задания для самостоятельной работы ... 220
Ответы ... 220

7.3. Интегрирование некоторых тригонометрических и иррациональных функций

Краткие теоретические сведения ... 221
Интегрирование тригонометрических функций ... 221
Интегрирование некоторых иррациональных функций ... 222
Примеры решения типовых задач ... 223
Задания для самостоятельной работы ... 224
Ответы ... 225

7.4. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл. Свойства определенного интеграла

Краткие теоретические сведения ... 225
Примеры решения типовых задач ... 228
Задания для самостоятельной работы ... 229
Ответы ... 229

7.5. Несобственные интегралы

Краткие теоретические сведения ... 230
Примеры решения типовых задач ... 232
Задания для самостоятельной работы ... 233
Ответы ... 233

7.6. Приложения определенного интеграла

Краткие теоретические сведения ... 234
Площадь криволинейной трапеции ... 234
Длина дуги кривых ... 235
Площадь поверхности вращения ... 236
Объем тел вращения ... 236

Примеры решения типовых задач 237
Задания для самостоятельной работы 240
Ответы 241
7.7. Приложение определенного интеграла в экономике
Краткие теоретические сведения 241
Излишек потребителя и излишек производителя 241
Примеры решения типовых задач 242
Задания для самостоятельной работы 244
Ответы 246
Типовые варианты контрольных работ
Контрольная работа № 14 246
Контрольная работа № 15 247
ГЛАВА 8. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
8.1. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции двух переменных
Краткие теоретические сведения 248
Понятие функции нескольких переменных 248
Предел и непрерывность функции 248
Примеры решения типовых задач 249
Задания для самостоятельной работы 251
Ответы 252
8.2. Частные производные. Полный дифференциал
Краткие теоретические сведения 252
Частные производные 252
Дифференциал функции 253
Частные производные и дифференциалы высших порядков 253
Примеры решения типовых задач 254
Задания для самостоятельной работы 257
Ответы 258
8.3. Дифференцирование сложных и неявных функций
Краткие теоретические сведения 259
Дифференцирование сложных функций 259
Дифференцирование неявных функций 259
Примеры решения типовых задач 259
Задания для самостоятельной работы 262
Ответы 262
8.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная в данном направлении. Градиент функции
Краткие теоретические сведения 262
Касательная плоскость и нормаль к поверхности 262
Производная в данном направлении. Градиент функции 263
Примеры решения типовых задач 264
Задания для самостоятельной работы 265
Ответы 266

8.5. Экстремум функции двух переменных. Условный экстремум. Наибольшее, наименьшее значения функции
Краткие теоретические сведения ... 266
Экстремум функции двух переменных. Условный экстремум ... 266
Наибольшее и наименьшее значения функции ... 267
Примеры решения типовых задач ... 268
Задания для самостоятельной работы ... 270
Ответы ... 271
8.6. Подбор эмпирической формулы по методу наименьших квадратов
Краткие теоретические сведения ... 271
8.7. Приложение дифференциального исчисления функций нескольких переменных в экономике
Краткие теоретические сведения ... 274
Примеры решения типовых задач ... 274
Задания для самостоятельной работы ... 276
Ответы ... 278
8.8. Двойные интегралы
Краткие теоретические сведения ... 278
Понятие двойного интеграла ... 278
Основные свойства двойных интегралов ... 279
Вычисление двойных интегралов ... 279
Замена переменных в двойных интегралах ... 280
Примеры решения типовых задач ... 281
Задания для самостоятельной работы ... 284
Ответы ... 286
Типовые варианты контрольных работ
Контрольная работа № 16 ... 286
Контрольная работа № 17 ... 287
Контрольная работа № 18 ... 287
ГЛАВА 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
9.1. Дифференциальные уравнения первого порядка
Краткие теоретические сведения ... 288
Примеры решения типовых задач ... 291
Задания для самостоятельной работы ... 293
Ответы ... 294
9.2. Уравнения с разделяющимися переменными
Краткие теоретические сведения ... 294
Примеры решения типовых задач ... 295
Задания для самостоятельной работы ... 297
Ответы ... 298

9.3. Однородные дифференциальные уравнения
Краткие теоретические сведения 298
Примеры решения типовых задач 300
Задания для самостоятельной работы 303
Ответы 303
9.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Я. Бернулли
Краткие теоретические сведения 304
Метод Эйлера 304
Метод И. Бернулли 305
Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) 305
Уравнение Я. Бернулли 307
Примеры решения типовых задач 307
Задания для самостоятельной работы 310
Ответы 311
9.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель
Краткие теоретические сведения 312
Уравнения в полных дифференциалах 312
Интегрирующий множитель 313
Примеры решения типовых задач 313
Задания для самостоятельной работы 316
Ответы 317
9.6. Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков, допускающие понижение порядка
Краткие теоретические сведения 318
Примеры решения типовых задач 320
Задания для самостоятельной работы 322
Ответы 323
9.7. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами
Краткие теоретические сведения 324
Примеры решения типовых задач 325
Задания для самостоятельной работы 326
Ответы 327
9.8. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами второго и более высоких порядков
Краткие теоретические сведения 327
Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) 327
Метод неопределенных коэффициентов 328
Примеры решения типовых задач 330
Задания для самостоятельной работы 335
Ответы 336

9.9. Приложение дифференциальных уравнений в экономике
Краткие теоретические сведения ... 337
Примеры решения типовых задач ... 338
Задания для самостоятельной работы ... 340
Ответы ... 342
Типовые варианты контрольных работ
Контрольная работа № 19 ... 342
Контрольная работа № 20 ... 342
ГЛАВА 10. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ
10.1. Числовой ряд. Основные понятия. Знакоположительные ряды
Краткие теоретические сведения ... 343
Примеры решения типовых задач ... 346
Задания для самостоятельной работы ... 349
Ответы ... 351
10.2. Знакопеременные ряды
Краткие теоретические сведения ... 352
Примеры решения типовых задач ... 353
Задания для самостоятельной работы ... 356
Ответы ... 356
10.3. Функциональные ряды
Краткие теоретические сведения ... 357
Примеры решения типовых задач ... 358
Задания для самостоятельной работы ... 359
Ответы ... 360
10.4. Степенные ряды
Краткие теоретические сведения ... 360
Примеры решения типовых задач ... 361
Задания для самостоятельной работы ... 363
Ответы ... 364
10.5. Разложение функций в ряды
Краткие теоретические сведения ... 364
Примеры решения типовых задач ... 365
Задания для самостоятельной работы ... 370
Ответы ... 371
10.6. Приложения в экономике теории рядов
Краткие теоретические сведения ... 371
Примеры решения типовых задач ... 372
Задания для самостоятельной работы ... 373
Ответы ... 374
Типовые варианты контрольных работ
Контрольная работа № 21 ... 374
Контрольная работа № 22 ... 374
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ... 375

ПРЕДИСЛОВИЕ

Часто говорят, что цифры управляют миром;
по крайней мере, нет сомнения в том, что цифры показывают, как он управляется.

И. Гете

Современная экономическая наука широко использует математику в качестве методологической основы, общенаучного языка и важнейшего инструмента познания. Математические методы в единстве с экономическим анализом открывают новые возможности для экономической науки и практики. «Развитие экономики сейчас уже нельзя мыслить без систематического использования современных средств математики и, что ещё важнее, без тех особенностей мышления, которые развивает математика», - отмечал академик Б.В. Гнеденко. Начиная с XX столетия, математические методы моделирования экономики становятся самым эффективным инструментом исследования в экономической науке. С их применением связаны практически все научные исследования, удостоенные Нобелевской премии по экономике (работы В. Леонтьева, П. Самуэльсона, Р. Солоу, Д. Хикса, Л. Канторовича, Т. Хаавельмо, Р. Ингла, Р. Ауманна, Т. Шеллинга и др.).

В настоящее время экономическая специализация без серьёзной математической подготовки лишена смысла. Специалист в области экономики должен быть готов к использованию математических знаний в процессе решения профессиональных задач: уметь формулировать экономические задачи на языке математики, строить и исследовать математические модели экономических систем, знать и применять математические методы в своей профессиональной деятельности. Одним словом, характер современного экономического образования должен быть более чем наполовину математическим.

Настоящее учебное пособие удовлетворяет требованиям к содержанию и уровню математического образования новых федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования по социально-экономическим направлениям подготовки. Пособие сложилось на основе опыта преподавания математических дисциплин для студентов экономических специальностей Астраханского государственного университета. В пособие включены основные разделы базовой математической подготовки экономистов в вузе – линейная алгебра и математический анализ. Его отличительными особенностями являются профессионально-практическая направленность и возможность использования в качестве руководства самостоятельной работой студента. В связи с этим каждая глава содержит краткие теоретические сведения, образцы решения типовых задач и задачи для самостоятельной работы, включая задачи с экономическим содержанием. Достаточно большое количество и разнообразие задач позволяют студентам практически закрепить материал и пре-

доставляют преподавателям широкий выбор при подготовке к практическим занятиям и контрольным работам. На все вычислительные задачи даны ответы; приведены решения нулевых вариантов контрольных работ.

Мы надеемся, что пособие будет полезно как студентам социально-экономических направлений подготовки очной, заочной и дистанционной форм обучения, так и преподавателям дисциплин «Линейная алгебра», «Математический анализ», а также лицам, намеревающимся восполнить пробелы в своём математическом образовании.

ГЛАВА 1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Системы линейных уравнений и их решение методом последовательного исключения неизвестных

Краткие теоретические сведения

Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Совокупность записанных в определённом порядке чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ называется решением системы уравнений, если после замены в каждом её уравнении неизвестных x_i соответствующими числами α_i $(i = 1, 2, ..., n)$ они превращаются в верные равенства.

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае, она называется несовместной.

Две системы уравнений называются равносильными, если множества их решений совпадают.

Переход от данной системы линейных уравнений к равносильной системе осуществляется с помощью элементарных преобразований систем линейных уравнений:

1. Перестановки местами двух любых уравнений системы.
2. Умножения какого-либо уравнения системы на произвольное число, отличное от нуля.
3. Прибавления к любому уравнению системы другого её уравнения, умноженного на произвольное число.
4. Вычёркивания нулевого уравнения, т.е. уравнения вида $0x_1 + 0x_2 + ...0x_n = 0$.

Прямоугольная таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

составленная из коэффициентов системы (1) называется основной матрицей системы линейных уравнений (1). Наряду с матрицей (2) будем рассматривать также расширенную матрицу этой системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Над строками матрицы будем выполнять преобразования, аналогичные преобразованиям, выполняемым над уравнениями линейной системы. Их называют строчечными элементарными преобразованиями матрицы:

1. Перестановка местами двух строк матрицы.

2. Прибавление к любой строке матрицы другой её строки, умноженной на произвольное число.

3. Удаление нулевой строки матрицы.

Если в результате некоторого элементарного преобразования матрицы А получена матрица В, то будем записывать так: $A \sim B$.

Матрица называется ступенчатой, если она удовлетворяет таким условиям:

1) в каждой строке матрицы, начиная со второй, первый (считая слева направо) её ненулевой элемент расположен правее первого ненулевого элемента следующей строки;

2) нулевые строки матрицы (если они есть) расположены ниже всех её ненулевых строк.

Всякую матрицу с помощью конечного числа элементарных преобразований можно привести к ступенчатой матрице.

Для практического использования изложенной теории можно поступить следующим образом. Составляется расширенная матрица заданной системы линейных уравнений, затем с помощью строчечных элементарных преобразований она приводится к ступенчатой матрице. Если при этом будет получена строка $(0,0,\ldots,0 \mid b)$ с условием $b \neq 0$, то получаем ответ: система уравнений не имеет решений. Если же такой строки нет, то возможны два случая:

1. Число r ненулевых строк ступенчатой матрицы равняется n – количеству всех неизвестных системы уравнений. Тогда система имеет единственное решение.

2. $r \leq n$. В этом случае система имеет бесчисленное множество решений и требуется составить общее решение.

Если, кроме общего решения системы, требуется найти какое-нибудь частное решение, то значения свободных неизвестных выбираются произвольно и по ним находятся значения главных неизвестных.

Изложенный способ решения систем линейных уравнений называют методом Гаусса. Модификацией этого метода является метод Жордана – Гаусса, состоящий в том, что в каждой строке расширенной матрицы системы определяется главный элемент (первый, считая слева направо, отличный от нуля), а элементы столбца, содержащего главный элемент, преобразуются в нули (все элементы, кроме главного).

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу данной системы и с помощью строчечных элементарных преобразований приведём её к ступенчатой матрице:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 11 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ c_2 + 2c_1 \end{matrix} \begin{matrix} c_3 + c_1 \\ \sim \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} 2c_2 + c_3 \\ \sim \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 14 & 13 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} c_3 + 5c_2 \\ \sim \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 14 & 13 \\ 0 & 0 & 68 & 68 \end{array}\right) \begin{matrix} \frac{1}{68}c_3 \\ \sim \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 14 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы r=3; количество неизвестных данной системы уравнений n=3. Следовательно, система имеет единственное решение. Составляем систему уравнений соответствующую ступенчатой матрице (она равносильна исходной системе), решение которой выполним «снизу вверх»:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_2 + 14x_3 = 7, \\ x_3 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 3x_3 + 3, \\ x_2 = -14x_3 + 13, \\ x_3 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 3 + 3, \\ x_2 = -14 + 13, \\ x_3 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: единственное решение (4, –1, 1).

Пример 2. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x - 6y + z = 4, \\ 3x - 5y - 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 5. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и применим строчечные элементарные преобразования.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -6 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ c_3 + c_2 - c_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -6 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Полученная третья строка c_3 имеет вид (0; 0; 0 | 4), следовательно, система не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример 3. Найти общее решение и одно частное решение системы уравнений $\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ 3x-5y+5z=3, \\ 5x-8y+6z=5. \end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу данной системы уравнений и приведём её к ступенчатой матрице:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 5 & 3 \\ 5 & -8 & 6 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} c_3-(c_1+c_2) \\ \sim \\ 2c_2-3c_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right).$$

Полученная ступенчатая матрица имеет две ненулевых строки (r=2), а число всех неизвестных n=3. Так как $r<n$ и $n-r$=1, то исходная система уравнений имеет бесчисленное множество решений. По полученной матрице составляем ступенчатую систему уравнений и выражаем из неё главные неизвестные (x,y) через свободное неизвестное (z):

$$\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ y-7z=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=3y-z+2, \\ y=7z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=3\cdot(7z)-z+2, \\ y=7z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10z+1, \\ y=7z. \end{cases}$$

Общее решение: $x=20z+2$, $y=7z$, $z-$ любое число. Для нахождения частного решения полагаем z =1, тогда $x=20z+2=22$, $y=7z=7$. Частное решение: (22; 7; 1).

Пример 4. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1, \\ 2x_1-2x_2+x_4=1, \\ -x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_1-3x_2+x_3+x_4=2, \\ 2x_1-2x_2+2x_3=2. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу этой системы и приведём её к ступенчатой матрице:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} c_5-2c_1 \\ c_4-3c_1 \\ \sim \\ c_3+c_1 \\ c_2-2c_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} c_4-c_2 \\ \sim \\ c_3+c_2 \\ \frac{1}{2}c_3 \end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Полученная ступенчатая матрица имеет три ненулевые строки (r=3), а заданная система уравнений имеет четыре неизвестных (n=4), следовательно, система уравнений, соответствующая полученной матрице, имеет три главных неизвестных (x_1, x_3, x_4) и одно свободное неизвестное (x_2). Составляем ступенчатую систему уравнений и, «поднимаясь снизу вверх», выражаем главные неизвестные через свободное неизвестное:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_3 + x_4 = -1, \\ x_4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - x_3, \\ 2x_3 = x_4 + 1, \\ x_4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + x_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{2}, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: общее решение: $x_1 = \dfrac{1}{2} + x_2,\ x_3 = \dfrac{1}{2}, x_4 = 0, x_2 -$ любое число.

Пример 5. Решить систему уравнений методом Жордана – Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и используем далее элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -8 \end{array}\right)\begin{matrix} 2c_3 - 3c_1 \\ \sim \\ 2c_2 + c_1 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 7 & -9 & -34 \end{array}\right)\begin{matrix} c_3 + 7c_2 \\ \sim \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 26 & 78 \end{array}\right)\begin{matrix} c_1 - c_2 \\ \sim \\ \frac{1}{22}c_3 \end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{matrix} \frac{1}{2}c_1 + 2c_3 \\ \sim \\ -c_2 - 5c_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Сразу получаем ответ: $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 3 \end{cases}$ или (1;-1;3).

Пример 6. Найти общее и одно частное решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. Применяем метод Жордана – Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_3 - c_1 + c_4 - c_2 \\ \sim \\ c_2 \leftrightarrow c_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 - c_2 + c_3 \\ \sim \\ c_2 - c_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь можно записать: $\begin{cases} x_1 = 2 - x_4, \\ x_2 = -3 + x_4, \\ x_3 = 1 - x_4. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 2 - x_4$, $x_2 = -3 + x_4$, $x_3 = 1 - x_4$, x_4 – любое число; частное решение: (2, –3, 1, 0).

Задания для самостоятельной работы

Решить системы уравнений. Если система имеет бесконечное множество решений, то найти общее решение и одно частное решение.

1.1. $\begin{cases} 2x - 5y = 1; \\ 3x - 7y = 2. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 4x - 6y = 3. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 6x - 4y = 2, \\ 9x - 6y = 3. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

1.5 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$ **1.10.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -10, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -6. \end{cases}$ **1.12.** $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5, \\ -6x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 2. \end{cases}$ **1.14.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$ **1.16.** $\begin{cases} x_1 + 3\ x_2 + 5x_3 - 2\ x_4 = 3, \\ x_1 + 4\ x_2 - 2x_3 + 3\ x_4 = 2, \\ x_1 + 5\ x_2 - 9x_3 - 8\ x_4 = 1, \\ 6x_1 + 23x_2 - 5x_3 + 13x_4 = 14. \end{cases}$

1.17. Две овощные плантации $П_1$ и $П_2$ поставляют однородную овощную продукцию для двух магазинов M_1 и M_2, потребности которой составляют 200 т для магазина M_1 и 300 т для M_2 соответственно. Каждая из плантаций может отправить в магазины 250 т овощей. Известны затраты на перевозку единицы продукции с плантации в каждый из магазинов (см. таблицу):

Плантация	Затраты на перевозку в магазин, у.е.	
	M_1	M_2
$П_1$	10	15
$П_2$	8	20

Минимальные затраты на перевозку составляют 7950 условных единиц. Найти оптимальный план перевозок овощей.

Ответы

1.1. (3, 1). **1.2.** Нет решений. **1.3.** $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, x$ – любое число; $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ – частное решение. **1.4.** (2, –1, 1). **1.5.** (1, –2, –3). **1.6**. (2, –1, –1). **1.7.** Нет решений. **1.8.** $x_1 = -9 - x_3$, $x_2 = -14 - x_3$, x_3 – любое число; (–9, –14, 0). **1.9.** Нет решений. **1.10.** (–1, –1, 0, 1). **1.11**. (–1, 1, 1, 0). **1.12**. Нет решений. **1.13**. Нет решений. **1.14**. $x_1 = -2x_3 + 3x_4 + 1$, $x_2 = 3x_3 - x_4 - 1$, x_3, x_4 – любые числа; (2, 1, 1, 1). **1.15**.

$x_1 = 1,\ x_2 = x_4 - 1,\ x_3 = 2x_4 - 2,\ x_4$ – любое число; (1, 0, 0, 1). **1.16**. $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$, $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4,\ x_3,\ x_4$ – любые числа; (6, –1, 0, 0).

1.2. Арифметические векторы

Краткие теоретические сведения

Арифметическим n-мерным арифметическим вектором называется упорядоченная совокупность n чисел. Для обозначения векторов будем пользоваться символами $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Числа $a_1, a_2, ..., a_n$ называют компонентами вектора $\boldsymbol{a}$. Суммой векторов $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ называется вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$. Произведением вектора на число λ называется вектор $\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$. Вектор, все компоненты которого равны 0, называют нулевым вектором и обозначают **0**.

Множество всех n-мерных арифметических векторов с операциями сложения векторов и умножения вектора на число называется арифметическим n-мерным векторным пространством. Это пространство будем обозначать символом $\mathbb{R}^n$.

Если $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_n}$ – какая-либо конечная система векторов, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – произвольные числа, то вектор $\boldsymbol{b} = \alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + ... + \alpha_n\boldsymbol{a_n}$ называется линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_n}$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – коэффициентами этой линейной комбинации. В этом случае говорят также, что вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_n}$ или же что $\boldsymbol{b}$ разлагается по векторам $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_n}$.

Система арифметических векторов $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_n}$ называется линейно зависимой, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, не все равные нулю, что $\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + ... + \alpha_n\boldsymbol{a_n} = 0$. Если же равенство $\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + ... + \alpha_n\boldsymbol{a_n} = 0$ возможно только для $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то система арифметических векторов $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_n}$ называется линейно независимой.

Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда некоторый её вектор линейно выражается через остальные векторы этой системы.

Два вектора составляют линейно зависимую систему тогда и только тогда, когда их компоненты пропорциональны.

Произвольную систему векторов обозначим для краткости через S. Подсистема S' системы S называется базисом системы S, если: 1) она линейно независима; 2) любой вектор системы S линейно выражается через векторы подсистемы S'. Ясно, что базис системы есть её максимальная линейно независимая подсистема. Хотя в одной и той же системе векторов

может быть несколько базисов, число векторов в каждом базисе одно и то же. Это число называется рангом системы векторов.

Система арифметических векторов $\boldsymbol{e_1}=(1,0,...,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,...,0)$, …, $\boldsymbol{e}_n=(0,0,...,1)$ составляет базис всего пространства $\mathbb{R}^n$.

В произвольной матрице A

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

каждую строку можно рассматривать как вектор пространства $\mathbb{R}^n$, а каждый столбец – как вектор пространства $\mathbb{R}^m$. Обозначим i-ю строку кратко c_i, а k-й столбец – b_k. Ранг системы векторов-строк называется строчечным рангом матрицы, а ранг системы векторов-столбцов – столбцовым рангом матрицы. Таким образом, строченый ранг матрицы есть максимальное число линейно независимых её строк, столбцовый ранг – максимально число линейно независимых столбцов. Оба эти ранги для одной и той же матрицы равны, их общее значение называется рангом матрицы.

Для вычисления ранга матрицы можно использовать элементарные преобразования матрицы (как строчечные, так и столбцовые). Если данную матрицу привести к ступенчатому виду, то число ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы равно рангу исходной матрицы.

Критерий совместности системы линейных уравнений: система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти линейную комбинацию $3\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$ векторов $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,-4,-3)$, $\boldsymbol{a}_2=(-1,0,-3,2)$, $\boldsymbol{a}_3=(5,-3,-5,-3)$.

Решение. После сложения векторов $3\boldsymbol{a}_1=(3,-3,-12,-9)$, $-2\boldsymbol{a}_2=(2,0,6,-4)$, $-\boldsymbol{a}_3=(-5,3,5,3)$.

Получаем $3\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3=(0,0,-1,-10)$.

Пример 2. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из уравнения $2\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+4\boldsymbol{x}=0$, где $\boldsymbol{a}_1=(2,-1,4,-3)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,-2,5,-4)$, $\boldsymbol{a}_3=(5,-8,-1,2)$.

Решение. Складывая векторы $2\boldsymbol{a}_1=(4,-2,8,-6)$, $-3\boldsymbol{a}_2=(-9,6,-15,12)$, $-\boldsymbol{a}_3=(5,-8,-1,2)$, находим:

$2\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+4\boldsymbol{x}=0$;

$(0,-4,-8,8)+4\boldsymbol{x}=0$.

Откуда $4\boldsymbol{x}=(0,4,8,-8)$ и $\boldsymbol{x}=(0,1,2,-2)$.

Пример 3. Выяснить, являются следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

а) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(4,5,6)$;

б) $\boldsymbol{a}_1=(6,-2,4)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,-1,2)$;

в) $\boldsymbol{a}_1=(1,-3,2)$, $\boldsymbol{a}_2=(5,-1,3)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,-4,1)$;

г) $\boldsymbol{a}_1=(3,4,5)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,3,3)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,1,8)$.

Решение. Для задания а) имеем $\frac{1}{4}\neq\frac{2}{5}$, т.е. компоненты векторов $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ не пропорциональны, следовательно, эти векторы линейно независимы. Для задания б) $\frac{6}{3}=\frac{-2}{-1}=\frac{4}{2}$, а это означает, что векторы $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ линейно зависимы. При решении заданий в) и г) воспользуемся тем, что векторы $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда векторное уравнение $x_1\boldsymbol{a_1}+x_2\boldsymbol{a_2}+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ относительно неизвестных x_1,x_2,x_3 имеет ненулевое решение.

Это уравнение для задания в) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0,\\ -3x_1+3x_2-4x_3=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3=0. \end{cases}$$

Применяем метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0\\ -3 & -1 & -4 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0\\ 0 & 7 & 0 & 0\\ 0 & -7 & -5 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ясно, что система имеет только нулевое решение, поэтому для задания в) векторы $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3$ линейно независимы.

Для задания г) имеем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3=0,\\ 4x_1+2x_2+x_3=0,\\ 5x_1+3x_2+8x_3=0. \end{cases}$$

Составим основную матрицу этой системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -9\\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -9\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как у полученной ступенчатой матрицы две ненулевые строки, а соответствующая система уравнений имеет три неизвестных, то система

имеет ненулевое решение. Ответ для задания г): система векторов $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3$ линейно зависима.

Пример 4. Выяснить, можно ли вектор $\boldsymbol{a}_4$ линейно выразить через векторы $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3$, если

$\boldsymbol{a_1}=(2,-1,0,3)$, $\boldsymbol{a_2}=(1,-3,-2,2)$, $\boldsymbol{a}_3=(5,0,2,7)$, $\boldsymbol{a}_4=(0,1,0,2)$.

Решение. Для ответа на вопрос задачи достаточно выяснить, имеет ли решение векторное уравнение $x_1\boldsymbol{a_1}+x_2\boldsymbol{a_2}+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_4$. Это уравнение равносильно системе линейных уравнений с такой расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

Приведём эту матрицу к ступенчатой матрице, выполняя строчечные элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Уже можно сделать вывод, что система уравнений несовместна, а вектор $\boldsymbol{a}_4$ нельзя линейно выразить через векторы $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3$.

Пример 5. Дана система арифметических векторов: $\boldsymbol{a_1}=(2,4,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(4,-2,-2,1)$, $\boldsymbol{a}_3=(-2,6,2,0)$, $\boldsymbol{a}_4=(4,3,-1,-3)$, $\boldsymbol{a}_5=(-7,-4,0,-1)$.

A. Найти все линейные зависимости между векторами этой системы.

B. Найти какую-нибудь нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$ равную нулевому вектору.

C. Можно ли вектор $\boldsymbol{a_2}$ линейно выразить через векторы $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a}_3$?

D. Можно ли вектор $\boldsymbol{a}_5$ линейно выразить через векторы $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$?

E. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$

F. Каждый вектор данной системы линейно выразить через векторы найденного базиса.

Решение. Решение всех шести заданий основывается на нахождении чисел x_1,x_2,x_3,x_4,x_5, удовлетворяющих соотношению

$$x_1\boldsymbol{a_1}+x_2\boldsymbol{a_2}+x_3\boldsymbol{a}_3+x_4\boldsymbol{a}_4+x_5\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{0}. \qquad (1)$$

Выражая в соотношении (1) векторы через их координаты, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Задание A. Для установления всех зависимостей между данными векторами найдём все решения системы (2). Так как свободные члены каждого уравнения системы (2) равны нулю, то для простоты вместо расширенной матрицы будем рассматривать основную матрицу системы (2):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 & 0 & -7 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно записать ступенчатую систему уравнений, равносильную системе (2):

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_3 - 7x_5 = 0, \\ 6x_2 - 6x_3 - 5x_5 = 0, \\ 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Находим общее решение системы (2):

$$x_1 = \frac{7}{6}x_5 - x_3,\ x_2 = \frac{5}{6}x_5 + x_3,\ x_4 = \frac{1}{3}x_5,\ x_4, x_5 - \text{любые числа.} \tag{3}$$

Получаем ответ для задания A:

$$\left(\frac{7}{6}x_5 - x_3\right)\boldsymbol{a_1} + \left(\frac{5}{6}x_5 + x_3\right)\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + \frac{1}{3}x_5\boldsymbol{a}_4 + x_5\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

$$x_3, x_5 - \textit{любые числа}.$$

Задание B. Если в равенстве (4) выбрать $x_3 = 1, x_5 = 0$, то получим равенство

$$-\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + 0\boldsymbol{a}_4 + 0\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{0}, \tag{5}$$

Это и есть ответ на вопрос задания B.

Задание C. Равенство (5) можно переписать так: $\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{a_3}$ т.е. $\boldsymbol{a_2}$ можно выразить через $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a}_3$.

Задание D. Пусть $x_3 = 0$, а $x_5 = 1$, тогда равенство (4) примет такой вид $\frac{7}{6}\boldsymbol{a_1} + \frac{5}{6}\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 + \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{0}$, откуда получаем $\boldsymbol{a}_5 = -\frac{7}{6}\boldsymbol{a_1} - \frac{5}{6}\boldsymbol{a}_2 - 0\boldsymbol{a}_3 - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_4$, т.е. вектор $\boldsymbol{a}_5$ можно выразить через остальные векторы заданной системы.

Задание E. Из соотношения (4) следует, что данная система векторов $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$ линейно зависима, таким образом, некоторый её вектор линейно выражается через остальные векторы. Из решения задания D следует, что вектор $\boldsymbol{a}_5$ выражается через $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$. Исключаем $\boldsymbol{a}_5$ из исходной системы векторов. Для оставшихся векторов $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ на основании (4) получаем равенство

$$-x_3\boldsymbol{a_1}+x_3\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3+0\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}, \qquad (6)$$

выражающее всевозможные их линейные зависимости (x_3 может быть любым числом). Так как x_3 в равенстве (6) может быть не равным нулю, то система векторов $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ линейно зависима, а вектор $\boldsymbol{a}_3$ линейно выражается через $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_4$. Теперь из этой системы векторов исключаем $\boldsymbol{a}_3$; оставшиеся векторы $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_4$ линейно независимы. Это означает, что векторы $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_4$ составляют искомый базис.

Задание F. Из решений заданий C и D имеем:

$$\boldsymbol{a}_5=-\frac{7}{6}\boldsymbol{a_1}-\frac{5}{6}\boldsymbol{a}_2+0\boldsymbol{a}_3-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_4,$$

$$\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a_1}-\boldsymbol{a}_2+0\boldsymbol{a}_4.$$

Если к этим двум равенствам добавим ещё три очевидных:

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a_1}+0\boldsymbol{a}_2+0\boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_2=0\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a}_2+0\boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_4=0\boldsymbol{a_1}+0\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_4,$$

то получим ответ для задания F.

Пример 6. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$ в зависимости от значений параметра λ.

Решение. Выполняя столбцовые и строчечные элементарные преобразования матриц, получим:

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -6 & 10\\ 1 & 2 & -1 & \lambda\\ 2 & 5 & \lambda & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -6 & 2\\ 0 & 1 & -5 & \lambda-10\\ 0 & 3 & \lambda+12 & -21\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 5 & \lambda-10\\ 0 & 0 & \lambda-3 & 3\lambda+9\end{pmatrix}$$

Если $\lambda\neq 3$, то это ступенчатая матрица, содержащая три ненулевые строки, если же $\lambda=3$, то это матрица с двумя ненулевыми строками.

Ответ: если $\lambda=3$, то ранг матрицы равен 2; если $\lambda\neq 3$, то ранг равен 3.

Задания для самостоятельной работы

1.17. Найти линейную комбинацию $2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3$ векторов $\boldsymbol{a}_1 = (2,0,-1,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2,-1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,1,0,2)$.

1.18. Найти вектор x из уравнения $3(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}) = 5(\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{x})$, если $\boldsymbol{a}_1 = (2,5,1,3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (10,1,5,10)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4,1,-1,1)$.

1.19. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

а). $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,3,4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0,3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0,3,0,9)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (3,4,5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,3,3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,1,8)$.

1.20. Найти все значения λ, при которых вектор $\boldsymbol{b} = (5,3,1)$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1 = (5,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (7,4,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (\lambda,6,5)$.

1.21. Дана система арифметических векторов: $\boldsymbol{a}_1 = (2,-1,5,3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4,-3,3,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,-2,4,3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4,-1,17,15)$, $\boldsymbol{a}_2 = (7,-6,0,-7)$.

A. Найти все линейные зависимости между векторами этой системы.

B. Найти какую-нибудь нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$ равную нулевому вектору.

C. Можно ли вектор $\boldsymbol{a_2}$ линейно выразить через векторы $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a}_3$?

D. Можно ли вектор $\boldsymbol{a}_5$ линейно выразить через векторы $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$?

E. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$.

F. Каждый вектор данной системы линейно выразить через векторы найденного базиса.

1.22. Вычислить ранг следующих матриц при помощи элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

1.23. Вычислить ранг матрицы в зависимости от значений параметра λ:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Ответы

1.17. (–8, –5, 1, 3). **1.18.** (1, 2, 3, 4). **1.19.** а) линейно зависимы; б) линейно независимы. **1.20.** $\lambda \neq 12$. **1.21.** B. $2a_1 - 3a_2 + 4a_3 - a_4 + 0a_5 = 0$. Нельзя; D. Можно; E. $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}$ – базис. F. $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = 0\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_3 = 0\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4 = 2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - 5\boldsymbol{a}_3$. **1.22.** а) 3; б) 2. **1.23.** а). Если $\lambda = 0$, то ранг равен 2, иначе ранг равен 3; б) Если $\lambda = 1$,то r = 1; если $\lambda = -3$,то r = 2; если $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq 3$, то r = 3.

1.3. Однородная система линейных уравнений

Краткие теоретические сведения

Если в линейном уравнении свободный член равняется нулю, то такое у равнение называется *однородным.* Если все уравнения системы линейных уравнений однородные, то она называется *системой однородных линейных уравнений,* или *однородной системой уравнений.* Однородная система уравнений всегда совместна: её решением является *нулевой* вектор (0, 0,…,0), как говорят, *тривиальное* решение. Совместность однородной системы совсем просто обосновывается и на основании критерия совместности системы линейных уравнений.

Если в однородной системе уравнений *число уравнений меньше числа неизвестных,* то она имеет *бесконечное множество решений.* Заметим, что в этом случае система имеет и *ненулевое* решение.

Для существования *ненулевого* решения однородной системы линейных уравнений *необходимо и достаточно*, чтобы *ранг основной* матрицы системы *был меньше числа неизвестных.*

Рассмотрим произвольную систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Ей соответствует однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Справедливы такие свойства решений систем (1) и (2):

1. Если $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – любые решения системы (2), то $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ – также решение системы (2).

2. Если $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ – произвольное решение системы (2) и λ – любое число, то $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n)$ – также решение системы (2).

3. Любая линейная комбинация решений однородной системы является решением этой системы.

4. Если $\boldsymbol{c}$ – любое решение системы (1),а $\boldsymbol{b}$ – какое-либо решение (2), то $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ – решение (1).

5. Разность любых двух решений системы (1) является решением системы (2).

6. Если $\boldsymbol{c}$ – фиксированное частое решение системы (1), то всякое решение системы (1) можно представить в виде $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{b}$ – некоторое решение системы (2), т.е. любое частое решение неоднородной системы линейных уравнений порождает с помощью множества всех решений соответствующей однородной системы все решения системы (1).

Обозначим через L множество всех решений однородной системы уравнений (2). Оно является подмножеством n-мерных арифметических векторов пространства $\mathbb{R}^n$. Если у системы (2) есть ненулевое решение, то множество L имеет базис. Этот базис называют фундаментальным набором решений системы линейных однородных уравнений.

Если ранг r основной матрицы однородной системы линейных уравнений (2) меньше числа неизвестных n, то система (2) обладает фундаментальным набором решений, состоящим из n-r решений. Если $r=n$, то фундаментальный набор не существует.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти общее решение, а также фундаментальный набор решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2-2x_3=0, \\ 4x_1+7x_2-5x_3=0, \\ x_1+x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+9x_2-6x_3=0. \end{cases}$$

Решение. Составим основную матрицу системы и приведём её к ступенчатой матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг r этой матрицы равен 3, число неизвестных данной системы уравнений n=3. Так как n=r, то эта система уравнений имеет только нулевое решение. Фундаментального набора решений нет.

Пример 2. Найти общее решение, а также фундаментальный набор решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Приведём основную матрицу системы к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -2 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -7 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для ранга r матрицы системы имеем r=3, число неизвестных n=5. Фундаментальный набор состоит из $n-r$=2 решений. Далее находим общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Запишем общее решение в виде: $x_1 = x_4 + 2x_5$, $x_2 = x_4 - x_5$, $x_3 = -x_4$, x_4, x_5 – любые числа. Полагая $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ и $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, получаем фундаментальный набор решений: {(1, 1, –1, 1, 0), (2, –1, 0, 0, 1)}.

Пример 3. Найти общее решение системы линейных уравнений, если (3, –2, 0, 3) – одно из её частных решений, а вектор (2, 0, 1, –3) составляет фундаментальный набор решений соответствующей однородной системы.

Решение. По свойствам решений системы линейных уравнений любое решение неоднородной системы можно получить из одного частного её решения и всех решений соответствующей однородной системы, поэтому искомое общее решение имеет вид (2λ+3, –2, λ, –3λ+3), где λ – любое число.

Задания для самостоятельной работы

1.24. Найти общее решение и фундаментальный набор решений для систем уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ -x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_2 + 4x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 10x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

1.25. Образуют ли решения (1, 1, 1, 1) и (1, –1, 1, 0) для системы уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ фундаментальный набор решений?

Ответы

1.24. а) Общее решение: $x_1 = 2x_4$, $x_2 = -x_4$, $x_3 = 3x_4$, x_4 – любое число; фундаментальный набор: (2, –1, 3, 1). б) Система имеет только нулевое решение. в) Общее решение: $x_1 = \frac{13}{7}x_3$, $x_2 = \frac{2}{7}x_3$, x_3 – любое число; фундаментальный набор: (13, 2, 7). г) $x_2 = 2x_1 - 8x_4$, $x_3 = -3x_4$, x_1, x_4 – любые числа; фундаментальный набор: (1, 2, 0, 0), (0, –8, –3, 1).

1.4. Алгебра матриц

Краткие теоретические сведения

Матрицей размеров $m \times n$ называется таблица чисел a_{ij}, $i = 1,2,...,m$; $j = 1,2,...,n$ вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Краткие обозначения: $A, A_{ij}, \left(a_{ij}\right)$. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной* порядка n. Если все элементы матрицы равняются нулю, то матрица называется нулевой и обозначается О.

Две матрицы считаются *равными*, если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны.

Суммой двух матриц $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ одинаковых размеров $m\times n$ называется матрица $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$ для $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$. Для матриц разных размеров сумма не существует (не определена).

Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ размеров $m\times n$ *на число* λ называется матрица $\lambda\left(a_{ij}\right)$ тех же размеров, которая обозначается λA.

Перечислим свойства этих операций:

1) $A+B=B+A$,

2) $\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$,

3) $A+O=A$,

4) $a(bA)=(ab)A$,

5) $\left(a+b\right)A=aA+bA$,

6) $a\left(A+B\right)=aA+aB$,

7) для любой матрицы A размеров $m\times n$ существует матрица B тех же размеров такая, что $A+B=B+A=O$, т.е. матрица, противоположная матрице A; для матрицы, противоположной матрице A используется обозначение $-A$.

Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ размеров $m\times n$ на матрицу $B=\left(b_{ij}\right)$ размеров $n\times k$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)$ размеров $m\times k$ каждый элемент c_{ij} которой вычисляется по формуле:

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+ac_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$ где $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$.

Другими словами элемент c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов *i*-ой строки матрицы A и элементов j-го столбца матрицы B. Обозначение: $C=A\cdot B=AB$.

Степенью s матрицы A называется матрица $A^s=A\cdot A\cdot...\cdot A$ (матрица A умножается на себя *s* раз), где *s* – натуральное число.

Свойства умножение матриц:

1) $A(BC)=(AB)C$,

2) $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$,

3) $a(AB)=(aA)B=A(aB)$.

Квадратная матрица *D* называется диагональной, если все её элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, т.е.

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ..... & ..... & ..... & \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица E, для которой $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = 1$ называется единичной, таким образом,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ..... & ..... & ..... & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Для любой квадратной матрицы A порядка n выполняются равенства: $AE = EA = A$.

Квадратная матрица называется невырожденной, если её строки (столбцы) линейно независимы. Обратной по отношению к квадратной матрице A называется матрица A^{-1} такая, что $A^{-1}A = AA^{-1} = E$. Матрица A имеет обратную матрицу тогда и только тогда, когда она невырожденная.

Для нахождения матрицы, обратной матрице A порядка n, составляем прямоугольную матрицу $\left(A\middle|E\right)$ размеров $n \times 2n$ и с помощью элементарных (строчечных) преобразований приводим её к виду $\left(E\middle|C\right)$. Полученная при этом матрица C является матрицей A^{-1}.

Систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

можно записать в матричной форме: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Если матрица A^{-1} существует, то $X = A^{-1}B$.

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой её строк столбцами (с сохранением порядка), называется транспонированной по отношению к матрице A и обозначается A^T. Имею место равенства:

1) $\left(A^T\right)^T = A$,

2) $\left(A + B\right)^T = A^T + B^T$

3) $\left(AB\right)^T = B^T A^T$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Можно ли выполнить сложение $A+B$? Найти $2A+C$, $A-2C+3D$.

Решение. Матрица A имеет размеры 3×2, а матрица B – размеры 2×3 (матрицы разных размеров), поэтому выполнить сложение этих матриц нельзя. Матрицы A, C, D одинаковых размеров, поэтому находим:

$$2A+C=2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A-2C+3D=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -22 \\ 1 & 1 \\ -4 & -14 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найти AB, BA и AC, если они существуют.

Решение. Поскольку матрица A имеет размеры 2×3, а матрица B – 3×3, то AB существует; матрица C имеет размеры 3×1, следовательно, AC существует, а BA нет. Используя определение произведения матриц, находим:

$$AB=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+0\cdot(-2) & 1\cdot 1+(-2)\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+0\cdot(-1) \\ -3\cdot 2+1\cdot(-1)+1\cdot(-2) & -3\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0 & -3\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -9 & -2 & -5 \end{pmatrix};$$

$$AC=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-2)\cdot 0+0\cdot(-1) \\ -3\cdot 2+1\cdot 0+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Выполнить проверку: $AA^{-1}=E$.

Решение. Составим матрицу $\left(A\middle|E\right)$ и выполним строчечные элементарные преобразования:

$$\left(A\middle|E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\2&-2&4&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&2&1&1&0\\0&0&6&0&2&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&-1&0\\0&6&0&3&1&-1\\0&0&6&0&2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&0&0&3&-3&0\\0&6&0&3&1&-1\\0&0&6&0&2&1\end{array}\right);$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\left(\begin{array}{ccc}3&-3&0\\3&1&-1\\0&2&1\end{array}\right).$$

Выполним проверку:

$$AA^{-1}=\left(\begin{array}{ccc}1&1&1\\-1&1&1\\2&-2&4\end{array}\right)\cdot\frac{1}{6}\left(\begin{array}{ccc}3&-3&0\\3&1&-1\\0&2&1\end{array}\right)=\frac{1}{6}\left(\begin{array}{ccc}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{array}\right)=E.$$

Пример 4. Выяснить, существует ли матрица, обратная матрице $A=\left(\begin{array}{ccc}1&4&3\\3&-3&-1\\0&3&2\end{array}\right)$, если существует, то найти её.

Решение.

$$\left(A\middle|E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&4&3&1&0&0\\3&-3&-1&0&1&0\\0&3&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&4&3&1&0&0\\0&-15&-10&-3&1&0\\0&3&2&0&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&4&3&1&0&0\\0&0&0&-3&1&-5\\0&3&2&0&0&1\end{array}\right).$$

Ясно, что матрица A является вырожденной, следовательно, A^{-1} не существует.

Пример 5. Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6,\\-x_1+x_2+x_3=0,\\2x_1-2x_2+4x_3=6.\end{cases}$$

Решение. Запишем систему уравнений в виде матричного уравнения $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Если матрица A^{-1} существует, то матричное уравнение $AX = B$ имеет единственное решение $X = A^{-1}B$. Используя решение примера 3, получаем:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18+0+0 \\ 18+0-6 \\ 0+0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Пример 6. Решить матричное уравнение *XA=B,* где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Как и при решении задания примера 5 можно записать:

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3-3+0 & -3-1+1 & 0+1+5 \\ 9-3+0 & -9-1+10 & 0+1+5 \\ 0+6+0 & 0+2+4 & 0-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы

1.26. Вычислить $2A + 3B$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.27. Вычислить произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 15 & 6 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^6$.

1.28. Вычислить матрицу, обратную данной:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.29. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 \\ 3 & -8 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.30. Решить систему уравнений матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

Ответы

1.26. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. **1.27.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 29 & 41 & 28 \end{pmatrix}$; б) Произведение не существует; в) $\begin{pmatrix} 18 & -20 & -23 \\ 108 & 63 & 62 \\ 51 & 30 & 19 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 239 & -70 \\ 140 & -41 \end{pmatrix}$. **1.28.** а) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; г) не существует. **1.29.** а) $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -27 & 11 & 11 \\ -12 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -2a-1 & -2b+5 \\ a & b \end{pmatrix}$, a, b – любые.

1.30. а) $(1, -2, 3)$; б) (3,–2, 2), в) (1, 1, 1).

1.5. Определители

Краткие теоретические сведения

Определителем (дискриминантом) второго порядка, составленного из элементов матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число

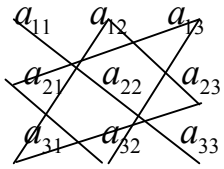
$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Для квадратной матрицы третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ рассматривается определитель третьего порядка – число

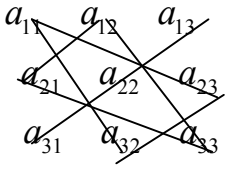
$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}.$$

Укажем схему составления шести слагаемых правой части этого равенства:



\+ (плюс)



– (минус)

В этой схеме плюс означает, что произведения указанных элементов берутся со знаком «+», а минус означает, что соответствующие произведения берутся со знаком «–».

Определителем *n*-го порядка, соответствующего матрице

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется число

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}(-1)^{k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}..a_{n\alpha_n},$$

где сумма распространяется на все возможные перестановки $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ чисел 1, 2, …, n; $k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ – число инверсий в перестановке; $a_{i\alpha_i}\,(i=1,2,...,n)$ – элементы определителя.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|=|a_{ij}|$ n-го порядка (n>1) называется определитель n–1-го порядка, полученный из $|A|$ вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит данный элемент a_{ij}. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Свойства определителей:

1. Величина определителя не изменится, если его стоки заменить столбцами с теми же номерами, т.е. $|A^T|=|A|$. Таким образом, строки и столбцы определителя равноправны.
2. Определитель, содержащий нулевую строку, равен нулю.
3. При перестановке местами двух строк определитель меняет знак.
4. Общий множитель всех элементов строки можно вынести за знак определителя.
5. Если в определителе есть две пропорциональные строки, то определитель равен нулю.
6. Определитель, у которого элементы некоторой строки являются суммой двух слагаемых, равняется сумме двух определителей, в первом из которых в указанной строке стоят первые слагаемые, а во втором – вторые слагаемые; остальные строки – прежние.
7. Если к одной из строк определителя прибавить линейную комбинацию других его строк, то определитель не изменится.
8. Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки на их алгебраические дополнения (разложение определителя по строке).
9. Сумма произведений элементов произвольной строки определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки равняется нулю.
10. Определитель равен нулю тогда и только тогда, тогда его строки линейно зависимы.
11. Определитель произведения матриц равен произведению матриц-сомножителей.

Формулы Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ ..... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы. Если определитель Δ системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_k – определитель, получающийся из Δ заменой k-го столбца (k =1, 2, …, n) столбцом свободных членов системы уравнений.

Присоединённой для матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ называется матрица

$$A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A. Обратная матица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. По определению получаем $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -11$.

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ различными способами.

Решение. 1) Используя определение, получаем:

$\Delta = 1 \cdot 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - (-2) \cdot 2 \cdot (-1) = -22$.

2) Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4-10-8 = -22.$$

3) Разложим определитель по третьей строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -22.$$

4) К третьему столбцу определителя Δ прибавим его первый столбец и разложим полученный определитель по третьей строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -22.$$

Ответ: $\Delta = -22$.

Задания для самостоятельной работы

1.31. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 9 & 6 \end{vmatrix}$.

1.32. Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 1, \\ 3x_1 - 7x_2 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = 1, \\ 6x_1 - 9x_2 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 3x + 6y + 12 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 10, \\ x_1 + x_3 = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -6, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

1.33. С помощью присоединённой матрицы найти обратную к матрице:

а) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответы

1.31. а) 1; б) –2; в) 1; г) $4ab$; д) –2; е) 1; ж) –4; з) –50. **1.32.** а) (3, 2); б) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$; в) $(2, -3)$; г) (3,–1,–1); д) (2,–1,1); е) (1,1,1). **1.33.** а) $\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$; б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; ж) не существует.

1.6. Комплексные числа и многочлены

Краткие теоретические сведения

Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$, где a, b – действительные числа, а символ I – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$. При этом a называется действительной частью, а b – мнимой частью числа z; обозначения: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Множество комплексных чисел обозначается буквой $\mathbb{C}$.

Два комплексных числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда действительная и мнимая его части равны нулю.

Запись z в виде $a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа.

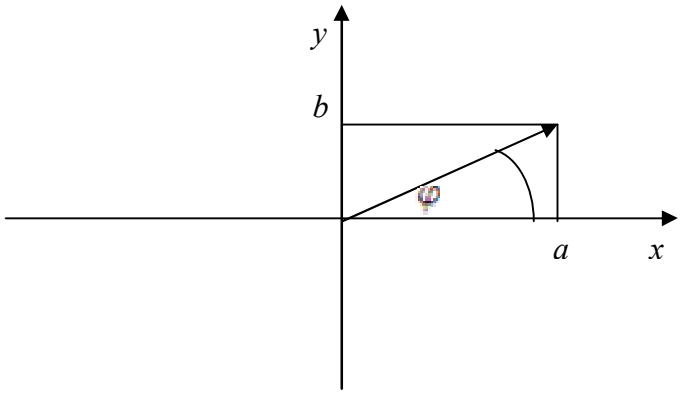
Действия над комплексными числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ выполняются так:

1. $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;
2. $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$;
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)i$;

4. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$, $z_2\neq 0$.

Комплексное число $\overline{z}=a-bi$ называется комплексно сопряжённым (сопряжённым) числу $z=a+bi$.

Геометрически каждое комплексное число $z=a+bi$ изображается точкой $A(a,b)$ на координатной плоскости xOy или вектором $\overrightarrow{OA}$.



Комплексное число $z=a+bi$ при b=0 совпадает с действительным числом a, такие числа изображаются точками оси Ox. Комплексные числа $z=0+bi=bi$ изображаются точками оси Oy и называются чисто мнимыми. Координатная плоскость xOy называется комплексной плоскостью переменной z, ось Ox– действительной осью, ось Oy–мнимой осью.

Длина вектора $\overrightarrow{OA}$ называется модулем числа z, а радианная мера угла, образованного этим вектором с положительной полуосью абсцисс – аргументом комплексного числа.

Модуль числа z обозначается $|z|=r$; аргумент этого числа – $\arg z=\varphi$. Модуль комплексного числа z определяется однозначно: $r=\sqrt{a^2+b^2}$, а аргумент с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Имеем: $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$, $z=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа $z=a+bi$.

Если обозначить $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то действия над этими числами выполняются по таким правилам:

1. $z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.
2. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$, $z_2\neq 0$.
3. $z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, $n\in\mathbb{N}$.

Эта формула называется формулой Муавра.

4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ n = 0,1,2,...,n-1.$

Выражение вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, где $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ – данные числа (действительные или комплексные), называется многочленом от одной переменной x (от одного неизвестного x или от одной буквы x). Числа $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ называются коэффициентами многочлена, при этом $a_n \neq 0$ Число n (n – целое неотрицательное) называется степенью многочлена, $a_n x^n$ – старшим членом. Многочлены обозначают символами $f(x)$, $g(x)$ и т.д. Многочлен $f(x)$, все коэффициенты которого равны нулю, называют нулевым и записывают $f(x)=0$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные многочлены. Если существует многочлен $h(x)$ такой, что $f(x) = g(x)h(x)$, то говорят, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$ или многочлен $g(x)$ делит (делитель) $f(x)$

Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ ($g(x)\neq 0$) существуют и единственные многочлены $h(x)$ и $r(x)$ такие, что $f(x) = g(x)h(x) + r(x)$. При этом либо $r(x)=0$, либо степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$; $h(x)$ называют частным, а $r(x)$ – остатком от деления $f(x)$ на $g(x)$. Для нахождения частного и остатка используют «деление уголком».

Число $f(a)$ называется значением многочлена $f(x)$ при $x=a$ (a– действительное или комплексное число). Число a называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(a)=0$.

Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x–a$ равен значению многочлена $f(x)$ при $x=a$ (теорема Безу).

Число a является корнем многочлена тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $x–a$.

Если существует натуральное число m такое, что $f(x)$ делится на $(x-a)^m$, но не делится на $(x-a)^{m+1}$, то число a называют m-кратным корнем многочлена $f(x)$, а число m – кратностью корня a. Если $m=1$, то корень называют простым.

Деление многочлена на двучлен удобно выполнять по схеме Горнера.

Пусть $f(x) = (x-a)h(x) + r$, $a_0, a_1, ..., a_n$; $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$ – коэффициенты многочленов $f(x)$ и $h(x)$ соответственно. Эти коэффициенты могут быть найдены по следующей схеме, называемой схемой Горнера:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = b_{n-1}$	$b_{n-3} = b_{n-2}a + a_{n-2}$	…	$b_0 = b_1 a + a_1$	$r = b_0 a + a_0$

В дальнейшем практическое применение схемы Горнера будет показано на примерах.

Сформулируем некоторые свойства многочлена и его корней:

1. Всякий многочлен положительно степени имеет хотя бы один комплексный корень (основная теорема алгебры многочленов).

2. Для каждого многочлена $f(x)$ степени n ($n>0$) существуют комплексные числа $x_1, x_2, ..., x_n$ такие, что $f(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, где a_n – старший коэффициент многочлена $f(x)$.

3. $f(x) = a_n(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}...(x-x_k)^{m_k}$, где $x_1, x_2, ..., x_k$ – попарно различные корни многочлена $f(x)$, а $m_1, m_2, ..., m_k$ – их кратности $(m_1 + m_2 + ... + m_k = n)$.

4. (Теорема Виета). Если $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, то

$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + ... + x_n)$,

$a_{n-2} = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + ... + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$,

$a_{n-3} = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n)$,

……

$a_0 = (-1)^n x_1x_2...x$.

Укажем способ нахождения рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами:

Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, с целыми коэффициентами, то числитель p является делителем свободного члена a_0, а знаменатель q – делителем старшего коэффициента a_n.

Примеры решения типовых задач

Пусть $z_1 = 5 - 4i$, $z_2 = 3 + 7i$, $z_3 = 2 - 5i$.

Пример 1. Выполнить действия $z_1 + z_2 - z_3$.

Решение. $z_1 + z_2 - z_3 = (5-4i) + (3+7i) - (2-5i) = (5+3-2) + +(-4+7+5)i = 6 + 8i$.

Пример 2. Вычислить произведение $z_1 \cdot z_2$.

Решение. $z_1 \cdot z_2 = (5-4i)\cdot(3+7i) = 5\cdot 3 - (-4)\cdot 7 + (5\cdot 7 + (-4)\cdot 3)i = 43 + 23i$

Пример 3. Вычислить частное $\frac{z_1}{z_3}$.

Решение. Для нахождения частного числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряжённое знаменателю

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5-4i}{2-5i} = \frac{(5-4i)\cdot(2+5i)}{(2-5i)\cdot(2+5i)} = \frac{30+17i}{29} = \frac{30}{29} + \frac{17}{29}i \,..$$

Пример 4. Вычислить i^{16}, i^{26}, i^{33}, i^{19}.

Решение. Имеем $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$. Любое целое число m можно представить как $4k+r$, где r=0,1,2,3. Следовательно,

$i^m = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = i^r$, а так как $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, то имеем $i^{16} = i^{4\cdot4} = 1$, $i^{26} = i^{4\cdot6+2} = i^2 = -1$, $i^{33} = i^{4\cdot8+1} = i^1 = i$, $i^{19} = i^{4\cdot4+3} = i^3 = -i$.

Ответ: 1, –1, *i*, *–i*.

Пример 5. Доказать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 выполняется равенство $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Решение

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} =$

$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{a+bi} + \overline{c+di} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Пример 6. Решить уравнение $2 + 5ix - 3iy = 14i + 3x - 5y$ относительно неизвестных *x* и *y*, считая их действительными.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду: $2 + (5x - 3y)i = (3x - 5y) + 14i$. Отсюда, согласно определению равенства комплексных чисел, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 14, \\ 3x - 5y = 2. \end{cases}$$

Решив систему, получим ответ: $x = 4, y = 2$.

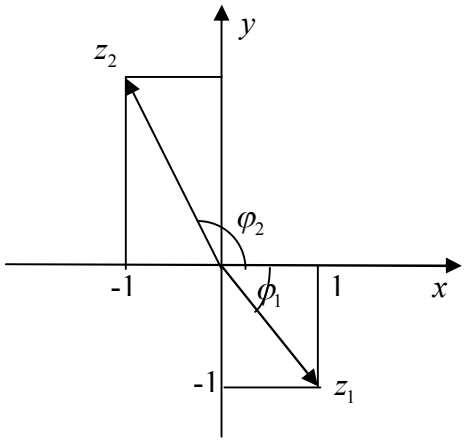
Пример 7. Для данного комплексного числа *z* найти $|z|$, $\arg z$; записать это число в тригонометрической форме; изобразить число на комплексной плоскости.

$z_1 = 1 - i;\ z_2 = -1 + i\sqrt{3}.$

Решение. Имеем $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};\ \cos\varphi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi_1 = -\dfrac{\pi}{4};$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$|z_2| = \sqrt{1+3} = 2;\ \cos\varphi_2 = -\frac{1}{2},\ \varphi_2 = \frac{5\pi}{6};\ z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$



Точка, изображающая число z_1, расположена в IV четверти и $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$; точка, изображающая z_2 – в III четверти и $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Пример 8. Вычислить $\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}{\left(-1+i\right)^{16}}$, используя тригонометрическую форму; ответ записать в алгебраической форме.

Решение. Будем пользоваться формулой Муавра:

$$z_1^{10} = \left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10} = \left(2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{40\pi}{3}+i\sin\frac{40\pi}{3}\right) =$$

$$2^{10}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right);$$

$$z_2^{16} = \left(-1+i\right)^{16} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{16} = 2^8\left(\cos 20\pi + i\sin 20\pi\right) = 2^8;$$

$$\frac{z_1^{10}}{z_2^{16}} = \frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}{\left(-1+i\right)^{16}} = \frac{2^{10}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{2^8} = 2\left(-1-i\sqrt{3}\right).$$

Ответ: $-2-2i\sqrt{3}$.

Пример 9. Найти частное $h(x)$ и остаток r от деления многочлена $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x + 3$ на двучлен $x+2$.

Решение. Воспользуемся схемой Горнера:

	2	0	–3	4	3
–2	2	–4	5	–6	15

Ответ: $h(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6,\ r = 15.$

Пример 10. Чему равен показатель кратности m корня 2 многочлена $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$?

Решение. Воспользуемся схемой Горнера.

	1	–5	7	–2	4	–8
2	1	–3	1	0	4	0
2	1	–1	–1	–2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7≠0			

Ответ: m=3.

Пример 11. Определить λ так, чтобы сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равнялась 1.

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3 корни данного уравнения. По теореме Виета имеем:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2},\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{7}{2},\ x_1x_2x_3 = -\frac{\lambda}{2}.$$

По условию задачи $x_1 + x_2 = 1,$ поэтому $x_3 = -\frac{1}{2}.$ Второе равенство из теоремы Виета можно записать так: $x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_3 = -\frac{7}{2},$ откуда получаем $x_1x_2 = -3.$ Теперь выполняется равенство $-3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\lambda}{2}.$ Следовательно, $\lambda = -3.$

Пример 12. Найти все рациональные корни уравнения $2x^4 + 5x^3 - -x^2 + 5x - 3 = 0.$

Решение. Рациональные корни будем искать среди несократимых дробей вида $\frac{p}{q}$ таких, что p является делителем числа -3, а q – положительный делитель числа 2. Таким образом, все рациональные корни данного уравнения находятся среди чисел $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}$. Используем схему Горнера

	2	5	−1	5	−3	
−1	2	3	−4	9	−12	−1 не корень
1	2	7	6	11	8	1 не корень
3	2	11	32	101	300	3 не корень
−3	2	−1	2	−1	0	−3 корень

Теперь можно записать:

$$2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x - 3 = (x+3)(2x^3 - x^2 + 2x - 1).$$

Далее следует искать корни уравнения $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0;$ ясно, что рациональными его корнями могут быть только $\pm\frac{1}{2}$. Продолжим вычисления:

	2	−1	2	−1	
$\frac{1}{2}$	2	0	2	0	$\frac{1}{2}$ корень

Запишем равенство

$$2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x - 3 = (x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2) = (x+3)(2x-1)(x^2+2).$$

Уравнение $x^2 + 2 = 0$ рациональных корней не имеет.

Ответ: $-3,\ \frac{1}{2}$ – простые корни.

Задания для самостоятельной работы

1.34. Решить уравнения, считая x и y действительными:

а) $(2+3i)x+(5+7i)y=1+2i$; б) $(2+4i)x-(3+5i)y=4+10i$;

в) $(5+i)x+(7+2i)y=-2-i$.

1.35. Вычислить i^{12}, i^{17}, i^{22}, i^{31}.

1.36. Вычислить в алгебраической форме:

а) $(2-3i)+(2-i)-(3+2i)$; б) $(-1+i)(2+i)+\dfrac{5}{2-i}$;

в). $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; г) $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; д) $\dfrac{(1-2i)(3+i)}{2+i}$.

1.37. Докажите указанные равенства:

а) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$; б) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$; в) $\left|\overline{z}\right|=|z|$.

г) $\overline{z}+z=2\operatorname{Re}z.$; д) $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

1.38. Вычислить, используя тригонометрическую форму комплексного числа; ответ дать в алгебраической форме:

а) $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$; б) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}$; в) $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; г) $\dfrac{(-1+i)^{16}}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}$.

1.39. Найти все значения корня из комплексного числа:

а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[3]{1}$; в) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

Ответы

1.34. а) (1, 2); б) (5, 2); в) (1, −1). **1.35.** 1, i, –1, $-i$. **1.36.** а) $1-6i$; б) $-1+2i$; в) $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; г) 1; д) $1-3i$. **1.38.** а) –64; б) $512\left(1+i\sqrt{3}\right)$; в) 1; г) $-\dfrac{1}{8}\left(1-i\sqrt{3}\right)$ **1.39.** а) 19, $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, $-i$. б) 1, $-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 1

Решить системы уравнений методом Гаусса. Если система имеет бесчисленное множество решений, то найти её общее решение и одно частное решение.

1. $\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=3,\\4x_1-5x_2+2x_3=-3,\\5x_1-7x_2+3x_3=1.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=-2,\\x_1+2x_2+3x_3=-1,\\x_1-3x_2-2x_3=3.\end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$

Контрольная работа № 2

1. Записать и решить систему уравнений в матричном виде; обратную матрицу следует вычислить при помощи строчечных элементарных преобразований.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 4 \\ 9 & -12 & 5 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 3

1. Решить систему уравнений по правилу Крамера; для вычисления определителей использовать четыре способа.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Систему линейных уравнений записать и решить матричным способом; обратную матрицу вычислить с помощью присоединённой матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Используя определители, исследовать и решить систему линейных уравнений в зависимости от значений параметра λ.

$$\begin{cases} \lambda x - 4y = \lambda + 1, \\ 3x + 4y = 2. \end{cases}$$

Контрольная работа № 4

1. Вычислить $\dfrac{2\cdot(2+i)\cdot(4+i)}{1+i}$.

2. Вычислить, используя тригонометрическую форму числа $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}{(1-i)^{12}}$.

3. Найти рациональные корни многочлена $5x^4-9x^3+8x^2-73x-15$.

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Геометрические векторы и операции над ними

Краткие теоретические сведения

Отрезок прямой линии называется направленным отрезком или вектором, если указано, какой из его концов считается началом отрезка, а какой – концом. Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется нулевым. Обозначения: $\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}$ (нулевой вектор).

Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной (а также модулем и абсолютной величиной). Обозначения: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\boldsymbol{a}|$.

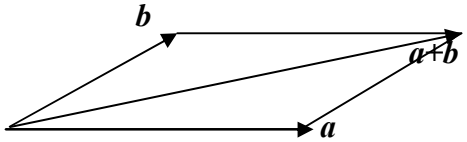
Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными. Векторы называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Длина его, разумеется, равна нулю.

Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одинаково направлены, то обозначают $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$, если они противоположно направлены, то – $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$.

Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на действительное число λ называется вектор $\boldsymbol{b}$, определяемый следующими условиями: 1) $|\boldsymbol{b}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$; 2) вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$; 3) $\boldsymbol{b}\uparrow\uparrow\boldsymbol{a}$, если $\lambda > 0$ и $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$, если $\lambda < 0$.

Пусть $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, тогда вектор $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначается $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (правило треугольника).

Очевидно, что вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ в этом случае представляет диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (правило параллелограмма).



Пусть $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$ и $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$, тогда вектор $\boldsymbol{b}$ называется противоположным вектору $\boldsymbol{a}$ и обозначается $-\boldsymbol{a}$. Разностью векторов $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ называется сумма $\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются линейными операциями над векторами.

Рассмотрим несколько векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_m$. Любой вектор вида $\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{a}_m$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – некоторые числа, называется линейной комбинацией данных векторов с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Если вектор представлен как линейная комбинация каких-либо векторов, то говорят, что он разложен по этим векторам. Чаще всего находят разложение вектора по базису.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов $(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2})$ этой плоскости.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка $(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})$ некомпланарных векторов.

Коэффициенты разложения вектора по базису называются координатами вектора в этом базисе. Если $(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})$ – базис и $a=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\alpha_3\boldsymbol{e}_3$, то этот факт записывают следующим образом: $a(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ или $a=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ Аналогично рассматриваются координаты вектора на плоскости. Векторы равны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты равны. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, при сложении векторов складываются их соответствующие координаты. Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Скалярным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ называется *число*, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов обозначается $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ или $\boldsymbol{ab}$. Следовательно, можно записать $(a,b)=ab=|a||b|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=\boldsymbol{aa}=\boldsymbol{a}^2$ – *скалярный квадрат* вектора $\boldsymbol{a}$.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются ортогональными, если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$. Базис называется *ортонормированным*, если его векторы попарно ортогональны и по длине равны единице.

Если векторы $a=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и $b=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то:

1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$;

2) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$;

3) $\cos\varphi=\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}$.

Декартовой (аффинной) системой координат на плоскости называется совокупность точки и базиса: O, $(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2})$ Точка O называется *началом* координат, а прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *осями координат* (ось *абсцисс* и ось *ординат*). Координаты радиус-вектора точки M (вектора $\overrightarrow{OM}$) по отношению к началу координат называются *координатами точки* M. Если $\overrightarrow{OM}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$, то x_1 и x_2 – координаты точки M, то есть $M(x_1,x_2)$. Если в выбранной системе координат точки A и B имеют координаты (x_1,y_1) и (x_2,y_2) соответственно, то $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$. Если

$C(x_3, y_3)$ и $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$, где $\lambda \neq 1$, то число λ называется отношением, в котором точка C делит направленный отрезок AB. Координаты точек A, B, C связаны формулами:

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

Декартова система координат называется *прямоугольной*, если её базис является ортонормированным. Базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости обозначают обычно $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$.

Аналогично можно рассматривать прямоугольную декартову систему координат в пространстве; базисные векторы в таком случае обозначают $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Полярной системой координат на плоскости называется совокупность точки O, называемой *полюсом*, и исходящего из неё луча p, называемого *полярной осью*, а также масштаба для измерения длин. Положение точки M фиксируется двумя числами (*полярными координатами*): *радиусом* $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ и углом φ между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$. Угол φ называется *полярным углом.* Его измеряют в радианах и отсчитывают от полярной оси против часовой стрелки. У полюса $r = 0$, а φ не определено; у остальных точек $r > 0$. Пара чисел (r, φ) и есть полярные координаты точки M.

Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат $\left(0, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\right)$, поместив её начало в полюс O и приняв за векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ векторы длины 1, направленные соответственно вдоль p и под углом $\pi/2$ к p. Если $M\left(x, y\right)$ - точка в прямоугольной системе координат, а $M\left(r, \varphi\right)$- эта же точка в полярной системе координат, то $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Проверить, что векторы $\boldsymbol{a} = \left(3, -1\right)$ и $\boldsymbol{b} = \left(2, 2\right)$) на плоскости не коллинеарны, и разложить вектор $\boldsymbol{c} = \left(-5, 7\right)$ по базису $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

Решение. Так как $\frac{3}{2} \neq \frac{-1}{2}$, то векторы $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны и образуют базис на плоскости. Обозначим через x и y координаты вектора $\boldsymbol{c}$ в этом базисе, тогда $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b},$, т.е. $x\left(3, -1\right) + y\left(2, 2\right) = \left(-5, 7\right)$. Это равенство равносильно системе уравнений

$$3x + 2y = -5$$
$$-x + 2y = 7$$

Решив систему, найдём $x = -3,\ y = 2.$

Ответ: $\boldsymbol{c} = -3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$.

Пример 2. Доказать, что три точки $A\left(x_1, y_1\right),\ B\left(x_2, y_2\right),\ C\left(x_3, y_3\right)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ коллинеарны, что имеет место в том и только в том случае, когда координаты этих векторов пропорциональны, то есть

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}.$$

Для выполнения этого равенства необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Но

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Пример 3. Точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ являются вершинами треугольника ABC. Найти координаты точки пересечения медиан этого треугольника.

Решение. Если $D(x_4, y_4)$ - середина отрезка BC, то

$$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2}, \; y_4 = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Точка $E(x, y)$, в которой пересекаются медианы треугольника, делит отрезок AD в отношении 2:1, таким образом,

$$x = \frac{x_1 + 2x_4}{1 + 2}, \; y = \frac{y_1 + 2y_4}{1 + 2},$$

поэтому $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \; y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{1 + 2}.$

Пример 4. При каких значениях λ векторы $\boldsymbol{a} = (-2, \lambda, 3)$ и $\boldsymbol{b} = (2, \lambda, \lambda)$ ортогональны?

Решение. Векторы ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -4 + \lambda^2 + 3\lambda = 0.$ (Находим корни полученного уравнения $\lambda_1 = -4, \; \lambda_2 = 1.$

Пример 5. При каких значениях α *и* β векторы $\boldsymbol{a} = (-2, 3, \alpha)$ и $b = (\beta, -6, 2)$ коллинеарны?

Решение. Если векторы $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны (верно и обратное утверждение). Находим: $\frac{-2}{\beta}=\frac{3}{-6}=\frac{\alpha}{2}$, следовательно, $\alpha=-1,\beta=4$.

Пример 6. Точки $A\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(1,\frac{2\pi}{3}\right)$ заданы своими координатами в полярной системе координат. Найти координаты этих точек в прямоугольной декартовой системе координат.

Решение. Полярные координаты (r,φ) и декартовы координаты (x,y) одной и той же точки связаны равенствами $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$.. Ясно, что $x_A=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3};\ y_A=2\sin\frac{\pi}{6}=1;$

$$x_B=2\sqrt{2},\ y_B=2\sqrt{2},\ x_C=-\frac{1}{2},\ y_C=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задания для самостоятельной работы

2.1. Дан четырёхугольник *ABCD*. Точки *P* и *Q* – середины сторон *AB* и *CD*. Выразить вектор $\overrightarrow{PQ}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$.

2.2. Доказать, что определитель второго порядка $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}=(\alpha;\beta)$ и $\boldsymbol{b}=(\gamma;\delta)$ коллинеарны.

2.3. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}=(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$, $\boldsymbol{b}=(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$, $\boldsymbol{c}=(\gamma_1;\gamma_2;\gamma_3)$ компланарны тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=0$

2.4. Являются ли компланарными векторы $\boldsymbol{a}=(-1;4;2)$, $\boldsymbol{b}=(3;1;-5)$, $\boldsymbol{c}=(1;9;-1)$?

2.5. При каких значениях λ векторы компланарны?

а) $\boldsymbol{a}=(1;2;3)$, $\boldsymbol{b}=(2;4;5)$, $\boldsymbol{c}=(2;\lambda;6)$;

б) $\boldsymbol{a}=(3;4;2)$, $\boldsymbol{b}=(6;8;7)$, $\boldsymbol{c}=(9;12;\lambda)$.

2.6. При каких значениях α и β векторы $\boldsymbol{a}=(\alpha;3;2)$ и $\boldsymbol{b}=(2;-6;\beta)$ коллинеарны?

2.7. Доказать, что для всех векторов ***a,b,c*** и любых чисел α и β скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

а) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$; б) $\alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$; в) $(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+\beta(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

2.8. Дано: $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=6$. Найти $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2.9. Найти условия, которым должны удовлетворять векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, чтобы выполнялись равенства:

а) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; б) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$; в) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

2.10.Разложить вектор $\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

а) $\boldsymbol{a}=(3,4)$, $\boldsymbol{b}=(7,9)$, $\boldsymbol{c}=(3,-2)$;

б) $\boldsymbol{a}=(2,3)$, $\boldsymbol{b}=(5,7)$, $\boldsymbol{c}=(1,2)$;

в) $\boldsymbol{a}=(2,4)$, $\boldsymbol{b}=(-3,-5)$, $\boldsymbol{c}=(4,10)$;

г) $\boldsymbol{a}=(4,5)$, $\boldsymbol{b}=(7,8)$, $\boldsymbol{c}=(-13,-14)$.

2.11. Доказать, что точки $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(1,7)$ не лежат на одной прямой, а треугольник ABC – прямоугольный.

2.12. Проверить, что четырёхугольник с вершинами $A(5,2,6)$, $B(6,4,4)$, $C(4,2,3)$, $D(3,1,4)$ – квадрат.

2.13. Точки $A(5,-1,3)$, $B(-5,2,4)$, $C(3,0,-4)$ являются вершинами треугольника. Найти длину его медианы, проведённой из вершины A.

2.14. Найти координаты вершин треугольника, если известны координаты середин его сторон $M_1(3,-1)$, $M_2(0,-2)$, $M_3(2,1)$.

2.15. Найти полярные координаты точек, заданных прямоугольными координатами:

а) $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $B\left(\sqrt{3},-1\right)$; в) $C(0,-2)$.

2.16. Точка $A\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$ задана полярными координатами. Найти её прямоугольные координаты.

Ответы

2.1. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. **2.4.** Нет. **2.5.** а) λ=4; б) При любых значениях λ. **2.6.** $\alpha=-1,\beta=4$. **2.8** $\sqrt{14}$. **2.9.** а) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$; б) $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$; в) $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$. **2.10**.а) $\boldsymbol{c}=-41\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b}$; б) $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; в) $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$; г) $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$. **2.13.** 7. **2.14.** $(5,2)$, $(-1,0)$, (1, 4). **2.15.** а) $\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\left(2,\frac{7\pi}{4}\right)$; в) $\left(2,\frac{3\pi}{2}\right)$. **2.16.** $A\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$.

2.2. Прямые линии и плоскости

Краткие теоретические сведения

Прямая линии на плоскости. Запишем основные виды уравнений прямой на плоскости.

1. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку* $M(x_0, y_0)$ *перпендикулярно данному ненулевому вектору* $\boldsymbol{n}(a,b)$: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Вектор $\boldsymbol{n}(a,b)$ называется *вектором нормали* (нормальным вектором) этой прямой.

2. *Общее уравнение прямой:* $ax+by+c=0$, где $\boldsymbol{n}(a,b)$ – нормальный вектор прямой.

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ параллельно данному вектору $\boldsymbol{s}=(m,n)$: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$, где вектор $\boldsymbol{s}=(m,n)$ – направляющий вектор, уравнение называют *каноническим.*

4. Параметрические уравнения прямой: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$ где $t \in \mathbb{R}$, а $M_0(x_0, y_0)$ – точка, принадлежащая прямой.

Параметрическое уравнение прямой в векторной форме: $r = r_0 + st$, где r_0 – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, а $\boldsymbol{s}=(m,n)$ – направляющий вектор прямой.

5. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Другая запись этого уравнения: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0$.

6. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом:* $y=kx+b$, k – угловой коэффициент прямой ($k=\operatorname{tg}\varphi$, φ – угол между положительной полуосью Ox и прямой), b – ордината точки пересечения прямой с осью Ox.

7. *Уравнение прямой в отрезках:* $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, где числа a и b равны величинам отрезков, отсекаемых данной прямой на осях Ox и Oy.

Расстояние ρ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$ вычисляется по формуле

$$\rho=\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если φ - угол между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ то $\tan\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$ $(1 + k_2 k_1 \neq 0)$, где стрелка означает, что φ получается поворотом первой прямой ко второй против часовой стрелки.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$.

Тогда:

a) l_1 и l_2 пересекаются, если и только если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$;

b) l_1 и l_2 параллельны, если и только если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;

c) l_1 и l_2 совпадают, если и только если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентами:

$y = k_1 x + b_1$ (l_1)

$y = k_2 x + b_2$ (l_2)

Тогда:

a) l_1 и l_2 перпендикулярны в том и только том случае, когда $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$;

b) l_1 и l_2 параллельны в том и только том случае, когда $k_2 = k_1$ $(b_2 \neq b_1)$.

Прямые и плоскости в пространстве. Основные виды плоскости:

1. $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору нормали $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$.

2. $ax + by + cz + d = 0$ - общее уравнение плоскости.

3. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ - уравнение плоскости в отрезках.

4. $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \end{vmatrix}$ - уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Угол φ между двумя плоскостями, заданными своими общими уравнениями определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ - условие параллельности двух плоскостей;

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ - условие перпендикулярности двух плоскостей.

Расстояние ρ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой $ax + by + cz + d = 0$ находится по формуле:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Основные виды уравнений прямой в пространстве:

1) $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ - уравнение прямой, которое определяется пересечением двух плоскостей;

2) $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ - канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$; вектор $\boldsymbol{n} = (m, n, p)$ **-** направляющий вектор прямой;

3) $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой, где t– параметр ($t \in \mathbb{R}$);

4) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. На плоскости даны три точки $A(-2,4)$, $B(5,3)$, $C(2,-1)$. Убедиться, что фигура ABC - треугольник, и составить уравнение высоты, проведённой из вершины C.

Решение. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 31 \neq 0.$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, точки A, B, C не лежат на одной прямой и ABC треугольник. Для составления уравнения высоты в качестве вектора нормали можно принять вектор $\overrightarrow{AB} = (7,-1)$. Значит, уравнение высоты имеет вид $7(x-2) - (y+1) = 0$, или после упрощений $7x - y - 15 = 0$.

Пример 2. Даны три точки $A(3,1)$, $B(7,-1)$, $C(9,0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной прямой AC.

Решение. Найдём координаты вектора $\overrightarrow{CA} = (9-3, 0-1)$. Запишем уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно вектору $\overrightarrow{CA} = (6, -1)$:

$$\frac{x-7}{6} = \frac{y+1}{-1} \text{ или } x + 6y - 1 = 0.$$

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $A(1,6)$ и $B(6,-4)$.

Решение. Получаем:

$$\frac{x-1}{6-1} = \frac{y+6}{-4-6} \text{ или } 2x + y - 8 = 0.$$

Пример 4. Найти расстояние между двумя прямыми $6x - 8y + 5 = 0$ и $3x - 4y + 5 = 0$.

Решение. Данные прямые параллельны, так как $\frac{6}{3} = \frac{-8}{-4} \neq \frac{5}{5}$. Для нахождения расстояния между этими прямыми на одной из них возьмём произвольную точку и найдём расстояние он неё до другой прямой. Полагая, например, во втором уравнении $x = -3$, получаем $y = -1$. Теперь, используя формулу для нахождения расстояния A от точки $A(-3,-1)$ до прямой $6x - 8y + 5 = 0$, получаем

$$\rho = \frac{|6(-3) - 8(-1) + 5|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Пример 5. Найти угол между двумя прямыми $2x + y - 1 = 0$ и $3x - 6y - 2 = 0$.

Решение. Решим эту задачу двумя способами: 1. Нормальные векторы этих прямых имеют координаты $(2,1)$ и $(3,-6)$. Легко проверит, что их скалярное произведение равно нулю, следовательно, данные прямые перпендикулярны. 2. Запишем уравнения прямых с угловыми коэффициентами: $y = -2x + 1$ и $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$. Угловой коэффициент k_1 первой прямой равен -2, а второй $k_1 = \frac{1}{2}$, таким образом, $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ и прямые перпендикулярны.

Пример 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,2,-3)$ параллельно плоскости $4x - 5y + 2z - 1 = 0$.

Решение. Так как данная и искомая плоскости параллельны, то они имеют общий нормальный вектор $\boldsymbol{n}(4,-5,2)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$: $4(x-1) - 5(y-2) + 2(z+3) = 0$ или $4x - 5y + 2z + 12 = 0$.

Пример 7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{3}$ и плоскости $2x-y+3z-4=0.$

Решение. Решим задачу двумя способами.

1. Запишем уравнение прямой в параметрической форме: $x=t,\ \ y=2t-1,\ \ z=3t-2.$ Используя уравнение плоскости, получаем $2t-(2t-1)+3(3t-2)-4=0$ или $t=1.$ Таким образом, координаты точки пересечения прямой и плоскости $x=1,\ y=1,\ z=1.$

2. Данные канонические уравнения прямой запишем в виде общих уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2},\\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{z+2}{3};\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}2x-y=1,\\ 3x-z=2.\end{cases}$$

Теперь задача сведена к нахождению решения системы трёх линейных уравнений:

$$\begin{cases}2x-y+3z=4,\\ 2x-y\ \ \ \ \ \ =1,\\ 3x\ \ \ \ \ -z=2.\end{cases}$$

Для решения этой системы используем, например, метод Гаусса и получаем $x=1,\ y=1,\ z=1.$

Задания для самостоятельной работы

2.17. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,-3)$ и перпендикулярной прямой:

а) $\frac{x-4}{-7}=\frac{y-3}{1};$ б) $y=2x-5;$ в) $2x-3y-7=0;$

г) $x=1+2t,\ y=2-3t.$

2.18. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,-3)$ и параллельной прямой:

а) $\frac{x+4}{-7}=\frac{y-2}{2};$ б) $y=3x+1;$ в) $6x-2y-5=0;$

г) $x=1+3t,\ y=2-2t.$

2.19. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

а) $A(2,1)$ и $B(1,-3)$; б) $A(0,1)$ и $B(2,0)$; в) $A(6,-4)$ и $B(1,6)$;

г) $A(3,2)$ и $B(3,-1)$; д) $A(-1,-2)$ и $B(1,-2)$.

2.20. Установить, пересекаются, параллельны или совпадают прямые данной пары; в случае пересечения найти координаты их общей точки:

а) $3x-9y-6=0$ и $2x-6y-4=0$;

б) $6x-2y+4=0$ и $9x-3y+5=0$;

в) $2x-7y+5=0$ и $3x+2y-5=0$;

г) $x=1-t,\ y=1+2t$ и $x=2+t,\ y=2-t$.

2.21. Найти расстояние ρ от точки A до прямой, заданной своим уравнением:

а) $A(2,1),\ 3x+4y+13=0$; б) $A(-2,2),\ 4x+3y+7=0$;

в) $A(3,-1),\ 9x+12y+15=0$; г) $A(1,-3),\ 12x+5y-10=0$;

д) $A(5,2),\ 5x-12y-14=0$.

2.22. Одна из сторон квадрата имеет уравнение $x-y-1=0$, а одна из вершин находится в точке $A(0,3)$. Найти уравнения остальных сторон этого квадрата.

2.23. Точка $A(-2,3)$ является вершиной квадрата, а точка $E(1,1)$ - его центр. Составить уравнения сторон квадрата.

2.24. Найти координаты точки, симметричной точке $A(-3,2)$ относительно прямой $4x-3y-2=0$.

2.25. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$:

а) $A\left(2,1,-3\right),\ \boldsymbol{n}=\left(7,4,9\right)$; б) $A\left(0,1,2\right),\ \boldsymbol{n}=\left(2,0,-1\right)$.

2.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A и параллельной векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

а) $A\left(2,1,2\right),\ \boldsymbol{a}=\left(2,5,3\right),\ \boldsymbol{b}\left(-1,0,1\right)$;

б) $A\left(1,-1,-4\right),\ \boldsymbol{a}=\left(3,-2,3\right),\ \boldsymbol{b}\left(-5,4,-1\right)$.

2.27. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A, B, C:

а) $A(\frac{1}{2},0,0),\ B(0,-1,0),\ C(0,0,2)$; б) $A(-1,1,3),\ B(3,2,4),\ C(0,0,2)$.

2.28. Найти расстояние ρ от точки A до плоскости:

а) $A(1,2,3),\ 2x-2y+z+2=0$;

б) $A(1,-1,-1),\ x+2y-2z-7=0$.

2.29. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,-1,2)$, и параллельной прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-4}{4}$.

2.30. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,8,-3)$ и перпендикулярной плоскости $x-8y-2z-5=0$.

2.31. Задачи о тарифах. Городская телефонная станция предлагает своим абонентам выбрать для использования один из следующих тарифных планов:

1. Повременный план: абонент вносит A рублей и ещё стоимость количества минут, затраченных на телефонные разговоры в течение месяца, (стоимость минуты – a_1 руб.).

2. Комбинированный план: абонент вносит B рублей и ещё стоимость количества минут, затраченных на телефонные разговоры сверх лимита (лимит – b минут, стоимость сверхлимитной минуты – a_2 руб.).

3. Безлимитный план: абонент платит C рублей за месяц.

Разработать рекомендации для абонентов по выбору оптимального тарифного плана (в зависимости от суммарной длительности телефонных разговоров в течение месяца). Решение также изобразить графически.

1. $A=115,\ B=119,\ C=295;\ a_1=0{,}17;\ a_2=14;\ b=375.$

2. $A=139,\ B=229,\ C=359;\ a_1=0{,}32;\ a_2=0{,}26;\ b=340.$

Ответы

2.17. а) $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{7}$; б) $y=-\frac{1}{2}x-1$; в) $3x+2y-6=0$; г) $x=4+3t,\ \ y=-3+t.$

2.18. а) $\frac{x-4}{-7}=\frac{y+3}{1}$. б) $y=2x+10;$ в) $2x-3y-17;$ г) $x=4+2t,\ \ y=-3-3t.$

2.19. а) $4x-y-7=0;$ б) $x-2y-2=0;$ в) $2x+y-8=0;$ г) $x=3;$ д) $y=-2$. **2.20.** а) совпадают; б) параллельны; в) пересекаются в точке (1, 1); г) пересекаются, (–1, 5). **2.21**. а) 3; б) 1; в) 2; г) 1; д) 1. **2.22.** $3x-y+3=0$ и либо $x+3y-5=0,$ либо $y-13=0.$

2.23. $x-5y+17=0,\quad x-5y-9=0,\quad 5x+y-19=0,\quad 5x+y+7=0.$ **2.24.** $\left(\frac{17}{5},-\frac{14}{5}\right).$

2.25. а) $7x+4y+9z+9=0;$ б) $2x-z-2=0.$ **2.26**. а) $x-y+z-3=0,$ б) $5x+6y-z-3=0.$

2.27. а) $4x-2y+z-2=0;$ б) $x+6y-10z+25=0.$ **2.28.** а) **ρ**=1; б) **ρ**=2.

2.29. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$ **2.30.** $\frac{x-4}{1}=\frac{y-8}{-8}=\frac{z-2}{4}.$

2.3. Системы линейных неравенств и задачи линейного программирования

Краткие теоретические сведения

Всякое уравнение

$$ax+by+c=0. \qquad (1)$$

на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат определяет прямую линию; если $c=0$, то прямая проходит через начало координат.

По отношению к прямой вся плоскость распадается на *две полуплоскости*, для которых эта прямая является граничной линией.

Одна из полуплоскостей, определяемых прямой (1) состоит из точек (x, y), для которых $ax + by + c \le 0$, а другая – из точек, для которых $ax + by + c \ge 0$.

Направляющий вектор $\boldsymbol{n}(a, b)$ *перпендикулярен прямой (1),он является градиентом линейной функции* $f = ax + by$ *и показывает направление возрастания её значений.*

Прямые линии на плоскости $x0y$, параллельные прямой, определяемой уравнением $ax + by + 0$, называют *линиями уровня линейной функции* $f = ax + by$. Пользуясь понятием направляющего вектора, можно определить расположение полуплоскостей $ax + by + c \ge 0$ и $ax + by + c \le 0$ на координатной плоскости $x0y$. *Полуплоскость* $ax + by + c \ge 0$ *расположена по ту сторону прямой* $ax + by + c = 0$, *куда показывает направляющий вектор* $n(a, b)$. *Аналогично вектор* $-n(-a, -b)$ *показывает, где расположена полуплоскость* $ax + by + c \le 0$ *относительно прямой* $ax + by + c = 0$.

Определение множества решений неравенства $ax + by + c \ge 0$ $ax + by + c \le 0$ можно производить и другим способом. Опишем его. Возьмём произвольную точку $M(x_0, y_0)$, на плоскости $x0y$ и подставим её координаты в решаемое неравенство $ax + by + c \ge 0$. Если координаты взятой точки удовлетворяют этому неравенству, то и все точки плоскости, лежащие по ту же сторону от прямой $ax + by + c = 0$, что и точка $M(x_0, y_0)$, являются решением неравенства $ax + by + c \ge 0$. Поскольку для проверки берётся произвольная точка, то её лучше выбирать с «самими простыми координатами». Чаще всего следует брать точку (0, 0). При решении задач, как правило, используется именно этот приём.

Рассмотрим теперь систему m линейных неравенств

$$\begin{aligned} &a_{11}x + b_{12}y + c_1 \le 0, \\ &a_{21}x + b_{22}y + c_2 \le 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x + b_{m2}y + cm \le 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

с двумя неизвестными. Каждое из неравенств системы (2) определяет полуплоскость. Пересечение (общая часть) этих *m* полуплоскостей и составляет множество всех решений системы (2).

Задачи линейного программирования. Как правило, задачи, с которыми приходится встречаться в экономике – это задачи на отыскание наиболее выгодного варианта. Математически это обычно сводится к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции, т.е. к задаче: найти max(min) $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ при условии, что $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ принимает значения из некоторого подмножества X арифметического пространства $\mathbb{R}^n$.

Множество X называется *допустимым множеством* данной задачи, а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - *целевой функцией.*

Будем рассматривать те случаи, когда множество X определено *системой неравенств*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n + b_1 \geq 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n + b_2 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n + b_m \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

а *целевая функция также является линейной*, т.е. имеет вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{4}$$

Систему неравенств (3) называют *ограничениями* задачи (считаем, что условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0$ содержатся в (3)).

При таких условиях говорят о *задаче линейного программирования.*

Сформулируем задачу A линейного программирования в общем виде:

Требуется найти неотрицательное решение системы (3), для которого целевая функция (4) принимает максимальное значение.

Далее сформулируем задачу A', которую называют *двойственной* по отношению к задаче A:

Дана система линейных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots a_{m1}y_m + c_1 \leq 0, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots a_{m2}y_m + c_2 \leq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots a_{mn}y_n + c_n \leq 0 \end{cases} \tag{3'}$$

и линейная функция

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m. \tag{4'}$$

Требуется найти неотрицательное решение системы (3'), для которого целевая функция (4') принимает минимальное значение.

Основная теорема двойственности. *Если разрешима одна из двойственных задач A или A', то разрешима и другая задача, причём*

$\max f = \min \varphi.$

Транспортная задача. Рассматриваются m поставщиков какой-то продукции и n её потребителей. Пусть поставщики имеют запасы продукции $a_1, a_2, \ldots, a_m$, а потребители должны получить соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц этой продукции. Заданы затраты на перевозку единицы продукции от каждого поставщика к любому потребителю $c_{i,j}, i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n.$ Требуется составить план перевозок, т.е. для всех пар ij указать количество продукции x_{ij}, перевозимое от i-го постав-

щика к j-му потребителю, чтобы: 1) от каждого поставщика была вывезена вся продукция, 2) потребности каждого потребителя были бы удовлетворены, 3) суммарная стоимость всех перевозок была бы минимальной.

Предполагается, что общие запасы продукции равны суммарной её потребности, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Если это условие выполнено, то транспортная задача называется *закрытой* или *сбалансированной.* В общем случае задача легко сводится к закрытой введением фиктивного поставщика или фиктивного потребителя.

Существуют общие численные методы решения задач линейного программирования, одним из них является так называемый симплекс-метод.

Для решения транспортной задачи имеются сравнительно простые алгоритмы, обусловленные особенностями её ограничений.

Для простейших случаев применим графический метод решения задач линейного программирования.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Решить графически неравенство $3x - 2y \geq 0.$

Решение. Начнём с построения прямой

$$3x - 2y = 0. \qquad (1)$$

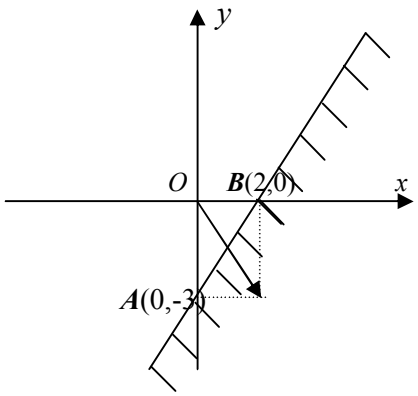
Проще всего прямую, не параллельную осям координат, строить по двум точкам, в которых она пересекает координатные оси.

Если в уравнении (1) положить $x = 0,$ то $-2y - 6 = 0$ или $y = -3,$ следовательно, точка $A(0,-3)$ является точкой пересечения прямой (1) и оси Ox. Аналогично находим координаты точки $B(2,0)$ пересечения этой прямой с осью Oy.

Определим теперь, в какой из полуплоскостей лежат точки, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$3x - 2y \geq 0. \qquad (2)$$

Рассмотрим вектор нормали прямой (1) $\boldsymbol{n} = (3,-2)$. Из рисунка видно, что вектор $\boldsymbol{n} = (3,-2)$ лежит в правой нижней полуплоскости (она заштрихована). Так как неравенство (2) нестрогое, то все точки прямой (1) являются решениями этого неравенства.



Ответ: множество точек прямой(1) и множество точек, лежащих в правой нижней полуплоскости, определяемой этой прямой.

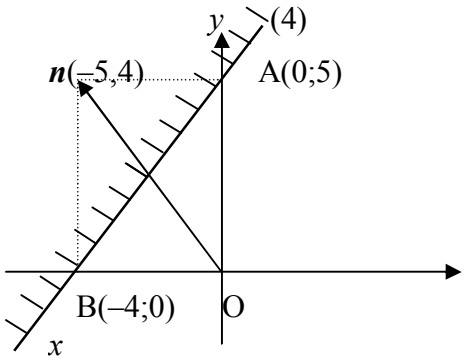
Пример 2. Решить графически неравенство

$$-5x+4y-20<0. \tag{3}$$

Решение. Сначала построим прямую

$$-5x+4y-20=0. \tag{4}$$

Легко видеть, что прямая (4) проходит через точки $A(0,5)$ и $B(4,0)$.



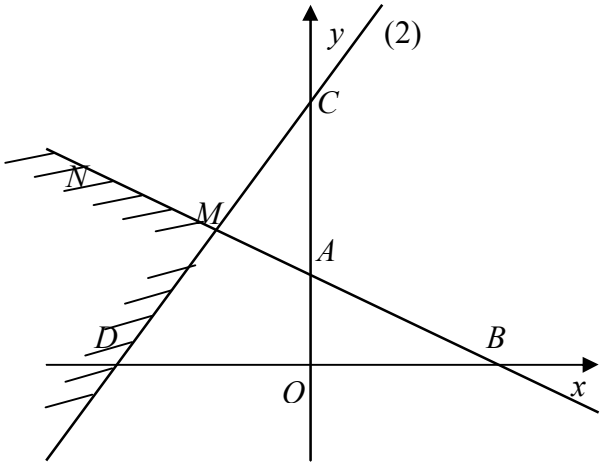
Так как неравенство (3) строгое, то точки прямой (4) ему не удовлетворяют. Возьмём точку $O(0,0)$, её координаты удовлетворяют неравенству (3), что проверяется непосредственно. Действительно, неравенство $-5\cdot 0+4\cdot 0-20<0$ верно, следовательно, решением неравенства (3) является множество всех точек координатной плоскости, лежащих в той полуплоскости, где расположена точка $O(0,0)$. На рисунке это множество заштриховано.

Замечание. При решении неравенства (3), конечно, можно применить способ, использованный для примера 1: вектор нормали прямой (4) имеет координаты $(-5,4)$ и расположен в левой верхней полуплоскости, определяемой прямой (4), таким образом, точки, удовлетворяющие неравенству (3), составляют правую нижнюю полуплоскость,

Пример 3. Решить графически систему линейных неравенств

$$\begin{cases} x+2y-4\le 0, \\ 3x-2y+12\le 0. \end{cases}$$

Решение. По двум точкам $A(0,2)$ и $B(4,0)$ строим прямую $x+2y-4=0$ (1); по точкам $C(0,6)$ и $D(-4,0)$ строим прямую $x-2y+12=0\,(2)$



Так как координаты точки $O(0,0)$ удовлетворяют неравенству $x+2y-4\le 0$, то левая нижняя полуплоскость, определяемая прямой (1), составляет множество решений этого неравенства. Точно так же устанавливаем, что координаты точки O не удовлетворяют неравенству $3x-2y+12\le 0,$ поэтому множество решений этого неравенства составляют все точки, лежащие в левой верхней полуплоскости, определяемой прямой (2).

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y-4=0, \\ 3x-2y+12=0. \end{cases}$$

найдём координаты точки M - точки пересечения прямых (1) и (2): $M(-2,3).$ Множество точек, лежащих внутри угла NMD и на его сторонах и составляют множество решений заданной системы неравенств.

Пример 4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x+2y-4=0, \\ 3x-2y+12=0, \\ x\ge 0, \quad y\ge 0. \end{cases}$$

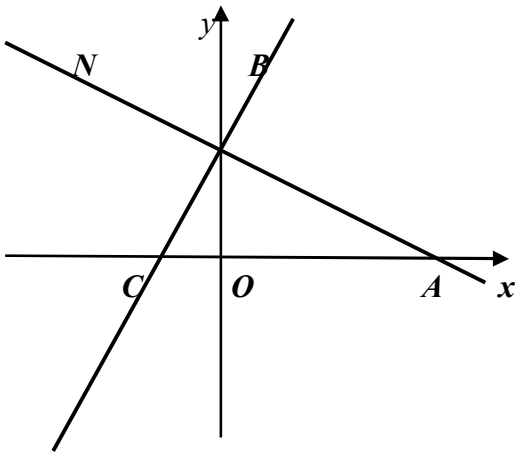
Решение. Система неравенств этого примера получена присоединением неравенств $x\ge 0,\ y\ge 0$ к неравенствам, составляющих систему примера 3. Эти два неравенства геометрически определяют множество точек первой четверти координатной плоскости xOy. Ясно, что это множество и

множество точек угла NMD (рисунок примера 3) не имеют общих точек, поэтому данная система неравенств не имеет решений.

Пример 5. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} x+2y-4=0, \\ 2x-y+2=0, \\ x\ge 0, \quad y\ge 0. \end{cases}$$

Решение. Построим прямые $x+2y-4=0$ и $2x-y+2=0$. Первая из них проходит через точки $A(4,0)$ и $B(0,2)$, а вторая – через точки B и $C(-1,0)$.



Так как координаты точки $O(0,0)$ удовлетворяют неравенству $x+2y-4\le 0$ и не удовлетворяют неравенству $2x-y+2\le 0$, то, применив рассуждения, проведённые при решении примера 3, получим, что множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+2y-4\le 0, \\ 2x-y+2\le 0 \end{cases}$$

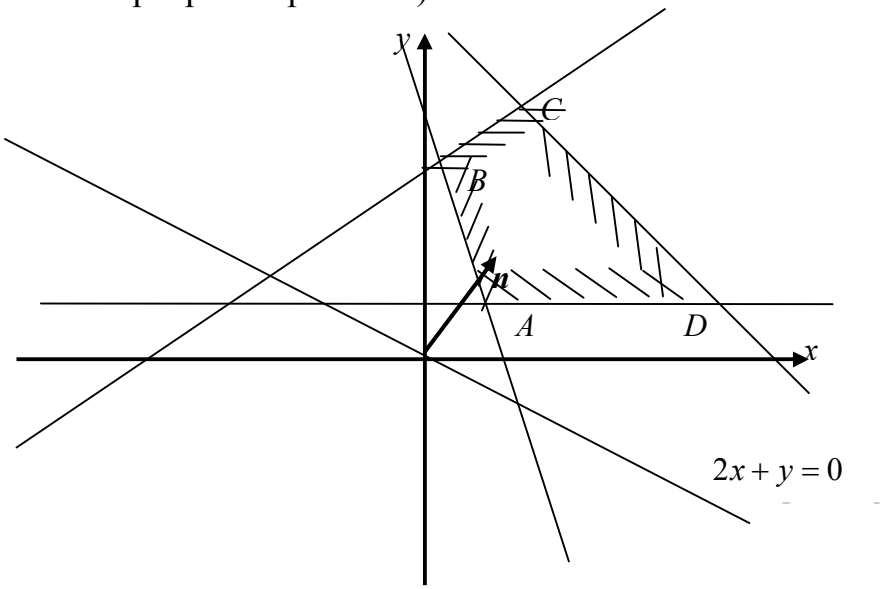
составляют точки, лежащие внутри и на сторонах угла NBC. Неравенства $x\ge 0$, $y\ge 0$ определяют множество точек, лежащих на координатных осях Ox, Oy, а также внутри первого координатного угла. Следовательно, данной системе неравенств удовлетворяют координаты единственной точки $B(0,2)$.

Пример 6. Найти неотрицательное решение системы линейных неравенств

$$\begin{cases} 8x+3y-12\ge 0, \\ -x+y-3\le 0, \\ y-1\ge 1, \\ x+y-7\le 0, \end{cases}$$

при которых линейная функция $f(x,y)=x+2y$ достигает максимального значения; вычислить значение.

Решение. Строим геометрически множество неотрицательных решений данной системы линейных неравенств (допустимое множество задачи линейного программирования).



На рисунке изображена область решений данной системы линейных неравенств – многоугольник $ABCD$, где $A\left(\frac{9}{8},1\right)$, $B\left(\frac{3}{11},\frac{36}{11}\right)$, $C(2,5)$, $D(6,1)$. (Решение системы неравенств и нахождение координат вершин A, B, C, D предлагаем выполнить самостоятельно).

Построим прямую $x+2y=0$ (линию уровня), проходящую через начало координат, и вектор нормали для неё $\boldsymbol{n}(1,2)$, который показывает направление возрастания функции $f(x,y)=x+2y$.

Конкретное значение a целевой функции $f(x,y)$ показывает определённое положение соответствующей линии $x+2y=a$ (параллельной прямой $x+2y=0$). Будем перемещать прямую $x+2y=0$ параллельно самой себе в направлении, показывающем вектором $\boldsymbol{n}(1,2)$**.** Если прямая проходит в области допустимых значений данной задачи, то величина параметра a будет значением целевой функции при определённых допустимых значениях x и y.

Очевидно, что наибольшего значения целевая функция достигает в угловой точке C.

Следовательно, максимальное значение $f(x,y)=x+2y$ достигается в точке $C(2,5)$ и $\max f(x,y)=1\cdot 2+2\cdot 5=12$.

Пример 7. Предприятие специализируется по выпуску изделий двух видов P_1 и P_2, при этом расходуются три типа ресурсов: S_1 - оборудование, S_2 - сырьё, S_3 - энергия. Нормы расхода каждого из них на одно изделие P_1 и изделие P_2, а также объём ресурсов заданы таблицей:

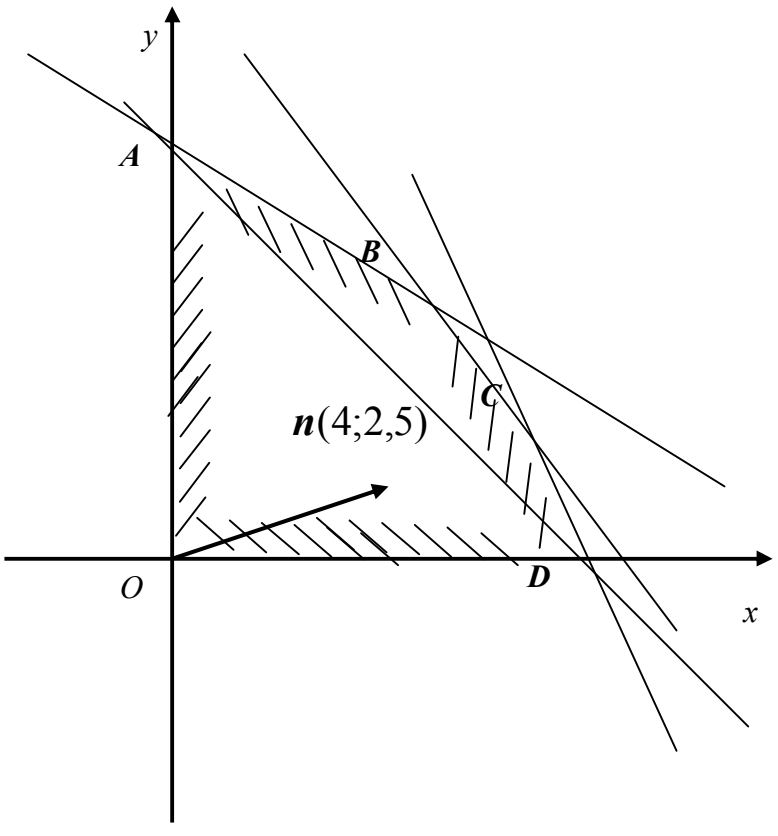
Вид ресурса	Нормы расхода ресурса на одно изделие		Объём ресурсов
	P_1	P_2	
S_1	2	3	31
S_2	1	1	12
S_3	2	1	20

Прибыль, получаемая предприятием при реализации плана производства (x, y) определяется функцией $f(x, y) = 4x + 2{,}5y$. (Компоненты плана производства указывают: x - количество изделий вида P_1, y - количество изделий вида P_2). Составить план производства так, чтобы прибыль была наибольшей.

Решение. Математической моделью этой задачи является задача линейного программирования с ограничениями

$$\begin{cases} 2x + 3y \le 31, \\ x + y \le 12, \\ 2x + y \le 20 \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

и целевой функцией $f(x, y) = 4x + 2{,}5y,$ для которой нужно найти максимальное значение.



Система линейных неравенств определяет множество точек, лежащих внутри многоугольника $OABCD$ и на его сторонах; координаты вершин A, B, C, D находятся из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3y-31=0, \\ x=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y-31=0, \\ x+y-12=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-12=0, \\ 2x+y-20=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y-20=0, \\ y=0. \end{cases}$$

Решив эти системы уравнений, получим $A\left(0,\frac{31}{3}\right)$, $B(5,7)$, $C(8,4)$, $D(10,0)$.

Линия уровня, проходящая через начало координат, имеет уравнение $4x+2,5y=0,$ её направляющий вектор $\boldsymbol{n}=\left(4;2,5\right)$.

Из рисунка видно, что наибольшего значения целевая функция достигает в точке $C(8,4)$, таким образом,

$$\max f(x,y)=f(8,4)=4\cdot 8+2,5\cdot 4=42.$$

Пример 8. Найти минимальное значение функции $f=-8x_1-2x_2+4x_3+8x_4+88x_5,$ если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x_1+x_3-x_4-5x_5+4\le 0, \\ x_1+x_2-x_3+x_4-7x_5-1\le 0, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0, x_5\ge 0. \end{cases}$$

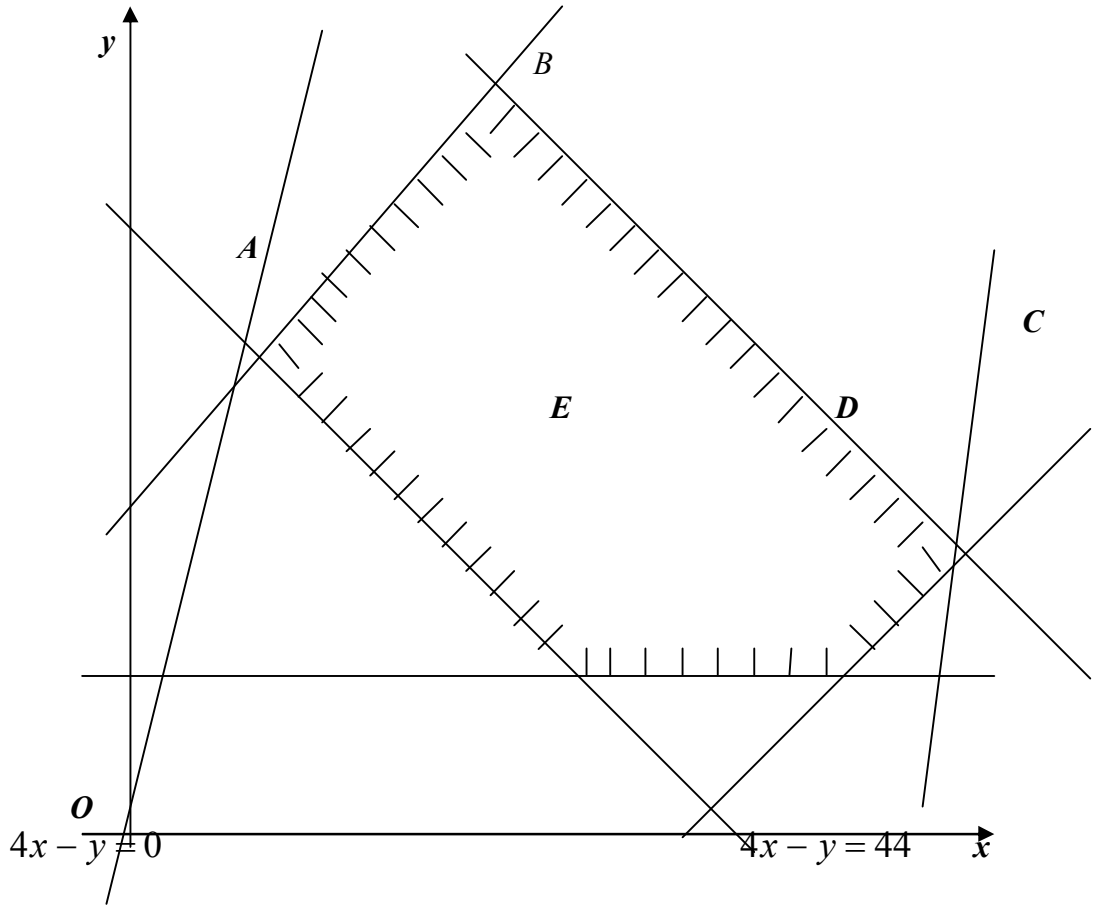
Решение. Сформулируем задачу, двойственную данной задаче:

Найти неотрицательное решение системы линейных неравенств

$$\begin{cases} x+y-8\ge 0, \\ y-2\ge 0, \\ x-y+8\ge 0, \\ -x+y+8\ge 0, \\ -5x-7y+88\ge 0, \end{cases}$$

при котором функция $\varphi\left(x,y\right)=4x-y$ достигает максимума.

Получили задачу линейного программирования с двумя неизвестными, решим её геометрически. Областью решений системы ограничений задачи является множество точек пятиугольника $ABCDE$, где $A(2,6)$, $B(5,9)$, $C(12,4)$, $D(10,2)$, $E\left(6,2\right)$.



Если перемещать линию уровня $4x - y = 0$ в направлении вектора $\boldsymbol{n}(4,-1)$ параллельно самой себе, то максимальное значение $\varphi = 4x - y$ достигается в вершине $C(12,4)$ многоугольника $ABCDE$.

Ответ: $f_{\min} = \varphi_{\max} = 4 \cdot 12 - 1 \cdot 4 = 44.$

Задания для самостоятельной работы

2.32. Решить графически систему линейных неравенств:

а) $\begin{cases} 4x + 5y - 20 \le 0, \\ -7x + 3y - 12 \le 0, \\ -3x + 8y + 15 \ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y - 3 \ge 0, \\ x + y - 6 \le 0, \\ x - 2y \le 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y \ge 0, \\ y - 3 \ge 0, \\ 4x + 4y + 16 \le 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y + 8 \ge 0, \\ 2x - 2y + 16 \ge 0, \\ 4x - 4y - 16 \le 0, \\ 8x + 8y - 64 \le 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y - 8 \le 0, \\ x - y + 8 \ge 0, \\ x + y + 8 \ge 0, \\ x - y - 8 \le 0, \\ y + 4 \ge 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 6x - 15y + 12 \ge 0, \\ 6x + 8y + 54 \le 0, \\ -5x + y - 10 \ge 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x+2y-10\le 0, \\ x+y-5\ge 0, \\ 2x-8y\le 0, \\ 8x-2y\ge 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 6x+9y-18\le 0, \\ 2x+3y+6\ge 0, \\ 6x+9y+54\ge 0; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x+y-2\le 0, \\ x-y\le 0, \\ x-1\ge 0; \end{cases}$

к) $\begin{cases} -x-y+2\ge 0, \\ -x+3y+2\ge 0, \\ x-y-2\ge 0. \end{cases}$

2.33. При выполнении условий $x\ge 0,\ y\ge 0$ решить графически следующие задачи линейного программирования:

а) $\max f(x,y)=5x+3y;\ \begin{cases} 3x+5y-15\le 0, \\ 5x+2y-10\le 0; \end{cases}$

б) $\max f(x,y)=x+y;\ \begin{cases} x+2y-10\le 0, \\ x+2y-2\ge 0, \\ 2x+y-10\le 0; \end{cases}$

в) $\max f(x,y)=x+3y;\ \begin{cases} x+y\le 3, \\ 6x+y\le 42, \\ 2x-3y\le 6; \\ x+y=4; \end{cases}$

г) $\min f(x,y)=2x+3y;\ \begin{cases} 2x+2y\le 8, \\ 3x+y\le 4, \\ x+5y\ge 4; \end{cases}$

д) $\max f(x,y)=2x+4y;\ \begin{cases} 2x-y\ge -2, \\ 3x+2y\le 11, \\ x-y\le 0; \end{cases}$

е) $\min f(x,y)=x-y;\ \begin{cases} x+y\le 1, \\ x-2y\le 1, \\ 2x+3y\le 2, \\ 3x+2y\le 3, \\ 2x+2y\ge 1. \end{cases}$

2.34. С помощью принципа двойственности решить следующую задачу линейного программирования:

Найти максимальное значение функции $f(x,y,z)=2y+3z,$ если $x,\ y,\ z$ неотрицательны и удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} x-y-z+2\ge 0, \\ -x-y-4z+1\ge 0. \end{cases}$$

2.35. Составить математическую модель следующей транспортной задачи. Пусть в трёх месторождениях M_1, M_2, M_3 ежемесячно добывают соответственно a_1, a_2, a_3 тонн угля. Весь этот уголь вывозится в пункты потребления P_1, P_2, P_3, причём в каждый из этих пунктов ежемесячно должно вывозиться соответственно b_1, b_2, b_3 тонн. Наконец, пусть γ_{ij} - цена перевозки одной тонны угля от месторождения M_i в пункт $P_j (i, j = 1,2,3)$. Составить план перевозок, при котором была бы минимальной полная цена перевозок.

2.36. Предприятие выпускает два вида изделий M_1 и M_2, для чего используется сырьё двух типов S_1 и S_2. Ресурсы, их потребность для выпуска каждого изделия и прибыль предприятия указаны в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие		Ресурсы
	M_1	M_2	
S_1	2	3	48
S_2	6	5	120
Прибыль p	10	11	

Ответы

2.32. а) треугольник ABC, $A(-3,3)$, $B(0,4)$, $C(5,0)$; б) треугольник ABC, $A(2,1)$, $B(3,3)$, $C(4,2)$; в) пустое множество; г) четырёхугольник $ABCD$, $A(-6,-2)$, $B(2,6)$, $C(6,2)$, $D(-2,-6)$; д) пятиугольник $ABCDE$, $A(-4,4)$, $B(-8,0)$, $C(0,8)$, $D(8,0)$, $E(4,-4)$; е) неограниченная область; ж) отрезок AB, $A(1,4)$, $B(4,1)$; з) полоса между двумя параллельными прямыми $2x+3y-6=0, -2x-3y-6=0$; и) точка $A(1,1)$; к) точка $A(2,0)$. **2.33**. а) $f\left(\frac{20}{19},\frac{45}{19}\right)=\frac{235}{19}$; б) $f\left(\frac{10}{3},\frac{10}{3}\right)=\frac{20}{3}$; в) не существует; г) $f\left(\frac{8}{7},\frac{4}{7}\right)=4$; д) не существует; е) $f(0,\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}$; **2.34.** $\max f=-3$. **2.36.** $\max p = 10\cdot 15+11\cdot 6=216$.

2.4. Кривые второго порядка

Краткие теоретические сведения

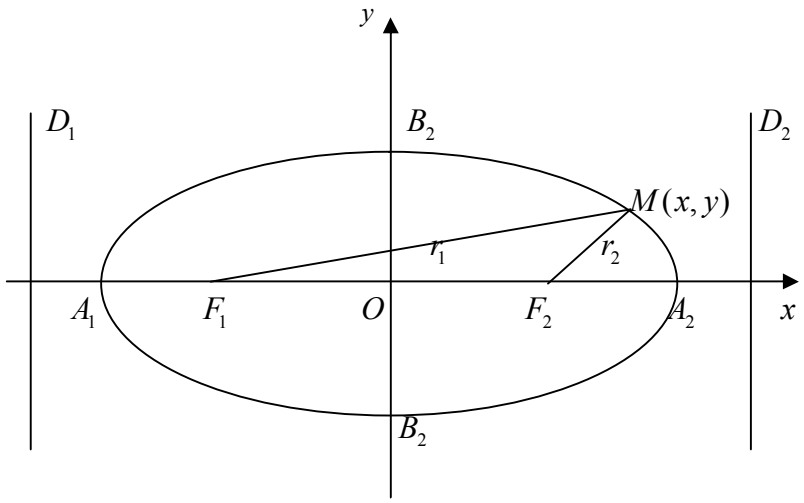
Общее *уравнение кривой второго* порядка: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, где хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

Эллипс. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости,

называемых *фокусами эллипса,* есть величина постоянная (большая, чем расстояние между фокусами).

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ 0<b\le a.$$



Числа a и b называются соответственно *большой* и *малой полуосями эллипса*; точки $A_1(-a,0),\ A_2(a,0),\ B_1(0,-b),\ B_2(0,b)$ – его вершины; оси Ox, Oy – главные *оси эллипса*, Ox – фокальная ось; O – центр эллипса. Точки $F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$ – *фокусы* эллипса; $2c$ – расстояние между фокусами; $c=\sqrt{a^2+b^2}$; r_1, r_2 – *фокальные радиусы* точки $M(x,y)$, принадлежащей эллипсу $r_1+r_2=2a$. Число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом.* Две прямые $D_1\colon\ x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$ и $D_2\colon\ x=\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса. Имеют место соотношения $r_1=d_1\varepsilon$ и $r_2=d_2\varepsilon$ где d_1 и d_2 –- расстояния от точки M до директрис D_1 и D_2 соответственно.

Касательная к эллипсу в произвольной точке $M_0(x_0,y_0)$ этого эллипса определяется уравнением

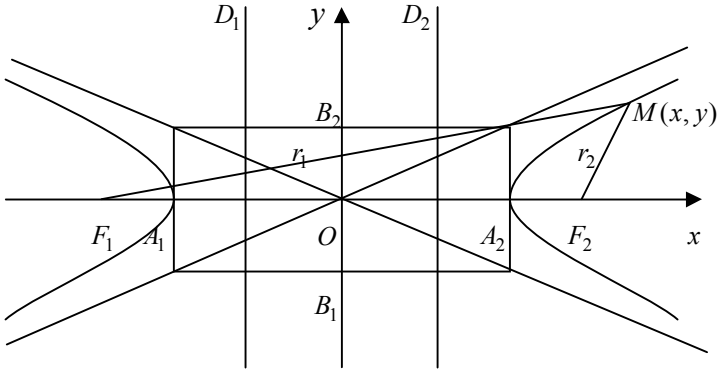
$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Гипербола. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, модуль разности от которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная (не равная нулю и меньшая, чем расстояние между фокусами).

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0$$

Гипербола изображена на рисунке



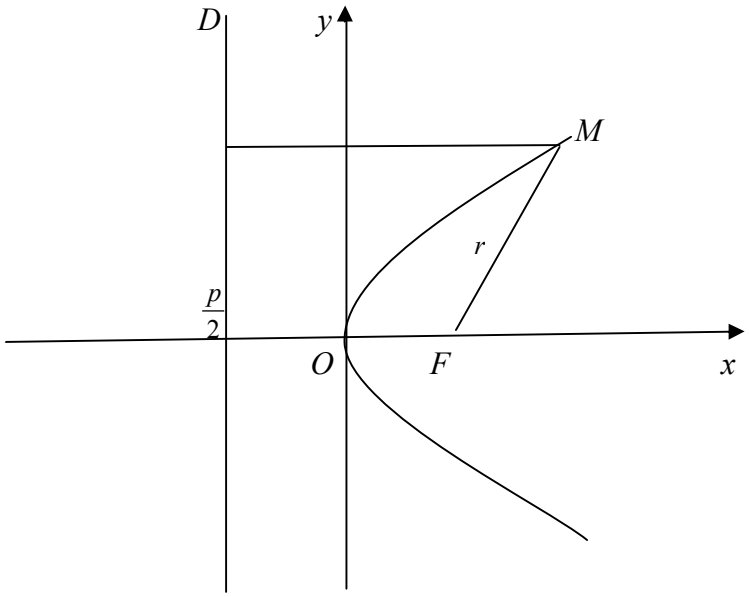
Числа a и b называются *полуосями* гиперболы. Если $a=b$, то гипербола называется *равносторонней.* Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ – вершины гиперболы; оси симметрии Ox и Oy *– действительная и мнимая оси*; точка O - центр гиперболы; прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоты. Точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $(c=\sqrt{a^2+b^2}>0)$ *– фокусы* гиперболы; r_1, r_2 *– фокальные радиусы* точки $M(x,y)$, принадлежащей гиперболе, $\left(\left|r_1-r_2\right|=2a\right)$. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $\left(1<\varepsilon<\infty\right)$ *– эксцентриситет* гиперболы. Две прямые D_1: $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ и D_2: $x=\frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные действительной оси, называются *директрисами* гиперболы.

Касательная к гиперболе в произвольной её точке $M_0(x_0,y_0)$ определяется уравнением

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Парабола. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, удалённых на одинаковое расстояние от данной точки F, называемой *фокусом*, и данной прямой D, называемой *директрисой.*

Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2=2px, p>0$. Изображение параболы дано на рисунке.



Число p называется *фокальным радиусом* параболы; O –- её вершина, Ox – ось симметрии параболы; точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – фокус; r – фокальный радиус точки $M(x,y)$, принадлежащей параболе. Прямая $D:\ x=-\frac{p}{2}$, перпендикулярная оси симметрии, – директриса параболы; $\rho=\rho(M,D)$ расстояние от точки M параболы до её директрисы; $\varepsilon=\frac{r}{\rho}=1$ – эксцентриситет параболы.

Касательная к параболе в её точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет уравнение $y_0y=p(x+x_0)$.

Поверхности второго порядка. Общее уравнение поверхности второго порядка: $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0$, где хотя бы один из коэффициентов A, B, C, D, E, F отличен от нуля.

Укажем канонические уравнения для основных поверхностей второго порядка.

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – эллипсоид.
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – однополостный гиперболоид.
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ – двуполостный гиперболоид.
4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ – эллиптический параболоид.

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ – гиперболический параболоид.

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ – конус.

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллиптический цилиндр.

8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гиперболический цилиндр.

9. $y^2=2px\ (p>0)$ – параболический цилиндр.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Написать каноническое уравнение эллипса, если его большая ось равна 20, а расстояние между фокусами равно 16.

Решение. По условию задачи $2a=20$ и $2c=16$, следовательно, $a=10$ и $c=8$. Так как a, b и c связаны соотношением $c=\sqrt{a^2-b^2}$, то $b^2=a^2-c^2=36$. Теперь можно записать уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$$

Пример 2. Показать, что линия, заданная уравнением $9x^2+25y^2=225$ является эллипсом; найти координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

Решение. Поделив обе части данного уравнения на 225, приводим уравнение к виду

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

Следовательно, данная линия есть эллипс, большая полуось, которого равна 5, а малая – 3. Теперь можно вычислить значение c: $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ и координаты фокусов $F_1(-4,0), F_2(4,0)$. Далее $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$, а уравнение директрис - $x=\pm\frac{c}{a}=\pm\frac{1}{4}$

Пример 3. Составить уравнение гиперболы, если её мнимой осью является ось Oy, а асимптоты имеют уравнения $x-3y=0$ и $x+3y=0$; расстояние между вершинами гиперболы равно 6.

Решение. Так как асимптоты данной гиперболы пересекаются в точке $(0,0)$, то её центр находится в начале координат, а вершины имеют координаты $(-3,0)$ и $(3,0)$, таким образом, $a=3$. Уравнения асимптот запишем в виде $y=\pm\frac{1}{3}x$, следовательно, $\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$, значит, $b=1$.

Ответ: $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{1^2}=1.$

Пример 4. Показать, что кривая линия, заданная уравнением $9x^2-16y^2=144,$ является гиперболой; составить уравнения её асимптот и директрис, найти эксцентриситет и координаты фокусов.

Решение. Данное уравнение приводим к каноническому виду $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1,$ откуда получаем $a=4, b=3, c=\sqrt{a^2+b^2}=5.$ Теперь можно указать координаты фокусов $F_1(-5,0), F_2(5,0)$ и записать уравнения асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x.$ Вычисляем эксцентриситет: $\varepsilon=\frac{5}{4}$ и находим уравнения директрис: $x=\pm\frac{16}{5}.$

Пример 5. Привести уравнение параболы $y=\frac{1}{2}x^2-2x+5$ к каноническому виду; найти фокус и директрису этой параболы.

Решение. Преобразуем правую часть данного уравнения:

$$y=\frac{1}{2}(x^2-4x+10)=\frac{1}{2}(x-2)^2+3.$$

Полученное равенство перепишем так: $y-3=\frac{1}{2}\left(x-2\right)^2.$

Выполним параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку $O_1(2,3).$ Формулы преобразований координат имеют вид: $x_1=x+2, y_1=y-3.$ Получаем уравнение параболы $x_1^2=2py_1,$ где $p=1.$ Директриса этой параболы имеет уравнение $y_1=-\frac{1}{2},$ а координаты фокуса $F_1(0,\frac{1}{2}).$ Переходя к старой системе координат, получаем уравнение директрисы $y=\frac{5}{2},$ а фокус $F\left(2,\frac{7}{2}\right).$

Пример 6. Выяснить, какая поверхность задаётся уравнением $x^2-y^2-4x+8y-4z=0.$

Решение. Выполняя очевидные преобразования, получаем $\left(x^2-4x+4\right)-\left(y^2-8y+16\right)=4z+4-16$ или $\left(x-2\right)^2-\left(y-4\right)^2=4\left(z-3\right).$

Осуществим параллельный перенос координатных осей, приняв за новое начало координат точку $O_1(2,4,3).$ Тогда $x_1=x-2, y_1=y-4, z_1=z-3.$

Получаем уравнение $x_1^2-y_1^2=4z_1$ – каноническое уравнение гиперболического параболоида.

Задания для самостоятельной работы

2.37. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

а) Расстояние между фокусами эллипса равно 6, а большая его полуось равна 5.

б) Большая ось эллипса равна 10 а его эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$.

в) Малая ось эллипса равна 8, а точки $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ - его фокусы.

2.38. Дано каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. Найти:

а) координаты вершин; б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

2.39. Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ в точке, лежащей в первой четверти на биссектрисе координатного угла.

2.40. Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ в точке $(2,1)$.

2.41. Найти длину стороны квадрата, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2.42. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 20, а расстояние меду вершинами равно 16.

2.43. Составить уравнение гиперболы, если известны её фокусы $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$, а точка $M(4\sqrt{2},3)$ лежит на гиперболе.

2.44. Дана гипербола $\frac{x^2}{8^2}-\frac{y^2}{6^2}=1$. Найти координаты её вершин и фокусов; вычислить эксцентриситет; записать уравнения её асимптот и директрис.

2.45. Составить уравнение гиперболы, если известны уравнения её асимптот $3x-2y=0$ и $3x+2y=0$, также точка $M(2\sqrt{3},3)$ на этой гиперболе.

2.46. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{6}=1$ в точке $(-7,6)$.

2.47. Написать каноническое уравнение параболы, если расстояние от её фокуса до вершины равно 3.

2.48. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат и расположенной симметрично относительно оси Ox, если известно, что точка $M(-8,4)$ лежит на этой параболе.

2.49. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если её фокус расположен в точке $F(0,-5)$.

2.50. Через фокус параболы $y^2 = 6x$ проведена хорда, перпендикулярная оси параболы. Найти длину этой хорды

2.51. Доказать, что уравнение $x = 2y^2 - 8x + 6$ определяет параболу, найти координаты её вершины A и величину параметра p.

2.52. Выяснить, какие поверхности заданы уравнениями:

а). $x^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0;$;

б) $x^2 + y^2 - z^2 - 2y - 2z = 0;$

в) $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0.$

Ответы

2.37. $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$. **2.38.** а) $(-5,0)$, (5,0); (0,–4), (0,4); б) (–3, 0), (3, 0); в) $\frac{3}{5}$; г) $x = \pm\frac{25}{3}$. **2.39.** $9x + 16y - 60 = 0$. **2.40**. $x + y - 3 = 0$. **2.41**. $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **2.42**. $\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$. **2.43**. $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$. **2.44.** $(-8,0)$, (8,0); (–10,0), (10,0); $\varepsilon = \frac{5}{4}$; $3x - 2y = 0,\ 3x + 2y = 0;\ x = \pm\frac{32}{5}$. **2.45**. $\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{18^2} = 1$. **2.46** $x + y + 1 = 0$. **2.47**. $y^2 = 12x$. **2.48**. $y^2 = -2x$. **2.49**. $y^2 = -20x$. **2.50**. – 6. **2.51**. $A(-2,2),\ p = \frac{1}{4}$. **2.52**. а) круговой цилиндр $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 4$. б) конус $x^2 + (y-1)^2 - (z-1)^2 = 0$. в) параболоид вращения $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 4z$.

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 5

1. Дана система арифметических векторов: $\boldsymbol{a_1} = (3, 2, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 3, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 2, 1, 4)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4, 3, 5, 4)$, $\boldsymbol{a}_5 = (-4, -3, -4, -5)$.

1. Найти все линейные зависимости между векторами этой системы.

2. Найти какую-нибудь нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$, равную нулевому вектору.

3. Можно ли вектор $\boldsymbol{a}_2$ линейно выразить через векторы $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a}_3$?

4. Можно ли вектор $\boldsymbol{a}_5$ линейно выразить через векторы $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$?

5. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$.

6. Каждый вектор данной системы выразить через векторы найденного базиса.

2. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & \lambda-1 & \lambda-1 & 1 \\ 2 & -1 & \lambda & 1 \\ 3 & 9 & \lambda-6 & 0 \end{pmatrix}$ в зависимости от значений параметра λ.

Контрольная работа № 6

1. Решить графически систему линейных неравенств

$$\begin{cases} 5x + y - 7 \le 0, \\ 2x - 3y - 13 \le 0, \\ 7x - 2y - 3 \ge 0. \end{cases}$$

2. Выяснить взаимное расположение пар прямых:

а) $3x - 4y + 5 = 0$ и $6x - 8y + 5 = 0$;

б) $3x - 4y + 5 = 0$ и $6x - 8y + 10 = 0$;

в) $3x - 4y + 5 = 0$ и $2x - 3y - 1 = 0$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $C(2;4)$ перпендикулярно прямой AB, если $A(-1;3)$, $B(4;-2)$.

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

3.1. Линейные пространства

Краткие теоретические сведения

Множество V называется *линейным (векторным) пространством,* если выполнены следующие три требования:

I. Имеется правило, по которому любым двум элементам $\boldsymbol{a, b} \in V$ ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{c = a + b} \in V$, называемый *суммой* этих элементов.

II. Имеется правило, по которому любому элементу $\boldsymbol{a} \in V$ и любому действительному числу α, ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{c} = \alpha \boldsymbol{a} \in V$, называемый *произведением* элемента $\boldsymbol{a}$ на число α.

III. Сформулированные правила удовлетворяют следующим восьми аксиомам:

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.
2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.
3. Существует нулевой элемент $\mathbf{0}$ такой, что $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ для любого элемента $\boldsymbol{a} \in V$.
4. Для каждого элемента $\boldsymbol{a}$ существует элемент $-\boldsymbol{a}$ такой, что $\boldsymbol{a + (-a) = 0}$ (элемент $-\boldsymbol{a}$ называется противоположным элементу $\boldsymbol{a}$).
5. $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}, \alpha \in \mathbb{R}$.
6. $(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = \alpha(\beta\boldsymbol{a}), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
7. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
8. $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Элементы линейного пространства называют *векторами* и обозначают $\boldsymbol{a, b, c}$, … .

Линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_m}$ с *коэффициентами* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ называется сумма произведений векторов $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_m}$ на числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$.

Система векторов $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_m}$ называется *линейно зависимой*, если *найдутся* такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, *не все равные нулю*, что выполняется равенство $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + ... + \lambda_m\boldsymbol{a}_m = 0$. Если же это равенство выполняется *только* при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$, то система векторов $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_m}$ называется *линейно независимой*.

Упорядоченная линейно независимая система векторов $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$ линейного пространства называется *базисом* этого пространства, если для каждого вектора $\boldsymbol{a}$ пространства найдутся такие числа, что

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e_1} + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + ... + \alpha_n\boldsymbol{e}_n \qquad (1)$$

При этом равенство (1) называется *разложением вектора* $\boldsymbol{a}$ по *базису* $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ называются *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$ (относительно базиса $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$).

Если базис пространства V состоит из n векторов, то n называется *размерностью* линейного пространства V и обозначается $\dim V = n$

Вместо равенства (1) используются и такие записи:

$$\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \\ \boldsymbol{...} \\ \boldsymbol{e_n} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{...}, \boldsymbol{e_n})\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

при этом $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ называется *координатной строкой* вектора $\boldsymbol{a}$, а

$A^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ – *координатным столбцом* этого вектора в базисе $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{...}, \boldsymbol{e_n})$.

Линейные операции в координатной форме имеют вид:

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \Leftrightarrow C = A + B$.

$\boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{a} \Leftrightarrow C = \lambda A$.

Пусть $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{...}, \boldsymbol{e_n})$ и $(\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}, \boldsymbol{...}, \boldsymbol{e'_n})$ – два различных базиса пространства V (первый из них будем для краткости обозначать $\boldsymbol{e}$, а второй – $\boldsymbol{e'}$).

Матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e'}$ называется матрица

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

k-й столбец которой является координатным столбцом вектора $\boldsymbol{e'_k}$ в базисе $\boldsymbol{e}$, таким образом, $(\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}, \boldsymbol{...}, \boldsymbol{e'_n}) = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{...}, \boldsymbol{e_n})T$.

Если $\boldsymbol{x}$ – произвольный вектор пространства V, X и X' – координатные его столбцы в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e'}$ соответственно, имеют место равенства (формулы *преобразования координат* при изменении базиса):

$X = TX'$, $X' = T^{-1}X$.

Подпространством линейного пространства V называется непустое подмножество L множества, V удовлетворяющее условиям: 1) если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$, то $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in L$; если $\boldsymbol{a} \in L$, то $\lambda \boldsymbol{a} \in L$.

Говорят, что L замкнуто относительно сложения векторов и относительно умножения вектора на число.

Важный пример подпространства линейного подпространства V – *линейная оболочка* системы векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{...}, \boldsymbol{a_m}$, т.е. множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов. Обозначение: $L(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{...}, \boldsymbol{a_m})$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Выяснить, является ли линейным пространством множество $\mathbb{R}^n$ всех n -мерных арифметических векторов.

Решение. Множество $\mathbb{R}^n$ подробно изучалось в главе 1 (1.2), его элементами являются упорядоченные наборы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из n действительных чисел со следующими правилами их сложения и умножения на действительные числа:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n)\ (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n);$$

$$\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Аксиомы 1– 8 линейного пространства выполняются, так как операции над n-мерными векторами сводятся к соответствующим операциям над действительными числами, для которых указанные аксиомы выполняются. Следовательно, $\mathbb{R}^n$ - линейное пространство.

Пример 2. Выяснить, является ли линейным пространством множество всех квадратных матриц n-го порядка с действительными элементами.

Решение. Поскольку при сложении действительных матриц n-го порядка, а также при умножении матрицы на действительное число получаем квадратные матрицы n-го порядка с действительными элементами, то сложение матриц и умножение матрицы на число являются операциями на данном множестве. В главе 1 было установлено, что аксиомы 1–8 линейного пространства выполняются, таким образом, рассматриваемое множество – линейное пространство.

Пример 3. Множество V_0 состоит из одного элемента 0; операции определены естественным образом: $0 + 0 = 0$, $\lambda 0 = 0$ для любого числа λ. Проверить, что V_0 – линейное пространство.

Решение. Выполнение аксиом 1–8 линейного пространства очевидно. V_0 – линейное пространство, его называют нулевым пространством.

Пример 4. Выяснить, является линейным пространством множество V_2 всех геометрических векторов на плоскости относительно сложения векторов и умножения вектора на число.

Решение. Аксиомы 1–8 для V_2 выполняются (это было рассмотрено в 8.1).

Пример 5. Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

Решение. Для определённости предположим, что в системе $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ первый вектор является нулевым (что не ограничивает общности рассуждений). Тогда очевидное равенство

$$1a_1 + 0a_2 + \ldots + 0a_m = 0$$

показывает, что данная система векторов линейно зависима.

Пример 6. Доказать, что система векторов $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ линейного пространства квадратных матриц второго порядка с действительными элементами линейно независима.

Решение. Найдём значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, при которых выполняется равенство

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3\\ -\alpha_3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Это равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0,\\ \alpha_2+\alpha_3=0,\\ -\alpha_3=0.\end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет только нулевое решение $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Пример 7. Векторы $\boldsymbol{e_1}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{e_2}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{e_3}=(2,3,5)$ и $\boldsymbol{a}=(2,3,4)$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ сами образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в этом базисе.

Решение. Так как каждый из данных векторов имеет три координаты, то эти векторы принадлежат трёхмерному пространству. Для того чтобы три вектора $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ составляли базис трёхмерного пространства достаточно, чтобы они били линейно независимыми. Составим матрицу A, столбцы которой есть координаты векторов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$, и найдём её ранг:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ранг матрицы A равен 3, следовательно, векторы $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ линейно независимы и, значит, составляют базис пространства.

Для нахождения координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вектора $\boldsymbol{a}$ составим и решим векторное уравнение $\alpha_1\boldsymbol{e_1}+\alpha_2\boldsymbol{e_2}+\alpha_3\boldsymbol{e_3}=\boldsymbol{a}$, или

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}.$$

Это уравнение равносильно системе линейных уравнений с такой расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right).$$

Используя метод Гаусса, получим $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$.

Пример 8. Векторы $\boldsymbol{e}_1 = (1;-1)$, $\boldsymbol{e}_1 = (-2;3)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (0;1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1;0)$; $\boldsymbol{a} = (-1;3)$ заданы своими координатами в некотором базисе. Найти матрицы перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ и обратно, а также координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в каждом из этих базисов.

Решение. Для нахождения координат α_1, α_2 вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и матрицы T перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ составим и решим векторные уравнения

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{e}_1' = t_{11} \boldsymbol{e}_1 + t_{21} \boldsymbol{e}_2, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{e}_2' = t_{12} \boldsymbol{e}_1 + t_{22} \boldsymbol{e}_2. \tag{3}$$

Уравнение (1) можно заменить равносильной ему системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = -1, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 3. \end{cases}$$

Аналогично уравнения (2) и (3) дадут следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} t_{11} - 2t_{21} = 0, \\ -t_{11} + 3t_{21} = 1. \end{cases}, \quad \begin{cases} t_{12} - 2t_{22} = 1, \\ -t_{12} + 3t_{22} = 0. \end{cases}$$

Замечаем, что все три системы уравнений можно решить методом Гаусса одновременно, так как они имеют одну и ту же основную матрицу. Применяем метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, (3, 2) – координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, а $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обратная для неё матрица $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ к базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

Теперь находим координатный столбец вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$:

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $T=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $T^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$.

Пример 9. Доказать, что все арифметические векторы вида $(\alpha,\beta,\gamma,\alpha)$ образуют подпространство пространства $\mathbb{R}^4$, найти его какой-нибудь базис и размерность.

Решение. Если обозначить через $\boldsymbol{L}$ множество всех арифметических векторов вида $(\alpha,\beta,\gamma,\alpha)$ (первая и четвёртая координаты равны между собой), то легко видеть, что $\boldsymbol{L}$ замкнуто относительно сложения векторов и умножения вектора на число:

$(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_1)+(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2,\gamma_1+\gamma_2,\alpha_1+\alpha_2)\in \boldsymbol{L}$;

$\lambda(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_1)=(\lambda\alpha_1,\lambda\beta_1,\lambda\gamma_1,\lambda\alpha_1)\in \boldsymbol{L}$.

Следовательно, $\boldsymbol{L}$ – подпространство пространства $\mathbb{R}^4$.

Рассмотрим три вектора $\boldsymbol{b}_1=(1,0,0,1)$, $\boldsymbol{b}_2=(0,1,0,0)$, $\boldsymbol{b}_3=(0,0,1,0)$ подпространства $\boldsymbol{L}$. Так как ранг матрицы

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

равен 3, то векторы $\boldsymbol{b_1,b_2,b_3}$ линейно независимы. Для любого вектора $\boldsymbol{a}=(\alpha,\beta,\gamma,\alpha)$ из $\boldsymbol{L}$ имеем $\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{b_1}+\beta\boldsymbol{b_2}+\gamma\boldsymbol{b_3}$, то есть векторы $\boldsymbol{b_1,b_2,b_3}$ порождают подпространство $\boldsymbol{L}$.

Ответ: $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ – базис $\boldsymbol{L}$; $\dim L=3$.

Пример 10. Доказать, что множество решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1-x_2+x_3-x_4=0,\\ 4x_1+x_2-x_3+x_4=0,\\ 4x_1-x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

составляет подпространство пространства $\mathbb{R}^4$, найти какой-нибудь его базис и размерность.

Решение. Обозначим через $\boldsymbol{L}$ – множество решений данной системы уравнений, тогда $\boldsymbol{L}\in\mathbb{R}^4$. Согласно 7.3 множество $\boldsymbol{L}$ замкнуто относительно сложения решений и относительно умножения решений на число, таким образом, $\boldsymbol{L}$ – подпространство $\mathbb{R}^4$. Базисом $\boldsymbol{L}$ является фундаментальный набор решений системы уравнений, а размерность этого подпространства равна разности $n-r$, где $n-$ число неизвестных системы уравнений ($n=4$), а $r-$ ранг матрицы системы. Применяя метод Гаусса, находим: $\dim L=2$; $\boldsymbol{c}_1=(0,1,1,0)$, $\boldsymbol{c}_2=(0,-1,0,1)-$ базис $\boldsymbol{L}$.

Задания для самостоятельной работы

3.1. Показать, что множество V_3 геометрических векторов, исходящих из начала координат, является линейным пространством.

3.2. Выяснить, является ли линейным пространством множество геометрических векторов плоскости, исходящих из начала координат, концы которых лежат на данной прямой.

3.3. Доказать, что множество всех многочленов с действительными коэффициентами степени $\le n$, пополненное нулевым многочленом, относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на действительное число является линейным пространством.

3.4. Доказать, что система векторов, два вектора которой отличаются числовым множителем, линейно зависима.

3.5. Доказать, что система векторов, состоящая более чем из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда некоторый из её векторов линейно выражается через остальные.

3.6. Если система векторов $a_1, a_2, ..., a_m$ линейно независима, а система $a_1, a_2, ..., a_m, b$ линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, ..., a_m$. Доказать.

3.7. Пусть a, b, c – линейно независимая система векторов. Будут ли линейно независимыми следующие системы векторов:

а) $a, a+b, a+b+c$;

б) $a+b, b+c, c+a$;

в) $a-b, b-c, c-a$.

3.8. Проверить, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$; найти координаты вектора a в этом базисе:

а) $e_1 = (2,2,-1)$, $e_2 = (2,-1,2)$, $e_3 = (-1,2,2)$, $a = (1,1,1)$.

б) $e_1 = (1,5,3)$, $e_2 = (2,7,3)$, $e_3 = (3,9,4)$, $a = (2,1,1)$.

3.9. Доказать, что матрицы E_1, E_2, E_3, E_4 образуют базис пространства квадратных матриц второго порядка с действительными элементами, и найти координаты матрицы A в этом базисе.

а) $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}$.

б) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$.

3.10. Векторы e_1, e_2, e_3; e_1', e_2', e_3' и вектор a заданы своими координатами в некотором базисе. Доказать, что каждая из двух систем e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3' является базисом; найти матрицы перехода от первого базиса ко второму и обратно; найти координаты вектора a в каждом из этих базисов.

а) $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\boldsymbol{e}_3=(0,0,1);$

$\boldsymbol{e}_1'=(1,1,0),\boldsymbol{e}_2'=(0,1,1),\boldsymbol{e}_3'=(1,0,1);\ \boldsymbol{a}=(3,5,-4).$

б) $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,1),\boldsymbol{e}_3=(0,0,1);$

$\boldsymbol{e}_1'=(1,-1,2),\boldsymbol{e}_2'=(-1,\frac{3}{2},-3),\boldsymbol{e}_3'=(0,1,0);\ \boldsymbol{a}=(0,0,-4).$

3.11. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^4$ множество $\boldsymbol{L}$, состоящее из векторов указанного вида, является подпространством; найти какой-нибудь базис и размерность подпространства $\boldsymbol{L}$.

а) $L=\{(\alpha,\beta,\alpha,\beta)\,|\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}.$

б) $L=\{(\alpha+\beta,\beta,\alpha-\beta,\beta)\,|\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}.$

в) $L=\{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha+\beta+\gamma)\,|\,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}.$

3.12. Доказать, что множество решений данной системы линейных уравнений составляет подпространство пространства $\mathbb{R}^4$, найти какой-нибудь базис и размерность этого подпространства.

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0,\\ 4x_1+7x_2+10x_3-7x_4=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0,\\ x_1+4x_2+16x_3-13x_4=0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=0,\\ x_1+x_2+3x_3+2x_4=0,\\ x_1-5x_2+x_3=0,\\ -3x_1+2x_2-5x_3+3x_4=0. \end{cases}$

Ответы

3.2. Да, если, прямая проходит через начало координат; нет – в противном случае. **3.7.** а) да; б) нет; в) нет. **3.8.** а) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, б) (0, –5, 4). **3.9.** а) (–2, –1, –2, 6), б) (–5, 4, 3, 11).

3.10. а) $T=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix};\quad T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}\alpha_1'\\\alpha_2'\\\alpha_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-1\\-3\end{pmatrix};$

б) $T=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&3/2&1\\2&-3&0\end{pmatrix};\ T^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&0&-1\\0&1&1/2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}\alpha_1'\\\alpha_2'\\\alpha_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$. **3.11.** а) (1, 0, 1,0), (0, 1, 0, 1) – базис; $\dim L=2$, б) $(1,1,1,0)$, $(0,1,-1,1)$ – базис; $\dim L=2$, в)(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), $(0,0,1,1)$ – базис; $\dim L=3$. **3.12.** а) $\dim L=2$, $(8,-6,1,0)$, $(-7,5,0,1)$ – базис, б) базис не существует; $\dim L=0$.

3.2. Евклидово пространство

Краткие теоретические сведения

Линейное пространство V называется *евклидовым* пространством, если выполнены следующие требования:

I. Имеется правило, по которому двум векторам этого пространства $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ставится в соответствие *действительное число*, называемое *скалярным произведением* этих векторов и обозначаемое символом $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

II. Указанное правило удовлетворяет таким аксиомам:

1. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$.
2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{z})$.
3. $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
4. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\geq 0$ причём $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}$ – нулевой вектор.

Обозначения: $\boldsymbol{E}$– евклидово пространство; $\boldsymbol{E_n}$– мерное евклидово пространство; $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ называют скалярным квадратом вектора $\boldsymbol{a}$.

Длиной (нормой) вектора $\boldsymbol{a}$ евклидова пространства называется неотрицательный квадратный корень из его скалярного квадрата, т.е. $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$. Вектор в евклидовом пространстве называют *нормированным*, если его длина равна 1.

Угол φ между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется формулой:

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},\ (0\leq\varphi<\pi).$$

Два вектора евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ называют *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Отметим, что нулевой вектор ортогонален любому вектору из пространства $\boldsymbol{E}$.

Система векторов евклидова пространства называется *ортогональной*, если векторы этой системы попарно ортогональны. Базис евклидова пространства называется *ортогональным базисом*, если его векторы попарно ортогональны.

Переход от произвольного базиса $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\ldots,\boldsymbol{a_n}$ евклидова пространства $\boldsymbol{E_n}$ к ортогональному базису $\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2},\ldots,\boldsymbol{b_n}$ можно осуществить с помощью процесса ортогонализации:

$$\boldsymbol{b_1}=\boldsymbol{a_1};\qquad \boldsymbol{b_k}=\boldsymbol{a_k}+\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{i,k}\boldsymbol{b_i},\qquad k=2,3,\ldots,n,$$

где $\alpha_{i,k}=-\dfrac{(\boldsymbol{b_i},\boldsymbol{a_k})}{(\boldsymbol{b_i},\boldsymbol{b_i})},\qquad i=1,2,\ldots,k-1.$

Базис $\boldsymbol{e_1,e_2,...,e_n}$ евклидова пространства $\boldsymbol{E_n}$ называется *ортонормированным*, если его векторы попарно ортогональны и норма (длина) каждого из них равна единице.

Чтобы получить из ортогонального базиса $\boldsymbol{a_1,a_2,...,a_n}$ ортонормированный базис $\boldsymbol{e_1,e_2,...,e_n}$ можно использовать формулы $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\boldsymbol{a}_i}{|\boldsymbol{a}_i|}$, i=1, 2,…, n.

Если $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ и $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ координатные строки векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно в базисе $\boldsymbol{e_1,e_2,...,e_n}$, то $(\boldsymbol{a,b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + ... + \alpha_n\beta_n$, тогда и только тогда, когда базис $\boldsymbol{e_1,e_2,...,e_n}$ ортонормированный.

В этом разделе, если нет других указаний, то координаты всех векторов взяты в ортонормированном базисе.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Доказать, что из аксиом скалярного произведения следует равенство $(\boldsymbol{a},0) = 0$.

Решение. Легко установить справедливость равенств
$(\boldsymbol{a},0) = (\boldsymbol{a},0\cdot\boldsymbol{a}) = (0\cdot\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0$.

Пример 2. Вычислить угол между векторами $\boldsymbol{a} = (3,0,-3,0)$ и $\boldsymbol{b} = (2,2,-1,0)$ евклидова пространства.

Решение. Поскольку координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взяты в ортонормированном базисе евклидова пространства $\boldsymbol{E}_4$, то скалярное произведение $(\boldsymbol{a,b})$ определяется равенством $(\boldsymbol{a,b})$=3·2+0·2+(−3)·(−1)+0·0=9, а $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2+0^2} = 3\sqrt{2}$ и $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2+0^2} = 3$. Теперь воспользуемся формулой для нахождения угла φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a,b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Пример 3. Доказать, что в пространстве $\boldsymbol{E}_3$ векторы $\boldsymbol{a} = (1,-1,1), \boldsymbol{b} = (4,-3,2), \boldsymbol{c} = (6,2,2)$ составляют базис и, применяя к нему процесс ортогонализации, построить ортогональный базис евклидова пространства $\boldsymbol{E}_3$

Решение. К системе векторов $\boldsymbol{a,b,c}$ применяем процесс ортогонализации и строим систему $\boldsymbol{b_1,b_2,b_3}$. Полагаем $\boldsymbol{b_1}=\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}+\alpha\boldsymbol{b}_1$, где $\alpha=-\dfrac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}=-\dfrac{4+3+2}{1+1+1}=-3$

Следовательно, $\boldsymbol{b}_2=(4,-3,2)-3\cdot(1,-1,1)=(1,0,-1)$. Аналогично составляем $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{c}+\beta\boldsymbol{b}_1+\gamma\boldsymbol{b}_2$, где

$$\beta=-\frac{(\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_1})}=-\frac{6-2+2}{3}=-2,$$

$$\gamma=-\frac{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)}=-\frac{4}{2}=-2,$$

Поэтому $\boldsymbol{b}_3=(6,2,2)-2\cdot(1,-1,1)-2\cdot(1,0,-1)=(2,4,2)$; получена ортогональная система трёх ненулевых векторов $\boldsymbol{b_1,b_2,b_3}$. Таким образом, исходная система векторов $\boldsymbol{a,b,c}$ линейно независима и составляет базис трёхмерного пространства $\boldsymbol{E}_3$, а $\boldsymbol{b_1,b_2,b_3}$ искомый ортогональный базис.

Ответ: $\boldsymbol{b_1}=(1,-1,1),\boldsymbol{b_2}=(1,0,-1),\boldsymbol{b_3}=(2,4,2)$.

Пример 4. Проверить, что система векторов $\boldsymbol{b_1}=(1,-2,2,-3)$, $\boldsymbol{b_2}=(2,-3,2,4)$ ортогональна, и дополнить её до ортогонального базиса.

Решение. Ясно, что рассматривается евклидово пространство $\boldsymbol{E}_4$. Поскольку $(\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2})=1\cdot2+(-2)\cdot(-3)+2\cdot2+(-3)\cdot4=0$, то данная система векторов ортогональна.

Найдём вектор $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in\boldsymbol{E}_4$ такой, что $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b_1})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b_2})=0$, для чего решим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3-3\alpha_4=0\\ 2\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3+4\alpha_4=0\end{cases}$$

Метод Гаусса позволяет составить общее решение этой системы: $\alpha_1=2\alpha_2-17\alpha_4,\ \alpha_2=2\alpha_3-10\alpha_4,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{R}$ векторы $\boldsymbol{c_1}=(2,2,1,0)$, $\boldsymbol{c_2}=(-17,-10,0,1)$ – фундаментальный набор решений системы уравнений. Каждый из этих векторов ортогонален векторам $\boldsymbol{b_1}$ и $\boldsymbol{b_2}$.

К системе векторов $\boldsymbol{c_1,c_2}$ применим процесс ортогонализации: полагаем $\boldsymbol{b_3}=\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{b_4}=\boldsymbol{c}_2+\beta\boldsymbol{b_3}$, где $\beta=-\dfrac{\boldsymbol{c_2b_3}}{\boldsymbol{b_3b_3}}=-\dfrac{-54}{9}=6$. Следовательно, $\boldsymbol{b_4}=(-17,-10,0,1)+(12,12,6,0)$.

Ответ: Можно добавить векторы $\boldsymbol{b_3}=(2,2,1,0)$, $\boldsymbol{b_4}=(-5,2,6,1)$.

Пример 5. Найти вектор, дополняющий систему векторов $\boldsymbol{b}_1=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\boldsymbol{b}_2=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ до ортонормированного базиса.

Решение. Легко проверить, что $\left(\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2}\right)=0$ и $\left|\boldsymbol{b_1}\right|=\left|\boldsymbol{b}_2\right|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=1$. Это означает, что данная система векторов ортогональна и нормирована. Найдём вектор $\boldsymbol{b}=\left(x_1,x_2,x_3\right)$, ортогональный каждому из данных векторов. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=0,\\ \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3=0.\end{cases}$$

Запишем её общее решение: $x_1=-2x_3, x_2=2x_3, x_3$ - любое число. $\left(2,-2,-1\right)$ – частное решение (фундаментальный набор). Теперь полагаем $\boldsymbol{b}=\left(2,-2,-1\right)$ и находим $\left|\boldsymbol{b}\right|=3$. Нормируя вектор $\boldsymbol{b}$, получим вектор $\boldsymbol{b_3}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{-1}{3}\right)$.

Задания для самостоятельной работы

3.13. Доказать свойства скалярного произведения:

а) $\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)=\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right)+\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\right)$;

б) $\left(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right)=\lambda\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right)$;

в) $\left(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right)=\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\right)-\left(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right)$;

г) $\left|\boldsymbol{\lambda a}\right|=\left|\boldsymbol{\lambda}\right|\left|\boldsymbol{a}\right|$.

3.14. Найти угол φ между векторами евклидова пространства $\boldsymbol{E}_3$:

а) $\boldsymbol{a}=\left(2,-3,1\right)$ и $\boldsymbol{b}=\left(4,-6,2\right)$;

б) $\boldsymbol{a}=\left(1,0,-1\right)$ и $b=\left(-1,2,2\right)$;

в) $\boldsymbol{a}=\left(1,-1,2\right)$ и $\boldsymbol{b}=\left(1,0,1\right)$.

3.15. При помощи процесса ортогонализации построить ортогональный базис системы векторов:

а) $\left(1,2,1\right)$, $\left(3,4,1\right)$, $\left(1,-3,-1\right)$.

б) $\left(1,1,-1\right)$, $\left(-4,0,5\right)$, $\left(-8,2,0\right)$.

3.16. Проверить, что векторы следующих систем ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

а) $\left(1,1,1,2\right)$, $\left(1,0,1,-1\right)$;

б) $\left(1,-1,2,0\right)$, $\left(-1,1,1,3\right)$.

3.17. Найти векторы, дополняющие следующие системы векторов до ортонормированных базисов:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)$, $\frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,2,-1)$;

б) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1,0)$.

Ответы

3.14. а) $\varphi = 0$, б) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, в) $\frac{\pi}{6}$. **3.15**. а) (1, 2, 1), $(1,0,-1)$, $(1,-1,1)$; б) $(1,1,-1)$, $(-1,3,2)$, $(-5,1,-4)$. **3.16**. а) $(-1,0,1,0)$, (1,–6, 1,2), б)$(1,1,0,0)$, $(1,-1,-1,1)$. **3.17.** а) $\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{42}}(6,-1,-2,1)$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1)$.

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 7

Векторы $e_1, e_2, e_3; e_1', e_2', e_3'$ и a заданы своими координатами в некотором базисе пространства. Доказать, что каждая из троек $e_1, e_2, e_3; e_1', e_2', e_3'$ является базисом пространства, найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и обратно, а также координаты вектора a в этих базисах, если

$e_1 = (3,2,1)$, $e_1' = (3,2,-1)$,

$e_2 = (2,1,-1)$, $e_2' = (4,3,1)$, $a = (1,2,3)$.

$e_3 = (1,1,0)$; $e_3' = (5,3,0)$,

Выполнить проверку.

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

4.1. Алгебра линейных операторов

Краткие теоретические сведения

Пусть V – линейное пространство. Если каждому вектору $\boldsymbol{a}$ пространства V ставится в соответствие единственный вектор $\boldsymbol{b}$ этого же пространства, то говорят, что задано *отображение* φ пространства в себя, или задан *оператор,* действующий в пространстве V. Вектор $\boldsymbol{b}$ называют *образом* вектора $\boldsymbol{a}$ при отображении φ, а $\boldsymbol{a}$ *– прообразом* вектора $\boldsymbol{b}$ и обозначают $\boldsymbol{b}=\varphi(\boldsymbol{a})$.

Оператор φ, действующий в пространстве V, называют *линейным оператором,* если он удовлетворяет таким свойствам (*условиям линейности*):

1) $\varphi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\varphi(\boldsymbol{a})+\varphi(\boldsymbol{b})$**.**

2) $\varphi(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\varphi(\boldsymbol{a})$, где λ – произвольное число, а $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\in V$.

Пусть $\varphi-$ линейный оператор в пространстве V размерности n и $\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,...,e_n)$ – произвольный базис V. Для каждого вектора $\boldsymbol{e}_k$ $(k=1,2,...n)$ запишем разложение вектора $\varphi(\boldsymbol{e}_k)$ по базису $\boldsymbol{e}$: $\varphi(\boldsymbol{e}_k)=\alpha_{1k}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{2k}\boldsymbol{e}_2+...+\alpha_{nk}\boldsymbol{e}_n$.

Матрица $A_\varphi=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, столбцами, которой являются координаты вектора $\varphi(\boldsymbol{e}_k)$ (k=1, 2, …, n) в базисе $(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_n})$, называется *матрицей линейного* φ в выбранном базисе $\boldsymbol{e}$.

Если $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$–координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}$, а $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$– координаты вектора $\varphi(\boldsymbol{a})$ в том же базисе, то

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_n \end{pmatrix}=A_\varphi\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Пусть A_φ и A'_φ— матрицы линейного оператора φ базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ соответственно, а $T-$ матрица перехода от первого базиса ко второму базису, тогда $A'_\varphi=T^{-1}A_\varphi T$.

Матрицы одного и того же линейного оператора в различных базисах являются *подобными.*

Суммой линейных операторов φ и ψ называется линейный оператор $\varphi+\psi$, определяемый равенством $(\varphi+\psi)(\boldsymbol{a})=\varphi(\boldsymbol{a})+\psi(\boldsymbol{a})$.

Произведением линейного оператора φ *на число* λ называется линейный оператор $\lambda\varphi$ такой, что $(\lambda\varphi)(\boldsymbol{a})=\lambda\varphi(\boldsymbol{a})$.

Произведением линейных операторов φ и ψ называется линейный оператор $\varphi\psi$, определяемый равенством $(\varphi\psi)(\boldsymbol{a})=\varphi(\psi(\boldsymbol{a}))$.

Множество векторов $\boldsymbol{a}$ пространства V, для которых $\varphi(\boldsymbol{a})=0$, называется *ядром* линейного оператора φ; множество образов $\varphi(\boldsymbol{a})$ всех векторов $\boldsymbol{a}$ пространства V называется *образом* линейного оператора φ (областью значений). Обозначение: $Ker\varphi$ – ядро линейного оператора φ, $\varphi(V)$ – образ линейного оператора φ.

Образ и ядро линейного оператора являются подпространствами пространства V, при этом $\dim Ker=\dim\varphi(V)=\dim V=n$.

Размерность образа линейного оператора называется *рангом линейного оператора;* размерность ядра называется *дефектом линейного оператора.*

Ранг линейного оператора равен рангу его матрицы в любом базисе пространства.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Доказать, что оператор θ, переводящий все векторы пространства V_n в нулевой вектор является линейным (*нулевой оператор*) и найти его матрицу.

Решение. Проверим выполнение условий линейности:

1) $\theta(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0=\theta(\boldsymbol{a})+\theta(\boldsymbol{b})$;

2) $\theta(\lambda\boldsymbol{a})=0=\lambda 0=\lambda\theta(\boldsymbol{a})$.

Следовательно, θ – линейный оператор.

Найдём матрицу нулевого оператора в пространстве V_n. Для каждого вектора $\boldsymbol{e_k}$ из базиса $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_n}$ имеем: $\theta(\boldsymbol{e}_k)=0=0\boldsymbol{e_1}+0\boldsymbol{e_2}+...+0\boldsymbol{e_n}$, поэтому

$$A_\theta=\begin{pmatrix}0 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Доказать, что оператор ε, действующий по правилу: $\varepsilon(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$, является линейным (*тождественный* или *единичный оператор)* и найти его матрицу.

Решение. Проверим условия линейности:

1) $\varepsilon(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\varepsilon(\boldsymbol{a})+\varepsilon(\boldsymbol{b})$;

2) $\varepsilon(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\varepsilon(\boldsymbol{a})$.

Следовательно, ε –линейный оператор. Для нахождения матрицы единичного (тождественного) оператора воспользуемся равенствами:

$\varepsilon(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1$, $\varepsilon(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_2$, …, $\varepsilon(\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{e}_n$, т.е.

$\varepsilon(\boldsymbol{e}_1)=1\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+...+0\boldsymbol{e}_n$,

$\varepsilon(\boldsymbol{e}_2)=0\boldsymbol{e}_1+1\boldsymbol{e}_2+...+0\boldsymbol{e}_n$,

……

$\varepsilon(\boldsymbol{e}_n)=0\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+...+1\boldsymbol{e}_n$

Таким образом, матрицей тождественного оператора является единичная матрица

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}.$$

Пример 3. Пусть V – пространство многочленов $f(x)$ с действительными коэффициентами, степень которых не выше $n-1$. Отображение φ каждому многочлену $f(x)$ ставит в соответствие его производную $f'(x)$. Доказать, что φ – линейный оператор (*оператор дифференцирования)* и найти его матрицу в базисе 1, $x, x^2, ..., x^{n-1}$.

Решение. Выполнение условий линейности φ следует из правил дифференцирования. Рассмотрим базис $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}$ пространства V, считая $\boldsymbol{e}_1=1$, $\boldsymbol{e}_2=x$, $\boldsymbol{e}_3=x^3$, …, $\boldsymbol{e}_n=x^{n-1}$. Применяем к этим векторам оператор дифференцирования:

$\varphi(\boldsymbol{e}_1)=(1)'=0=(0,0,0,\ldots,0,0)$,

$\varphi(\boldsymbol{e}_2)=(x)'=1\boldsymbol{e_1}=(1,0,0,\ldots,0,0)$,

$\varphi(\boldsymbol{e}_3)=(x^2)'=2x=2\boldsymbol{e}_2=(0,2,0,\ldots,0,0)$,

……

$\varphi(\boldsymbol{e}_n)=(x^{n-1})'=(n-1)x^{n-2}=(n-1)\boldsymbol{e}_{n-1}=(0,0,0,\ldots,n-1,0)$.

Теперь можно записать матрицу оператора дифференцирования

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. В пространстве V_3 линейный оператор φ в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ задан матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора $\varphi(\boldsymbol{a})$, если $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_3}$.

Если $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$–координаты вектора $\varphi(\boldsymbol{a})$, то

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (4, –1, 4).

Пример 5. В базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ линейный оператор φ имеет матрицу $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу B_φ оператора φ в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e_1} - 2\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$.

Решение. Запишем матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$: $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; обратная к ней $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь получаем

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы

4.1. Доказать, что отображение φ пространства V_n в себя такое, что для любого вектора $\boldsymbol{a}$ пространства V_n и любого числа λ выполняется условие $\varphi(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a}$, является линейным оператором (оператор подобия); найти матрицу этого линейного оператора в произвольном базисе пространства.

4.2. Доказать, что проектирование трёхмерного пространства на координатную плоскость $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ параллельно оси координат вектора $\boldsymbol{e}_3$ является линейным оператором, и найти его матрицу.

4.3. Выяснить, какие из следующих операторов φ пространства V_3 заданных координатами вектора $\varphi(\boldsymbol{a})$ как функциями координат вектора $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, являются линейными. В случае линейности найти их матрицы в том же базисе, в котором заданы координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\varphi(\boldsymbol{a})$

а) $\varphi(\boldsymbol{a})=(\alpha_2+\alpha_3,3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)$;

б) $\varphi(\boldsymbol{a})=(\alpha_1+1,\alpha_2,\alpha_3-2)$;

в) $\varphi(\boldsymbol{a})=(\alpha_1,\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3^2)$;

г) $\varphi(\boldsymbol{a})=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1)$.

4.4. Линейный оператор φ в базисе $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2}$ задан матрицей $A_\varphi=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Найти координаты вектора $\varphi(\boldsymbol{a})$ в этом базисе, если $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e_1}-2\boldsymbol{e_2}$.

4.5. Линейный оператор φ в базисе $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e}_3$ задан матрицей $A_\varphi=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$. Найти координаты вектора $\varphi(\boldsymbol{a})$ в этом базисе, если $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{e_1}-\boldsymbol{e_2}+2\boldsymbol{e_3}$.

4.6. Линейный оператор φ в базисе $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2}$ задан матрицей $A_\varphi=\begin{pmatrix}6 & 17\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Найти матрицу B_φ этого линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2$, если $\boldsymbol{e}'_1=4\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.

4.7. Линейные операторы φ и ψ заданы в некотором базисе пространства V_2 матрицами $A_\varphi=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$, $A_\psi=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$. Найти в этом же базисе матрицы линейных операторов $\varphi+\psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

4.8. Линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1=(2,1)$, $\boldsymbol{e}_2=(1,1)$ имеет матрицу $A_\varphi=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ а линейный оператор ψ в базисе $\boldsymbol{e}'_1=(5,2)$, $\boldsymbol{e}'_2=(1,0)$ имеет матрицу $A_\psi=\begin{pmatrix}7{,}5 & 3{,}5\\ 4{,}5 & 1{,}5\end{pmatrix}$. Найти матрицы линейных операторов $\varphi+\psi$ и $\varphi\psi$ в базисе $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2$.

4.9. Линейный оператор φ в базисе $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2}$ задан матрицей $A_\varphi=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Найти образ, ядро, дефект и ранг линейного оператора φ

4.10. Линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ определяется так: $\varphi(\boldsymbol{a})=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$, если $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. Найти ранг и дефект линейного оператора φ, а также базисы его образа и ядра.

Ответы

4.1. $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda\end{pmatrix}$. **4.2**. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. **4.3**. а) линейный $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$; б) не линейный; в) не линейный; г) линейный $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. **4.4.** (6, 9). **4.5.** (–4, 7, 7). **4.6**. $B_\varphi=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. **4.7**. $A_{\varphi+\psi}=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 7 & 9\end{pmatrix}$, $A_{\varphi\psi}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$, $A_{\psi\varphi}=\begin{pmatrix}29 & -32\\ 31 & -24\end{pmatrix}$. **4.8**. $B_{\varphi+\psi}=\begin{pmatrix}11 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$; $B_{\psi\varphi}=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 12 & -6\end{pmatrix}$. **4.9.** $r=1,\dim Ker\varphi=1$, $Ker\varphi=\{\alpha\cdot(1,-1)\,|\,\alpha\in\mathbb{R}\}$, $\varphi(V)=\{\beta\cdot\varphi(\boldsymbol{e}_1)\,|\,\beta\in\mathbb{R}\}$. **4.10.** $r=1$, $(1,1,1)$ – базис образа; $\dim Ker\varphi=2$, $\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$ – базис ядра.

4.2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Краткие теоретические сведения

Ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$, удовлетворяющий соотношению $\varphi(\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}$ называется *собственным вектором линейного оператора* φ, а число λ – *собственным значением линейного оператора* φ. При этом говорят, что вектор $\boldsymbol{a}$ принадлежит (соответствует, отвечает) собственному значению λ.

Пусть матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

является матрицей линейного оператора φ в некотором (произвольном) базисе, тогда матрица

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{pmatrix}$$

– х*арактеристической* матрицей линейного оператора φ (матрицы A).

Определитель $\det(A-\lambda E)$ называется *характеристическим многочленом линейного оператора* φ (матрицы A). Уравнение $\det(A-\lambda E)=0$ называется *характеристическим уравнением* матрицы A (линейного оператора), а его корни – характеристическими числами.

Характеристические числа, и только они, являются собственными значениями линейного оператора.

Собственные векторы, отвечающие попарно различным собственным значениям линейного оператора, линейно независимы.

Если в пространстве размерности n линейный оператор φ имеет n попарно различных собственных значений, то в этом пространстве существует базис, состоящий из собственных векторов оператора φ.

Квадратная матрица называется *диагональной* (имеет диагональ56ный вид), если все её элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Говорят, что матрица A приводится к диагональному виду, если она подобна диагональной матрице, т.е. существует матрица T, такая, что $T^{-1}AT$ – диагональна.

Матрица линейного оператора φ в базисе $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n$ имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все векторы базиса являются собственными векторами оператора φ.

Для того чтобы существовал базис из собственных векторов линейного оператора φ, необходимо и достаточно, чтобы каждому собственному значению принадлежало столько собственных векторов, какая его кратность.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическую матрицу

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим характеристический многочлен $\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\left(1-\lambda\right)^2-9$ и находим корни λ_1,λ_2 характеристического уравнения $\left(1-\lambda\right)^2-9=0$: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=4$. Эти корни и есть искомые собственные значения линейного оператора.

Для собственного значения $\lambda=\lambda_1=-2$ находим собственные векторы, т.е. ненулевые векторы $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2\right)$, записанные своими координатами в том же базисе, что и матрица A, которые удовлетворяют матричному уравнению

$$\left(A-\lambda E\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

т.е. системе линейных однородных уравнений

$$\begin{cases}3x_1+3x_2=0,\\3x_1+3x_2=0,\end{cases}$$

равносильной одному уравнению $x_1+x_2=0$. Находим общее решение: $x_1=-x_2$, x_2- любое число. Фундаментальный набор решений состоит из оного решения, например $(1,-1)$ Поэтому собственному значению $\lambda=\lambda_1=-2$ отвечают собственные векторы вида $\alpha(1,-1)$, где $\alpha-$ любое отличное от нуля число.

Аналогично находим собственные векторы, принадлежащие собственному значению $\lambda=\lambda_2=4$; в этом случае задача сводится к отысканию фундаментального набора решений системы уравнений

$$\begin{cases}-3x_1+3x_2=0,\\3x_1+-3x_2=0,\end{cases}$$

Фундаментальный набор решений состоит из одного вектора, например, (1, 1), поэтому собственному значению $\lambda=\lambda_2=4$ отвечают собственные векторы вида $\beta(1,1)$, где $\beta-$ любое отличное от нуля число.

Пример 2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Составляем характеристическую матрицу

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\0 & 1-\lambda\end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $(1-\lambda)^2=0$ имеет один двукратный корень $\lambda_1=\lambda_2=1$. В данном случае имеется только одно собственное значение $\lambda=1$. Для него находим собственные векторы $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, которые удовлетворяют матричному уравнению

$$\begin{pmatrix}0 & 3\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

т.е. уравнению $0\cdot x_1+x_2=0$. Фундаментальный набор решений состоит из одного вектора, например, (1, 0). Поэтому собственные векторы, имеющие собственное значение $\lambda=1$, имеют вид $\alpha(1,0)$, где $\alpha-$любое отличное от нуля число.

Пример 3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix} -7 & 12 & -6 \\ -3 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем характеристическую матрицу

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -7-\lambda & 12 & -6 \\ -3 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -6 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Выполним вычисления для характеристического многочлена

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 12 & -6 \\ -3 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -6 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1+\lambda & -1-\lambda \\ -3 & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 3 & -6 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(1+\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 2-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(1+\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(1+\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(1+\lambda)^2(2-\lambda).$$

Характеристическое уравнение имеет вид $(1+\lambda)^2(2-\lambda)=0$; находим его корни: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$ ($\lambda=-1$—двукратный корень).

Для отыскания собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda_1=2$, решаем матричное уравнение $(A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е. систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} -9x_1+12x_2-6x_3=0, \\ -3x_1+3x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-6x_2=0. \end{cases}$$

Применив метод Гаусса, найдём фундаментальный набор решений, состоящий из одного вектора $(2,1,-1)$. Следовательно, собственные векторы, принадлежащие собственному значению $\lambda_1=2$, имеют вид $\alpha(2,1,-1)$, где α – любое число, отличное от нуля.

Для собственного значения $\lambda=-1$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} -6x_1+12x_2-6x_3=0, \\ -3x_1+6x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-6x_2+3x_3=0. \end{cases}$$

Фундаментальный набор решений этой системы состоит из двух векторов (2, 1, 0) и $(1,0,-1)$. Таким образом, собственные векторы, принадлежащие собственному значению $\lambda_2=\lambda_3=-1$, имеют вид $\alpha(2,1,0)+\beta(1,0,-1)$, где α,β – любые числа, не равные нулю одновременно.

Пример 4. Выяснить, можно ли матрицу A линейного оператора φ привести к диагональному виду путём перехода к новому базису, и если можно, то найти этот базис и соответствующую ему матрицу.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Находим характеристический многочлен матрицы A:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 2\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(2-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda).$$

Он имеет три различных корня: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$, т.е. линейный оператор φ имеет столько различных собственных значений, какова размерность пространства. Следовательно, матрица приводится к диагональному виду.

Найдём базис пространства, состоящий из собственных векторов.

- $\lambda_1=-1$. Запишем и решим систему уравнений для отыскания собственных векторов

$$\begin{cases}0x_1+\ 0x_2+2x_3=0,\\ \ x_1+\ 2x_2-\ x_3=0,\\ 0x_1+\ 0x_2+3x_3=0.\end{cases}$$

Общее решение этой системы $x_1=-2x_2$, $x_3=0$, x_2 – любое число. Фундаментальный набор из оного вектора, например, $\boldsymbol{b}_1=(-2,1,0)$.

- $\lambda_2=1$. Теперь получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases}-2x_1+0x_2+2x_3=0,\\ \ x_1+\ 0x_2-\ x_3=0,\\ 0x_1+\ 0x_2+x_3=0.\end{cases}$$

Фундаментальный набор её решений состоит также из одного вектора $\boldsymbol{b}_2=(0,1,0)$.

- $\lambda_3=2$. Имеем систему

$$\begin{cases}-3x_1\qquad +2x_3=0,\\ \ x_1-\ x_2-\ x_3=0,\end{cases}$$

Вектор $\boldsymbol{b}_3 = (2,-1,3)$ составляет её фундаментальный набор решений.

Ответ: Матрица A приводится к диагональному виду $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Векторы $\boldsymbol{b}_1 = (-2,1,0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2,-1,3)$ – составляют искомый базис.

Пример 5. Выяснить, можно ли матрицу A линейного оператора φ привести к диагональному виду путём перехода к новому базису, и если можно, то найти этот базис и соответствующую ему матрицу.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим характеристический многочлен

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 & -3 \\ 1-\lambda & -2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 1 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Находим корни этого многочлена: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Для каждого из этих корней вычисляем собственные векторы.

- $\lambda_1 = 2$. Требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

её фундаментальный набор содержит один вектор (2, 1, 1).

- $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

для которой фундаментальный набор также состоит из одного вектора (1, 1, 0). Так как $\lambda = 1$–двукратный корень, а фундаментальный набор для соответствующей системы уравнений состоит из одного вектора, то матрица A не приводится к диагональному виду

Задания для самостоятельной работы

4.11. Доказать, что любой собственный вектор линейного оператора φ имеет только одно собственное значение.

4.12. Доказать, что собственные векторы, имеющие попарно различные собственные значения, линейно независимы.

4.13. Доказать, что множество собственных векторов линейного оператора φ, принадлежащих одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором образует подпространство.

4.14. Доказать, что собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе диагональной матрицей, совпадают с её диагональными элементами.

4.15. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -10 & -18 & -20 \\ 9 & 13 & 15 \end{pmatrix}$.

4.16. Выяснить, можно ли матрицу A линейного оператора φ привести к диагональному виду путём перехода к новому базису, и если можно, то найти этот базис и соответствующую ему диагональную матрицу:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -12 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -10 & -18 & -20 \\ 9 & 13 & 15 \end{pmatrix}$;

ж) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; з) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответы

4.15. а) $\lambda_1 = 3$, $\alpha(1,-1)$, $\alpha \neq 0$; $\lambda_2 = 1$, $\beta(1,1)$, $\beta \neq 0$; б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\alpha(0,1)$, $\alpha \neq 0$; в) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\alpha(1,0,0), \alpha \neq 0, \beta \neq 0$, $\lambda_3 = -1$, $\gamma(0,-1,1)$, $\gamma \neq 0$; г) $\lambda_1 = 0$, $\alpha(1,0,0)$, $\lambda_3 = \lambda_2 = -1$, $\beta(0,1,0)$, $\beta \neq 0$; д) $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\alpha(2,0,1)$, $\alpha \neq 0$, $\lambda_3 = 2$,

$\beta(0,-1,1)$, $\beta \neq 0$. **4.16.** а) $(1,-1)$, $(1,1)$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; б) Матрица к диагональному виду не приводится. в) $(8,-1)$, $(0,1)$, $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; г) Матрица к диагональному виду не приводится. д) (–1, 3, 1), (–2, 4, 1), (1, –4, 2); $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; е) Матрица к диагональному виду не приводится. ж) (1, 1, –1), (2, 1, 0), (3, 0, 2), $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; з) Матрица к диагональному виду не приводится.

4.3. Квадратичные формы

Краткие теоретические сведения

Квадратичной формой от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется сумма, каждое слагаемое которой является или квадратом одной из переменных, или произведением двух разных переменных, взятых с некоторым числовым коэффициентом:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j ,$$

где a_{ij} – заданные коэффициенты (действительные числа); $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы*. Она *симметрическая*, т.е. $A^T = A$. Ранг r матрицы A называется *рангом* квадратичной формы. Если $r = n$, то квадратичная форма называется *невырожденной*.

В матричной записи квадратичная форма имеет вид:

$f(X) = X^T A X$, где $X^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Квадратичная форма называется *канонической* (или имеет *канонический вид*), если все коэффициенты при произведениях различных переменных равны нулю, т.е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Матрица канонической квадратичной формы *диагональная* (имеет диагональный вид). Если матрицы-столбцы $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и

$Y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)$ связаны линейным соотношением $X=BY$ с невырожденной матрицей B, то квадратичная форма $f\left(X\right)$ преобразуется в форму $f_1\left(Y\right)=Y^T\left(B^TAB\right)Y$.

Любая квадратичная форма может быть приведена некоторым невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду.

Каноническая квадратичная форма называется *нормальной* (имеет нормальный вид), если все её ненулевые коэффициенты равны либо 1, либо –1.

Закон инерции квадратичных форм. Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами квадратичной формы не зависят от способа приведения формы к этому виду.

Ниже на примерах будут даны различные способы приведения квадратичных форм к каноническому виду.

Квадратичная форма называется *положительно (отрицательно) определённой,* если все её значения при значениях переменных, не равных одновременно нулю, положительны (отрицательны)

Квадратичные формы, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, называются *неопределёнными.*

На практике используются следующие критерии:

1. Для того чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определённой, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения (характеристические числа) матрицы этой квадратичной формы были положительны (отрицательны).

2. Для того чтобы квадратичная форма f была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все главные угловые миноры матрицы A этой формы были положительны, т.е.

$$\Delta_1=a_{11}>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{21}\end{vmatrix}>0,\ldots,\quad \Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}>0.$$

Отметим, что для отрицательно определённых квадратичных форм знаки главных миноров чередуются, начиная со знака «минус» для минора

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Записать в матричном виде квадратичную форму $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+8x_2x_3$.

Решение. Запишем матрицу A квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 4\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=X^TAX=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 4\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Записать квадратичную форму в виде однородного многочлена второй степени, если известна матрица A этой формы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & -2\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

Решение. Воспользовавшись матричной записью квадратичной формы, и выполнив умножение соответствующих матриц, получим

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=X^TAX=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & -2\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=$$

$$=x_1^2+2x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3-4x_2x_3$$

Пример 3. Привести квадратичную форму $f\left(x_1,x_2\right)=2x_1x_2$ к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

Решение. Запишем матрицу A данной квадратичной формы: $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ и найдём собственные значения $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$ этой матрицы, решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Для нахождения собственных векторов матрицы A решим систему уравнений

$$\begin{cases}-\lambda x_1+\ x_2=0,\\ \ \ x_1-\lambda x_2=0\end{cases}$$

при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$; $\boldsymbol{a_1}=\left(1,-1\right)$, $\boldsymbol{a}_2=\left(1,1\right)$ – найденные собственные векторы. Так как эти векторы принадлежат различным собственным значениям, то они ортогональны. Нормируя их, находим ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, в котором матрица A имеет диагональный вид.

Составляем ортогональную матрицу T, столбами которой являются координаты векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

$$T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполняем ортогональное преобразование $X=TY$, приводящее квадратичную форму к каноническому виду:

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ -y_1+y_2 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\ y_1+y_2), \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y_1+y_2). \end{cases}$$

$f_1(y_1,y_2)=-y_1^2+y_2^2$ – каноническая форма.

Пример 4. Привести методом Лагранжа к каноническому виду квадратичную форму

$f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$.

Решение. Выделим полный квадрат для переменной x_1:

$$f(x_1,x_2)=\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2+x_2^2.$$

Невырожденное линейное преобразование $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_2$ приводит данную квадратичную форму к каноническому виду $f_1\left(y_1,y_2\right)=y_1^2+y_2^2$.

Пример 5. Привести методом Якоби к каноническому виду квадратичную форму

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2$.

Решение. Составим матрицу A данной квадратичной формы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем её угловые миноры $\Delta_1=2,\ \Delta_2=1,\ \Delta_3=5,$(все они отличны от нуля). Составим квадратичную форму: $f_1\left(y_1,y_2,y_3\right)=\Delta_1y_1^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2+\frac{\Delta_3}{\Delta_2}y_3^2$, таким образом, $2y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+5y_3^2$.

Линейное преобразование, приводящее данную квадратичную форму к канонической, имеют вид:

$x_1=y_1+\alpha_{21}y_2+\alpha_{31}y_3$, $x_2=y_2+\alpha_{32}y_3$, $x_3=y_3$.

где

$$a_{ji} = (-1)^{j+i} \frac{\Delta_{j-1\,i}}{\Delta_{j-1}}.$$

Следовательно,

$\alpha_{21} = -\frac{\Delta_{11}}{\Delta_1} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$, $\alpha_{31} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_2} = \frac{0}{1} = 0$, $\alpha_{32} = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = \frac{0}{1} = 0$, т.е.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{2} y_2 \quad , \\ x_2 = \quad y_2 \quad , \\ x_3 = \quad y_3. \end{cases}$$

$$f_1(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 + 5y_3^2.$$

Пример 6. Доказать, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ является положительно определённой.

Решение. Первый способ. Матрица A квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Так как главные миноры матрицы A: $\Delta_1 = 5$, $\Delta_2 = 11$, $\Delta_3 = \det A = 18$ положительны, то по критерию Сильвестра, данная квадратичная форма положительно определённая.

Второй способ. Для матрицы A данной квадратичной формы составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, приходим к уравнению $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 30\lambda - 18 = 0$; оно имеет только положительные корни, а квадратичная форма положительно определённая.

Задания для самостоятельной работы

4.17. Записать матрицы квадратичных форм:

а) $2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

б) $-x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3$.

4.18. Найти ранги квадратичных форм:

а) $x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2$;

б) $x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_1x_2$;

в) $3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

4.19. Записать квадратичные формы в матричном виде:

а) $x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$;

б) $x_1^2 - 2x_2^2$;

в) $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_2x_3$

г) $x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

4.20. Восстановить квадратичную форму по её матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.21. Преобразовать к каноническому виду ортогональным преобразованием квадратичные формы:

а) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$;

б) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

в) $x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3$.

4.22. Преобразовать квадратичные формы к каноническому виду методом Лагранжа и записать соответствующие преобразования:

а) $x_1^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

б) $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$.

4.23. Преобразовать квадратичные формы к каноническому виду методом Якоби и записать соответствующие преобразования:

а) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$;

б) $-x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3$.

4.24. Исследовать на знакоопределённость квадратичные формы:

а) $4x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$;

б) $-x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 \pm x_1x_3 + 2x_2x_3$;

в) $2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$.

Ответы

4.17. а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **4.18.** а) 2; б) 1; в) 2.

4.19. а) $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; б) $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; в) $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

г) $\left(x_1, x_2, x_3\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; д) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

4.21. а) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2; \end{cases}$ $f(y_1, y_2) = 3y_1^2 + y_2^2$; б) $\begin{cases} y_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \\ y_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3, \\ y_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3; \end{cases}$

$f(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$; в) $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{4}{\sqrt{5}}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{2}{3\sqrt{5}}y_3, \\ x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{5}{3\sqrt{5}}y_3; \end{cases}$ $f(y_1, y_2, y_3) = -9y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2$

.

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 8

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 21 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Выяснить, можно ли матрицу линейного оператора $\begin{pmatrix} -31 & 8 & 12 \\ -64 & 17 & 24 \\ -32 & 8 & 13 \end{pmatrix}$ привести к диагональному виду путём перехода к новому базису. Если да, то найти этот базис и соответствующую ему матрицу.

ГЛАВА 5. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

5.1. Функции

Краткие теоретические сведения

Пусть даны непустые множества X, Y и каждому элементу $x \in X$ по некоторому правилу f ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, обозначаемый $f(x)$. В этом случае говорят, что задана *функция*, или отображение f из множества X в множество Y и пишут $f: X \to Y$. При этом множество X называется *областью определения* функции f и обозначается через $D(f)$. Множество всех элементов $y = f(x)$ называется *областью значений* функции f и обозначается через $E(f)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если из того, что $x \in D(f)$ следует, что $-x \in D(f)$ и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ $f(-x) = -f(x)$, т.е. ее график симметричен относительно оси ординат.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если из того, что $x \in D(f)$ следует, что $-x \in D(f)$ и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, т.е. ее график симметричен относительно начала координат.

Функция $f(x)$ называется периодической, если для нее существует такое число $t \neq 0$, что для всех $x \in D(f)$ числа $x + t$ и $x - t$ также принадлежат $D(f)$ и выполняется равенство $f(x + t) = f(x)$. В этом случае число t называется периодом функции $f(x)$. Наименьшее положительное число T из всех таких чисел t (если оно существует) называется периодом функции $f(x)$.

График периодической функции получается последовательными сдвигами (в положительном и отрицательном направлениях) на период части ее графика, построенного для отрезка $[a; a + T]$ длины T.

Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция вида $y = af(kx + b)$ будет периодической с периодом $\dfrac{T}{|k|}$.

Степенная функция $y = x^a$ (где $a \in R$), показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$); логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$); тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ называются *основными элементарными* функциями.

Элементарной называется всякая функция, которая может быть получена из основных элементарных функций с помощью применения конечного числа арифметических операций и операции суперпозиции. Например, элементарной является функция $y = 2^{\operatorname{tg} x} + \arcsin(x^3) \cdot \log_5 x$.

В качестве примера *неэлементарной* функции приведем следующую функцию:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ 2^x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Преобразование графиков функций

Функция	**Преобразование, которое следует провести с графиком $y = f(x)$ на плоскости Oxy**
$f(x) + A,\ A \neq 0$	Сдвиг вверх по оси Oy графика функции $y = f(x)$ на A единиц, если $A > 0$, и сдвиг вниз на $\lvert A \rvert$ единиц, если $A < 0$
$f(x - a),\ a \neq 0$	Сдвиг вправо по оси Ox графика функции $y = f(x)$ на a единиц, если $a > 0$, и сдвиг влево на $\lvert a \rvert$ единиц, если $a < 0$
$kf(x),\ k > 0,\ k \neq 1$	Растяжение вдоль оси Oy относительно оси Ox в k раз, если $k > 1$, сжатие вдоль оси Oy в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$
$f(kx),\ k > 0,\ k \neq 1$	Сжатие вдоль оси Ox относительно оси Oy в k раз, если $k > 1$, Растяжение в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$
$-f(x)$	Симметричное отображение графика относительно оси Ox
$\lvert f(x) \rvert$	Часть графика, расположенная ниже оси Ox, симметрично отражается относительно этой оси, остальная часть остается без изменения
$f(-x)$	Симметричное отображение графика относительно оси Oy
$f(\lvert x \rvert)$	Стереть часть графика функции $y = f(x)$, лежащую слева от оси Oy; оставить часть графика $y = f(x)$, лежащую справа от оси Oy и на ней; часть графика функции $y = f(x)$, расположенную в области $x \geq 0$, симметрично отобразить относительно оси Oy в область $x < 0$

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти область определения функции $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+6x+9\right)+\sqrt{x^2-2x-8}$.

Решение. Область определения заданной функции состоит из тех и только тех значений x, при которых оба слагаемых принимают действительные значения. Для этого достаточно выполнение двух условий:

$$\begin{cases} x^2+6x+9>0, \\ x^2-2x-8\ge 0. \end{cases}$$

Решим эту систему неравенств:

$$\begin{cases} (x+3)^2>0, \\ (x+2)(x-4)\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ne -3, \\ x\le -2 \text{ или } x\ge 4. \end{cases}$$

Итак, $D(y)=(-\infty;-3)\cup(-3;-2]\cup[4;+\infty)$.

Пример 2. Найти множество значений функции:

а) $f(x)=x^2+4x+1$; б) $f(x)=3-5\cos x$.

Решение. а) Графиком функции $f(x)=x^2+4x+1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты вершины параболы $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2}=-2$, $y_0=f(x_0)=(-2)^2+4\cdot(-2)+1=-3$. Поэтому множество значений функции $E(f)=[-3;+\infty)$.

б) Так как $|\cos x|\le 1$, то $-1\le\cos x\le 1$. А далее последовательно получим $-5\le 5\cos x\le 5$, $5\ge -5\cos x\ge -5$ или $-5\le -5\cos x\le 5$, $-5+3\le 3-5\cos x\le 5+3$ или $-2\le 3-5\cos x\le 8$. Окончательно получим $E(f)=[-2;8]$.

Пример 3. Выяснить является ли функция четной или нечетной $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

Решение. а) Заметим, что если $x\in D(f)$, то $-x\in D(f)$. Найдем

$$f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x).$$

Так как $f(-x)=-f(x)$, то по определению данная функция является нечетной.

Пример 4. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее период, если он существует.

а) $f(x)=\cos 6x$; б) $f(x)=\sin^2 2x$.

Решение. а) Периодом функции $f(x)=\cos x$ является число 2π. Покажем, что период $f(x)=\cos 6x$ является число $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

Действительно, $\cos 6\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(6x+2\pi\right)=\cos 6x$, т.е. $T=\frac{\pi}{3}$ – период данной функции. С другой стороны, если $t>0$ – какой-либо другой период этой функции, то $\cos 6(x+t)=\cos 6x$ для всех x, т.е. $\cos(6x+6t)=\cos 6x$, $x\in\mathbb{R}$. Отсюда следует, что $6t$ – период функции $\cos u$, где $u=6x$, и, значит, $6t\geq 2\pi$, т.е. $t\geq\frac{\pi}{3}$.

Таким образом, $T=\frac{\pi}{3}$ – наименьший положительный период функции $f(x)=\cos 6x$.

б) Поскольку $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$, то период данной функции совпадает с периодом функции $\cos 4x$. Рассуждая как в пункте а, легко показать, что наименьший положительный период функции $\cos 4x$ равен $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, наименьший положительный период функции $f(x)=\sin^2 2x$ равен $\frac{\pi}{2}$.

Пример 5. Построить графики данных функций, исходя из основных элементарных функций:

а) $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=\frac{1}{6}\cdot 3^{|x-2|}$.

Решение. а) В качестве исходного возьмем график функции $y=\sin x$. Построение графика функции $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ разобьем на три этапа:

1. $y=\sin x$ – известная элементарная функция;

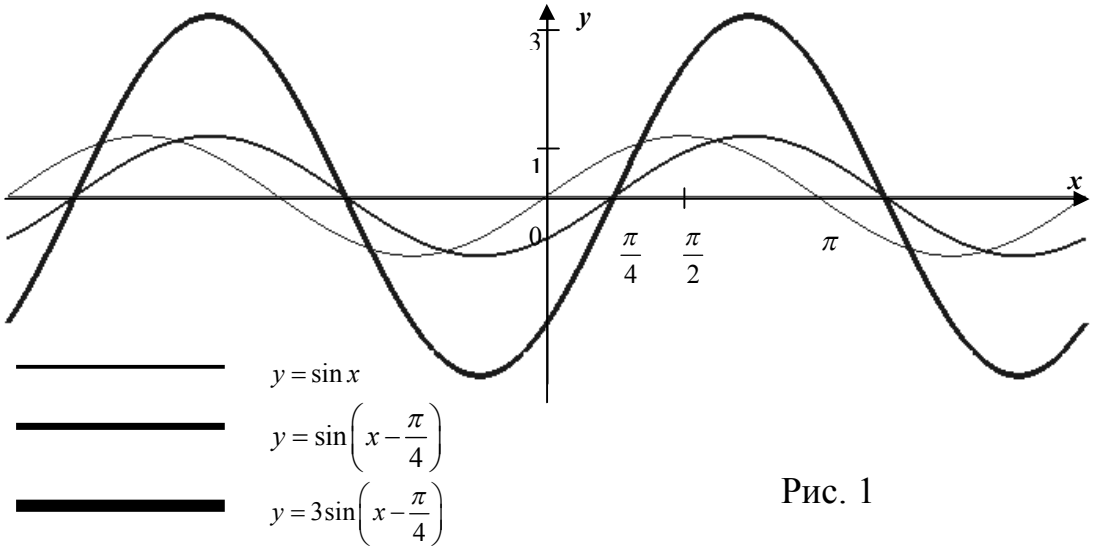


Рис. 1

2. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ – сдвигаем вправо по оси Ox график функции $y=\sin x$ на $\frac{\pi}{4}$ единиц;

3. $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ – растягиваем вдоль оси Oy относительно оси Ox в 3 раза.

На рисунке 1 изображены последовательные преобразования, приводящие к построению искомого графика.

б) В качестве исходного возьмем график функции $y=3^x$. Построение графика функции $y=\frac{1}{6}\cdot 3^{|x-2|}$ разобьем на 4 этапа:

1. $y=3^x$ – известная элементарная функция;

2. $y=3^{|x|}$ – стираем часть графика функции $y=3^x$, лежащую слева от оси Oy; оставляем часть графика $y=3^x$, лежащую справа от оси Oy; часть графика функции $y=3^x$, расположенную в области $x\geq 0$, симметрично отобразить относительно оси Oy в область $x<0$;

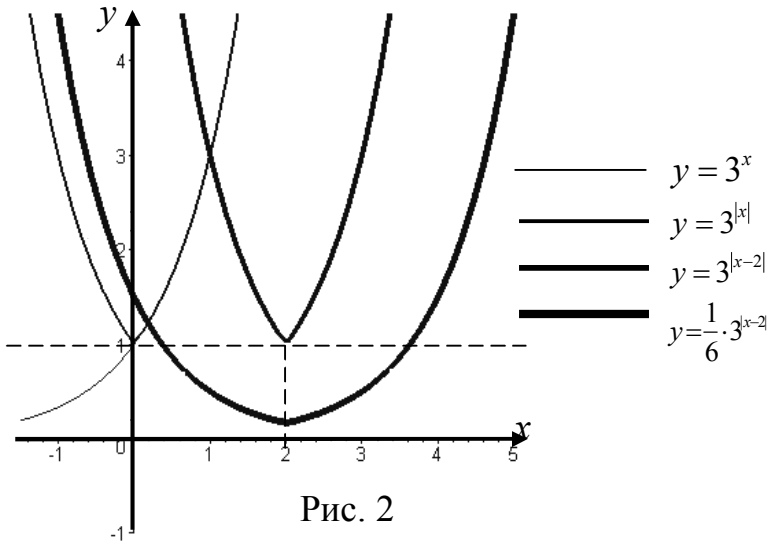


Рис. 2

3. $y=3^{|x-2|}$ – сдвигаем вправо по оси Ox график функции $y=3^{|x|}$ на 2 единицы;

4. $y=\frac{1}{6}\cdot 3^{|x-2|}$ –сжатие вдоль оси Oy в 6 раз.

На рисунке 2 изображены последовательные преобразования, приводящие к построению искомого графика.

Задания для самостоятельной работы

5.1. Найти область определения функции:

а) $y=\lg\frac{x+6}{x^2-4x+3}+\sqrt[5]{x^2-5x+6}$; б) $y=\lg\frac{x-5}{x^2-10x+24}-\sqrt[3]{x+5}$;

в) $y=\arccos\frac{1-2x}{3}+\lg(-x^2+3x)$; г) $y=\arcsin(1-x)+\ln(\lg x)$;

д) $y=\lg(25-x^2)+\sqrt{\sin x-0{,}5}$; е) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$;

ж) $y=\lg\left(x-2\right)+\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\operatorname{arctg} x}$; з) $y=\lg(x-1)+\arcsin\dfrac{x}{2}$.

5.2. Найти множество значений функции:

а) $f(x)=5\sin(2x+1)-4$; б) $f(x)=\dfrac{3+x}{1+x}$;

в) $f(x)=x^2-8x+20$; г) $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$;

д) $f(x)=\log_{0,5}(x-2)$; е) $f(x)=\left(\operatorname{arctg} x\right)/\pi$;

ж) $f(x)=5\sin x+2\cos x$; з) $f(x)=\dfrac{1}{4\sin 2x+3\cos 2x}$.

5.3. Выяснить является ли функция четной или нечетной:

а) $y=16x^2\left(x-1\right)^2$; б) $y=\ln\left(\cos x-\sin x\right)$;

в) $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}+x$; г) $y=2x-3\sqrt[3]{x}$;

д) $y=\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}$; е) $y=\dfrac{x^2\sin 3x}{x^6+1}$;

ж) $y=\cos\left(x^2+1\right)+x^2$; з) $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$.

5.4. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период:

а) $f(x)=4\sin\left(2x-1\right)-3$; б) $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}+1$;

в) $f(x)=\sin 2x+\cos 3x$; г) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}-\operatorname{tg} x$;

д) $f(x)=\sin 3x\cdot\cos 3x$; е) $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$;

ж) $f(x)=\cos^2 4x$; з) $f(x)=\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

5.5. Построить графики данных функций:

а) $f(x)=x^2-8x+20$; б) $f(x)=2-4x-x^2$;

в) $f(x)=\left|x+2\right|+\left|x-4\right|$; г) $f(x)=2\left|x-4\right|+5$;

д) $f(x)=\ln\left(2\left|x\right|-5\right)-3$; е) $f(x)=\left|\log_2\left(3-x\right)\right|$;

ж) $f(x)=\dfrac{x+8}{2x-1}$; з) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+8}$.

5.6. Построить графики данных функций:

а) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$;

в) $y = \left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$; г) $y = \operatorname{ctg}\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right)$;

д) $f(x) = [x]$; е) $f(x) = \{x\}$;

ж) $f(x) = \operatorname{sgn} x$; з) $f(x) = D(x)$.

Ответы

5.1. а) $(4;\ 5)\cup(6;\ +\infty)$; б) $(-6;\ 1)\cup(3;\ \infty)$; в) $(0;\ 2]$; г) $(1;\ 2]$; д) $\left(-5;-\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$; е) $[-4;\ -\pi]\cup[0;\ \pi]$; ж) функция не существует; з) $(1;\ 2]$. **5.2.** а) $[-9;\ 4]$; б) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; в) $[4;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ \frac{3}{4}]$; д) $(-\infty;\ +\infty)$; е) $(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$; ж) $(-\sqrt{29};\ \sqrt{29})$; з) $[-5;\ 5]$. **5.3.** а) функция общего вида; б) функция общего вида; в) нечетная; г) нечетная; д) нечетная; е) четная; ж) четная; з) функция общего вида. **5.4.** а) π; б) $\frac{\pi}{4}$; в) 2π; г) π; д) $\frac{\pi}{3}$; е) 2π; ж) $\frac{\pi}{4}$; з) 2π.

5.2. Предел функции

Краткие теоретические сведения

Предел функции в точке

Определение. Точка a называется *предельной* точкой области определения $D(f)$, если в любой ее окрестности содержится хотя бы одна точка из области определения, отличная от нее самой.

Пусть точка a является предельной точкой области определения, $a \in \mathbb{R}$.

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$ (или «при x, стремящемся к a»), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

выполняется для всех x, для которых $0 < |x - a| < \delta$.

Комментарий к определению. Любую близость $f(x)$ к A можно достичь, приближая x к a. Сложность формулировки определения вызвана необходимостью точно указать смысл выражений «значения аргумента x, близкие к a» и «значения функции $f(x)$ близки к A».

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x \to a}{\to} A$.

Пример 1. Если $y = x^2$, то $\lim\limits_{x \to -1} x^2 = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

Пример 2. Если $y=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}-1, x<0;\\ 1, x>0\end{cases}$, то $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x|}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x|}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ не существует

Пример 3. $y=\dfrac{x}{x}$. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$.

Запись определения предела с использованием символов математической логики выглядит так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D(f)\ \left[0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\right].$$

Определение предела можно переписать и в другом виде.

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D(f)\left[\left(x\neq a, a-\delta<x<a+\delta\right)\Rightarrow\right.$$
$$\left.\Rightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon\right].$$

Это определение также можно записать в окрестностной форме.

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D(f)\left[x\in \overset{o}{S}(a,\delta)\Rightarrow f(x)\in S(A,\varepsilon)\right].$$

Бесконечные пределы функции

Определение. Говорят, что предел функция $f(x)$ равен $+\infty$ при $x\to a$, если для любого $K\in\mathbb{R}$ найдется $\delta>0$ такое, что для $x\in D(f)$ из неравенства $0<|x-a|<\delta$ следует неравенство $f(x)>K$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Определение. Говорят, что предел функция $f(x)$ равен $-\infty$ при $x\to a$, если для любого $K\in\mathbb{R}$ найдется $\delta>0$ такое, что из неравенств $0<|x-a|<\delta$ следует неравенство $f(x)<K$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Замечание. Если $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$, то используют обозначение $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Пределы функций на бесконечности

Определение. Число A называют пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ будет существовать $K\in\mathbb{R}$ такое, что для $x\in D(f)$ из неравенства $x>K$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

Определение. Число A называют пределом функции $f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ будет существовать $K \in \mathbb{R}$ такое, что из неравенства $x < -K$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Замечание. Если $A \in \mathbb{R}$, говорят, что $f(x)$ имеет в точке *конечный* предел. В случае, когда $A = \pm\infty$, предел называется *бесконечным*.

Пример. Функция $y = e^{-x}$ имеет предел при $x \to +\infty$, а именно, $e^{-x} \to 0$ при $x \to +\infty$. Покажем это. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно. Необходимо доказать существование числа $K > 0$ такого, что $|e^{-x}| < \varepsilon$ при $x > K$. Решая неравенство $|e^{-x}| < \varepsilon$, получим $x > \ln\dfrac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, в качестве искомого числа K можно взять $K = \ln\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Свойства функций, имеющих пределы

Теорема 1. (единственность предела). Если функция $f(x)$ имеет предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ $(a \in \widehat{\mathbb{R}}, A \in \widehat{\mathbb{R}})$, то это предел единственный.

Теорема 2. (необходимое условие существования предела). Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to a$, то она ограничена в некоторой окрестности точки a.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to a$ равный A и $A > C$, то существует проколотая окрестность точки a такая, что для любого x из этой окрестности будет выполняться неравенство $f(x) > C$.

Теорема 4. Пусть в некоторой окрестности $\overset{\circ}{S}(a)$ имеет место неравенство $f(x) \le g(x)$. Тогда если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) \le \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Теорема 5. («о двух милиционерах») Пусть в некоторой окрестности $\overset{o}{S}(a)$ для функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ имеют место неравенства $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, то существует предел $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.

Теорема 6. (об арифметических операциях с пределами функций). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$, то справедливы равенства

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),\ \lim_{x \to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

а если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, то и равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Теорема 7. (о замене переменной в пределах). Пусть выполнены три условия:

1) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{t\to b} g(t)=c$;

3) существует такая проколотая окрестность $\overset{o}{S}(a)$, что для любого $x\in\overset{o}{S}(a)$ выполнено условие $f(x)\neq b$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\lim\limits_{t\to b} g(t)=c.$

Теорема 8. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)>0$, то существует предел $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\big)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Замечательные пределы

Рассмотрим несколько пределов, которые носят такое название, поскольку они широко используются при решении как теоретических, так и практических задач.

а) Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

б) Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

здесь символом «e» обозначено иррациональное число $2,71828...$

Равенство $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ также называют вторым замечательным пределом.

Рассмотрим **пример Я.И. Перельмана**, дающий интерпретацию числа e в задаче о сложных процентах. Число e есть предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. В сбербанках процентные деньги присоединяются к основному капиталу ежегодно. Если присоединение совершается чаще, то капитал растет быстрее, так как в образовании процентов участвует большая сумма. Возьмем чисто теоретический, весьма упрощенный пример.

Пусть в банк положено 100 ден. ед. из расчета 100 % годовых. Если процентные деньги будут присоединены к основному капиталу лишь по истечении года, то к этому сроку 100 ден. ед. превратятся в 200 ден.ед. Посмотрим теперь, во что превратятся 100 ден. ед., если процентные деньги присоединять к основному капиталу каждые полгода. По истечении полугодия 100 ден. ед. вырастут в $100 \cdot 1{,}5 = 150$, а еще через полгода – в $150 \cdot 1{,}5 = 225$ (ден. ед.). Если присоединение делать каждые $1/3$ года, то по истечении года 100 ден. ед. превратятся в $100 \cdot \left(1 + 1/3\right)^3 \approx 237$ (ден. ед.). Будем учащать сроки присоединения процентных денег до 0,1 года, до 0,01 года, до 0,001 года и т.д. Тогда из 100 ден. ед. спустя год получится:

$$100 \cdot \left(1 + 1/10\right)^{10} \approx 259 \text{ (ден. ед.)},$$

$$100 \cdot \left(1 + 1/100\right)^{100} \approx 270 \text{ (ден. ед.)},$$

$$100 \cdot \left(1 + 1/1000\right)^{1000} \approx 271 \text{ (ден. ед.)}.$$

При безграничном сокращении сроков присоединения процентов наращенный капитал не растет беспредельно, а приближается к некоторому пределу, равному приблизительно 271. Более чем в 2,71 раз капитал, положенный под 100 % годовых, увеличиться не может, даже если бы нарос-шие проценты присоединялись к капиталу каждую секунду, потому что

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

К замечательным пределам относят равенства

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$, в частности, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$,

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a \ \ (a > 0)$, в частности, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$,

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$.

Односторонние пределы

Понятие предела функции в точке можно разложить на две составляющие части: предел функции $f(x)$, когда $x \to a$, оставаясь меньше a, т.е. $x \to a$ слева, и предел функции $f(x)$, когда $x \to a$, оставаясь больше a, т.е. $x \to a$ справа. В этом случае говорят об односторонних пределах, обозначая их $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$ (для левостороннего предела) и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$ (для правостороннего предела).

Определение. Пусть точка a является предельной точкой для множества $D = D(f) \bigcap (-\infty; a)$. Тогда число b называется *пределом слева* функции $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D(f) \left[a - \delta < x < a \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon \right].$$

Определение. Пусть точка a является предельной точкой для множества $D = D(f) \bigcap (a; +\infty)$. Тогда число b называется *пределом справа* функции $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D(f) \left[a < x < a + \delta \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon \right].$$

Сравнение этих определений и определения предела функции в точке a показывает, что если функция имеет предел в точке a, то этот предел одновременно является ее левосторонним и правосторонним пределами в этой точке.

Связь между пределом и односторонними пределами функции устанавливает следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы существовал $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$, и $f(a-0) = f(a+0)$. В этом случае общее значение односторонних пределов равно значению предела функции: $f(a-0) = f(a+0) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Доказать $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$.

*Решение***:** Рассмотрим величину:

$$\left| \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} + 7 \right| = \left| \frac{2x^2 + 5x - 3 + 7x + 21}{x + 3} \right| = \left| \frac{2x^2 + 12x + 18}{x + 3} \right| = 2 \left| \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} \right| =$$

$$= 2|x + 3|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, выберем $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$; тогда если $|x + 3| < \delta(\varepsilon)$, то $2|x + 3| < \varepsilon$, следовательно, $\left| \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} + 7 \right| = 2|x + 3| < \varepsilon$.

Таким образом, по определению, $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to -2} \left(5x^2 - 3x + 2 \right)$.

Решение. Используя свойства пределов функций, получим:

$$\lim_{x \to -2} \left(5x^2 - 3x + 2 \right) = \lim_{x \to -2} 5x^2 - \lim_{x \to -2} 3x + \lim_{x \to -2} 2 = 5 \lim_{x \to -2} x^2 - 3 \lim_{x \to -2} x + \lim_{x \to -2} 2 =$$

$$= 5\left(\lim_{x\to -2} x\right)^2 - 3\lim_{x\to -2} x + \lim_{x\to -2} 2 = 5\cdot(-2)^2 - 3\cdot(-2) + 2 = 20 + 6 + 2 = 28.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-3} + \sqrt[3]{x^2+60}}{2x^2-5x+4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-3} + \sqrt[3]{x^2+60}}{2x^2-5x+4} = \frac{\sqrt{2^2-3} + \sqrt[3]{2^2+60}}{2\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 4} = \frac{1+4}{8-10+4} = \frac{5}{2}.$$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, заданную отношением двух многочленов, надо в числителе и в знаменателе выделить множитель, равный нулю при предельном значении x, и сократить на него.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}$.

Решение. Подставляя предельное значение $x = -4$ в числитель и знаменатель, получаем, что оба выражения обращаются при этом в нуль. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Стоящие в числителе и знаменателе многочлены можно разложить на множители. Следует помнить, что если x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то справедлива формула

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Таким образом, имеем:

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x^2+3x-4} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to -4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x+4)(x-1)} = \lim_{x\to -4} \frac{x-4}{x-1} = \frac{-4-4}{-4-1} = \frac{8}{5}.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x^3+x^2-6x}$.

Решение. Имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Так как $x = 2$ является корнем многочленов из числителя и знаменателя, то $(x-2)$ выделяется как сомножитель в числителе и знаменателе.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x-2}{x^3+x^2-6x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{(x-2)(x^2+3x)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x} = \frac{4+4+1}{4+6} = \frac{9}{10}.$$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, в которой числитель или знаменатель содержит иррациональность, следует соответствующим образом избавиться от нее (например, умножить на сопряженное выражение или ввести новую переменную).

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x^3+8}$.

Решение. Подставляя предельное значение $x=-2$ в числитель и знаменатель, получаем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Знаменатель представляет собой «сумму кубов», поэтому при разложении его на множители получаем: $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$. После умножения числителя и знаменателя на сопряженное числителю выражение $\sqrt{6+x}+2$, имеем:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{6+x}-2}{x^3+8}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{6+x}-2)(\sqrt{6+x}+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)(\sqrt{6+x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{6+x-4}{(x+2)(x^2-2x+4)(\sqrt{6+x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt{6+x}+2)}=\frac{1}{(4+4+4)(\sqrt{6-2}+2)}=\frac{1}{48}.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(x+1)^2}-1}{x}$.

Решение. Имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Произведем замену $x+1=y^5$, $x=y^5-1$. Тогда при $x\to 0$ имеем $y\to 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(x+1)^2}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2-1}{y^5-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y+1)}{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{y+1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{2}{5}.$$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, заданную отношением двух многочленов, можно числитель и знаменатель разделить на самую высокую степень x, а затем перейти к пределу.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия можно либо разделить числитель и знаменатель на наибольшую степень переменной *x* и, учитывая, что величина обратная бесконечно большой величине есть бесконечно малая величина, раскрыть исходную неопределенность, либо вынести переменную в наибольшей степени в числителе и знаменателе дроби и сократить на наибольшую степень.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^4}}{6+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}}=\frac{7}{6}.$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Раскрываем ее аналогично тому, как это сделано в примере 8.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x-3}{2x^3+4x+3}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{10}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}\overset{\left[\frac{0}{2}\right]}{=}0.$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Раскрываем ее аналогично тому, как это сделано в примере 8:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}}{\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}+\frac{2}{x^5}}\overset{\left[\frac{2}{0}\right]}{=}\infty.$$

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^{x+1}-3^x}{5^x+4^{x+1}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Избавимся от нее следующим образом: разделим числитель и знаменатель на степень с наивысшим основанием, т.е. на 5^x. Затем воспользуемся равенством $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=0,$ если $0<a<1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^{x+1}-3^x}{5^x+4^{x+1}}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{5-\left(\frac{3}{5}\right)^x}{1+4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x}=\frac{5-0}{1+4\cdot 0}=5.$$

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}+2}$.

Решение. Очевидно, что при $x \to \infty$ $\left(\sqrt{x^4+1}+2\right) \to \infty$ и $\left(x^2-3x-4\right) \to \infty$. Поэтому имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Далее получаем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}+2} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+\frac{2}{x^2}} = 1.$$

Неопределенности вида $[\infty-\infty]$ возникают, как правило, либо при исследовании разности двух дробей (в этом случае рекомендуется приводить дроби к общему знаменателю), либо при рассмотрении разности иррациональных выражений (для избавления от иррациональностей следует преобразовать исходное выражение либо к разности квадратов, либо к сумме или разности кубов).

Пример 13. Вычислить $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность $[\infty-\infty]$. Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to-1}\frac{x-1-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-1} \overset{\left[\frac{-3}{0}\right]}{=} \infty.$$

Пример 14. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

Решение. В данном случае, чтобы раскрыть неопределенность $[\infty-\infty]$**,** необходимо умножить и разделить рассматриваемое выражение на сопряженное, чтобы прийти к разности квадратов. Для $a \pm b$ таким сопряженным является $a \mp b$. Таким образом, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}.$$

Таким образом, мы попали в ситуацию, разобранную при решении примера 12. Проведем соответствующие преобразования в знаменателе:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

При вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции, полезно использовать «первый замечательный предел» $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Пример 15. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$.

Решение. Очевидно, что при $x\to 0$, $4x\to 0$ и $\sin 4x\to 0$. Чтобы применить первый замечательный предел, необходимо получить в знаменателе выражение, совпадающие с аргументом синуса. Для этого числитель и знаменатель умножаем на число 4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4.$$

Пример 16. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(3x-6)}{x^2-4}$.

Решение. Знаменатель разложим на множители как разность квадратов, а в числителе воспользуемся формулой $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}(3x-6)}{x^2-4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 2}\frac{3\sin(3x-6)}{3(x-2)(x+2)\cos(3x-6)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\sin(3x-6)}{(3x-6)(x+2)\cos(3x-6)}=\frac{3}{4}.$$

Пример 17. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

Решение. В данном случае, чтобы раскрыть неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, можно воспользоваться формулой $1-\cos\alpha x=2\sin^2\dfrac{\alpha x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{x}\right)^2=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{3}{2}\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3}{2}x}\right)^2=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3}{2}x}\right)^2=2\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}.$$

В примерах с неопределенностью $\left[1^{\infty}\right]$ выражение, стоящее под знаком предела представляет собой показательно-степенную функцию. Неоп-

ределенность устраняется при помощи выделения «второго замечательного предела» $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Пример 18. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=e^{-15/2}.$$

Пример 19. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+4)-\ln 4}{3x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, преобразуем ее к неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$. Пользуясь свойствами логарифмов: $n\log_a b=\log_a b^n$ и $\log_a b-\log_a c=\log_a\frac{b}{c}$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+4)-\ln 4}{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3x}\cdot\ln\frac{x+4}{4}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+4}{4}\right)^{\frac{1}{3x}}.$$

Далее

$$\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{4}\right)^{\frac{1}{3x}}=\ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}}\right]^{\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{3x}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{3x}}=\ln e^{\frac{1}{12}}=\frac{1}{12}.$$

Пример 20. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1-7x}$.

Решение. В данном примере при выяснении вида неопределенности видим, что таковой не имеется. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+3}{2x-5}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+3/x}{2-5/x}=\frac{4}{2}=2$, тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1-7x}=2^{\lim\limits_{x\to\infty}(1-7x)}=2^{-\infty}=0$.

Пример 21. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -3}(10+3x)^{\frac{5}{x+3}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$:

$$\lim_{x\to -3}\left[\left(1+3(3+x)\right)^{\frac{1}{3(3+x)}}\right]^{\frac{3(3+x)}{1}\cdot\frac{5}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to -3}\frac{3(3+x)}{1}\cdot\frac{5}{x+3}}=e^{15}.$$

Пример 22. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x^2}-1}{\ln\left(1+3x^2\right)}$.

Решение. Выделим в числителе, выражение вида $\dfrac{a^y-1}{y}$, а в знаменателе – $\dfrac{\ln(1+t)}{t}$. Затем воспользуемся следующим равенствами $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{a^y-1}{y}=\ln a$ и $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^{2x^2}-1}{\ln\left(1+3x^2\right)}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{7^{2x^2}-1}{2x^2}\cdot 2x^2}{\dfrac{\ln\left(1+3x^2\right)}{3x^2}\cdot 3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\cdot\ln 7}{1\cdot 3x^2}=\frac{2\ln 7}{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

5.7. Доказать равенство:

а) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}=-13$;

б) $\lim\limits_{x\to 5/2}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}=\dfrac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}=-7$;

г) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{6x^2-x-1}{x-1/2}=5$;

д) $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{9x^2-1}{x+1/3}=-6$;

е) $\lim\limits_{x\to 5/2}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}=\dfrac{1}{2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2+x-1}{x-1/3}=5$;

з) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x-5}=26$.

5.8. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^2-5x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-x+20}$;

д) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2+2x-4}{x^3-64}$;

е) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-2x+4}{x^2-2x}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x+2}$;

з) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x+2}-5}{\ln(3+x)}$.

5.9. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2+x-10}{x^2-5x+6}$;

б) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^2-13x+20}{x^2-2x-8}$;

г) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2+2x-8}{2x^2+7x-4}$;

д) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$;

е) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$;

ж) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+10x+21}{2x^2+5x-3}$;

з) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-x-1}$.

5.10. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$;

б) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$;

г) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$;

д) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$;

е) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$;

з) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

5.11. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}$;

г) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

д) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

е) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{1+6x}-5}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

з) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x+13}-3\sqrt{5-x}}{x^3+64}$.

5.12. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2-\sqrt[3]{10-x}}{x-2}$;

б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

г) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{2x+9}-5}{2-\sqrt[3]{x}}$;

д) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

е) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$;

ж) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-5x-6}{\sqrt[3]{x}+1}$;

з) $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{\sqrt[3]{x+5}+1}{x^2-36}$.

5.13. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3+x-5x^4}{x^4+12x-3}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3+1}{2x^3-4x+2}$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2-2x+5}{4x^4+3x^3+2x^2}$;

д) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x-2}{5x^3+2x^2-3}$;

е) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2-3x^4+2}{5x^5+3}$;

ж) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^4-2x+1}{3-2x^2+x^3}$;

з) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+4x-5}{-2x+1}$.

5.14. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6^{x+3}-2^x}{6^x+3^{x+2}}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^{x+3}-3^x}{4^x+2^{x+2}}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^{x-2}-4^x}{3^{x-3}+4^{x-3}}$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^{x+1}-4^{x+4}}{3^{x+2}+4^{x+1}}$;

д) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}-\sqrt[5]{x}}{4x+7}$;

е) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[4]{x^8-2}-x}$;

ж) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^8+6}-\sqrt{x-6}}{3\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{2x^6+1}}$;

з) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{5x+2}-\sqrt[5]{x^5-3}}{\sqrt[3]{3x^3+1}+\sqrt[4]{x^3-4}}$.

5.15. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1} \right)$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x^2-4} \right)$;

в) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{4}{x^3+8} \right)$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{2x^2-x} - \dfrac{2}{x^2-x} \right)$;

д) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^3}{2x^2-x} - x \right)$;

е) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^4}{x^2-2x} - 2x^2 \right)$;

ж) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \dfrac{3x^3}{3x^2+7} \right)$;

з) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x^2-x} - \dfrac{3}{x^3-1} \right)$.

5.16. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x(x-2)} - x \right)$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x(x-1)} \right)$;

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(9x - \sqrt{81x^2+1} \right)$;

г) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2-x} \right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+x}\right)$.

5.17. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{6x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{6x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{1-\cos 5x}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\cdot\operatorname{tg}12x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{4x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{5x^4}$.

5.18. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x}{\arcsin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{\sin(1-x)}$; е) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4-x^2}{\sin(x+2)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{14x}{\operatorname{arctg}2x}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x}{\operatorname{arctg}x}$.

5.19. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x-3}\right)^{4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x-2}\right)^{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{2x-3}\right)^{2x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{3x-1}\right)^{4x+7}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{2x-3}\right)^{4x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+6}{x^2+5x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+3}{x^2-x-8}\right)^{3x^2-1}$.

5.20. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\ln\left(2+x^2\right)-2\ln x\right]$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+2\right)\left[2\ln x-\ln(x^2+3)\right]$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}2x^2\left[\ln(3x^2+5)-\ln(3x^2+4)\right]$;

д) $\lim\limits_{x\to-\infty}10x\left[\ln(1-2x)-\ln(5-2x)\right]$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}(4x+3)\left[\ln(3x+2)-\ln 3x\right]$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2\left[\ln(3x^2+5)-\ln(3x^2+4)\right]$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)\left[\ln(x-4)-\ln x\right]$.

5.21. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{1}{4-x^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5}{x^3-8}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2}{x-2}}$; е) $\lim\limits_{x\to -2}(3+x)^{\frac{3}{x^2-4}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{\frac{1}{x^3+1}}$; з) $\lim\limits_{x\to -2}(7+3x)^{\frac{x}{x^2+3x+2}}$.

5.22. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{5^{-x}-3^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\ln(1+5x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1);$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\ln(1+8x)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{\ln^2(1+3x)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\sin x}{x^3}\right)$.

5.23. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\cos x+1)}{(2x-\pi)^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x^2-4}-1}{\operatorname{tg}\ln\frac{x}{2}}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\cos 2x}{\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^2}$

ж) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^3-6x-8)}$; з) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$.

Ответы

5.8. а) $\frac{5}{7}$; б) –5; в) 0; г) 0; д) ∞; е) ∞; ж) 0; з) ∞. **5.9**. а) 0; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{11}{5}$; е) $\frac{6}{5}$; ж) $-\frac{4}{7}$; з) $-\frac{4}{3}$. **5.10.** а) –1; б) $\frac{1}{3}$; в) 0; г) 0; д) ∞; е) 0; ж) 9; з) $\frac{3}{2}$. **5.11.** а) 1; б) 0; в) –6; г) $\frac{\sqrt{5}}{20}$; д) $\frac{4}{3}$; е) $-\frac{5}{12}$; ж) $-\frac{1}{16}$; з) ∞. **5.12**. а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{1}{9}$; в) 0; г) $-\frac{12}{5}$; д) $\frac{12}{5}$; е) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; ж)0; з) ∞. **5.13.** а) $\frac{3}{2}$; б) 5; в) $\frac{3}{2}$; г) 0; д) 0; е) 0; ж) ∞; з) ∞. **5.14.** а) 216; б) 0; в) –64; г)–64; д) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; е) 1; ж) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; з) $-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$. **5.15.** а) $\frac{1}{2}$; б) ∞; в) ∞; ; г) ∞; д) $\frac{1}{2}$; е) ∞; ж) 0; з) 0. **5.16.** а) –1; б)$\frac{1}{2}$; в) 0; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{3}{2}$; е) 2; ж) 0; з) 0. **5.17**. а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{4}{3}$; г) 1; д) $\frac{4}{25}$; е) $\frac{25}{24}$; ж) $\frac{1}{2}$; з) $-\frac{1}{5}$. **5.18**. а) $\frac{7}{3}$; б) 2; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{2}{\pi}$; д) –3; е) 4; ж) 7; з) 6. **5.19**. а) e^2; б) e^{-1}; в) e^{-7}; г) $e^{\frac{32}{5}}$; д) e^{20}; е) e^5; ж) e^{-4}; з) e^{33}. **5.20.** а) 2; б) 2; в) ∞; г) $\frac{2}{3}$; д) 20; е) $\frac{8}{3}$; ж) $\frac{2}{3}$; з) –12. **5.21**. а) e^2; б) e^{-4}; в) $\sqrt{e}$; г) $e^{-\frac{5}{12}}$; д) e^6; е) ∞; ж) $e^{\frac{5}{3}}$; з) e^6. **5.22**. а) $\frac{2}{\ln\frac{5}{3}}$; б) $\frac{2}{5}$; д) $\frac{3}{8}$; е) 1; ж) –0,2; з) $\frac{1}{6}$. **5.23**. а) –2ln2; б) $-\frac{1}{8}$; в) $-\frac{2}{\pi}$; г) ∞; д) 8ln2; е) $-2\pi^2$; ж) $\frac{\pi \ln 2}{-21}$; з) $\frac{1}{\pi^2 e}$.

5.3. Бесконечно малые функции

Краткие теоретические сведения

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$ ($a \in \widehat{\mathbb{R}}$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Основные свойства бесконечно малых функций:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow$ функция $\left(f(x) - A\right)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

2. Сумма, разность и произведение двух бесконечно малых функций при $x \to a$ являются бесконечно малыми при $x \to a$.

3. Если функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$, а функция $g(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a, то произведение $f(x)g(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

Определение. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две бесконечно малые функции при $x \to a$ и $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности $\overset{\circ}{S}(a)$ и существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Тогда:

1. если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$ при $x \to a$, и пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ (читается: $f(x)$ равна «о» малое от $g(x)$);

2. если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, то $g(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка, чем $f(x)$ при $x\to a$, и пишут $g(x)=o(f(x))$ при $x\to a$ (читается: $g(x)$ равна «о» малое от $f(x)$);

3. если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C$ $(C\in\mathbb{R}, C\neq 0)$, то $f(x)$ и $g(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка при $x\to a$ и пишут $f(x)=O(g(x))$ при $x\to a$. В частности, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то $f(x)$ и $g(x)$ называют эквивалентными бесконечно малыми при $x\to a$ и пишут $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$.

Основные эквивалентности при $t\to 0$

$\sin t\sim t$	$\arcsin t\sim t$
$\ln(1+t)\sim t$	$a^t-1\sim t\ln a$
$(1-\cos t)\sim\dfrac{t^2}{2}$	$\left(\sqrt[n]{1+t}-1\right)\sim\dfrac{t}{n}$

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Сравнить бесконечно малые функции $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}x}$ и $g(x)=x$ при $x\to 0$**.**

Решение. Для того, чтобы сравнить бесконечно малые функции, необходимо найти предел их отношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\dfrac{\sin x}{\cos x}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$$

.

Итак, $g(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $f(x)$, $g(x)=o(f(x))$ при $x\to 0$.

Пример 2. Найти предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия воспользуемся теоремой о замене бесконечно малых функций эквивалентными им бесконечно малыми. Так как $\arcsin 8x\sim 8x$ и $\ln(1+4x)\sim 4x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{8x}{4x}=\lim_{x\to 0}2=2.$$

Задания для самостоятельной работы

5.24. Сравнить бесконечно малые функции:

а) $f(x)=\sin 3x+\sin x$ и $\varphi(x)=5x^2$ при $x\to 0$;

б) $f(x)=1-\cos 6x$ и $\varphi(x)=x\sin 3x$ при $x\to 0$;

в) $f(x)=\sqrt{1+x}-1$ и $\varphi(x)=4x$ при $x\to 0$;

г) $f(x)=\dfrac{3x}{2-x}$ и $\varphi(x)=\dfrac{x}{7+x}$ при $x\to 0$;

д) $f(x)=x^4-x^2$ и $\varphi(x)=2\sin^3(x-1)$ при $x\to 1$;

е) $f(x)=\operatorname{tg}^2(x^2-3x)$ и $\varphi(x)=x^2-3x$ при $x\to 3$;

ж) $f(x)=\operatorname{tg}(x^2-2x)$ и $\varphi(x)=x^4-8x$ при $x\to 0$;

з) $f(x)=\sqrt{9+x}-3$ и $\varphi(x)=4x$ при $x\to 0$.

5.25. Вычислить пределы, используя принцип замены эквивалентных бесконечно малых функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{(\cos 3x-\cos x)x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^4)}{\sqrt[5]{1-3x^4}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}2x$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x^2}{\operatorname{tg}^2 5x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

5.26. Вычислить пределы, используя принцип замены эквивалентных бесконечно малых функций:

а) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$;

б) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sqrt[5]{5-x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{8x}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{5x}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{1}{3x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$;

з) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\left(x^3-\pi^3\right)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$.

Ответы

5.24. а) $f(x)=o(\varphi(x))$; б) $f(x)=o(\varphi(x))$; в) $f(x)=O(\varphi(x))$; г) $f(x)=O(\varphi(x))$; д) $f(x)=o(\varphi(x))$; е) $f(x)=O(\varphi(x))$; ж) $f(x)=O(\varphi(x))$; з) $f(x)=O(\varphi(x))$. **5.25**.а) $\frac{7}{2}$; б) –2; в) $\frac{5}{3}$; г) $-\frac{3}{8}$; д) 2; е) –2; ж) $\frac{4}{25}$; з) $\frac{7}{\pi}$. **5.26**. а) -2π; б) $\frac{1}{8}$; в) –16; г) $-\frac{4}{27\ln 3}$; д) $\frac{1}{8}$; е) $\frac{3}{5}$; ж) $\frac{1}{4}$; з) $-15\pi^2$.

5.4. Непрерывность функции

Краткие теоретические сведения

Определение непрерывной функции в точке

Значение функции и предел функции в точке – это разные математические понятия, существующие независимо друг от друга. В случае, когда значение функции в точке $f(a)$ равно пределу функции в точке $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, говорят о «непрерывности функции $f(x)$ в точке a».

Определение. Функцию $f(x)$ называют *непрерывной* в точке $a\in D(f)$ в двух случаях:

1) если a – изолированная точка $D(f)$, т.е. существует окрестность этой точки, которая не содержит точки из области определения;

2) если a — предельная точка для $D(f)$ и при этом имеет место равенство: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

На языке «$\varepsilon-\delta$» это определение выглядит так: функцию $f(x)$ называют непрерывной в точке $a\in D(f)$, если для каждого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента $x\in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Это определение непрерывности легко переводится на «язык окрестностей». Функция $f(x)$ непрерывна в точке $a\in D(f)$, если

$$\forall u(f(a),\varepsilon)\ \exists u(a,\delta)\ \forall x\in D(f)\ \left[x\in u(a,\delta)\Rightarrow f(x)\in u(f(a),\varepsilon)\right].$$

Односторонняя непрерывность

Сформулируем теперь определение односторонней непрерывности функции $f(x)$ в точке a, т.е. непрерывности функции $f(x)$ в точке a либо только справа, либо только слева.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a справа* (*слева*), если правосторонний (левосторонний) предел этой функции в точке a существует и равен значению $f(a)$ функции $f(x)$ в точке a.

То же определение на «$\varepsilon-\delta$ языке»:

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a *справа* (*слева*), если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$, справедливо неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на интервале $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке $(a;b)$ и в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

Точки разрыва функции

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{S}(a)$. Если функция не является непрерывной в точке a, то точку a называют *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Пусть точка a является точкой разрыва функции $f(x)$. Принята следующая классификация точек разрыва.

1 Точка a является *точкой разрыва I рода*, если существуют конечные пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$. Если при этом окажется, что они равны, то точка a называется точкой устранимого разрыва.

2 Точка a является *точкой разрыва II рода*, если хотя бы один из односторонних пределов $f(a-0)$ или $f(a+0)$ не существует или равен бесконечности.

Свойства непрерывных функций

Теорема 1. (об арифметических операциях с непрерывными функциями). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то этим же свойством обладают функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (последняя при условии, что $g(a) \neq 0$).

Теорема 2. (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $x = g(t)$ непрерывна в точке $t = b$, а $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, причем $a = g(b)$. Тогда сложная функция $F(t) = f(g(t))$ непрерывна в точке $t = b$.

Теорема 3. Основные элементарные и элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены.

Символом $C[a;b]$ обозначают множество непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций. Таким образом, запись $f(x) \in C[a;b]$ будет означать, что функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Теорема 4. (первая теорема Вейерштрасса). Если $f(x) \in C[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е.

$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in [a,b]\big[|\, f(x)| \le M\big]$.

Ясно, что обратное утверждение не имеет места, так как функция $\operatorname{sgn} x$ ограничена на $[-1;2]$ $(\forall\, x \in [-1;2]\ \ |\operatorname{sgn} x| \le 1)$, однако не является непрерывной на этом отрезке (разрыв I рода в точке $x = 0$).

В том случае, когда $f(x) \in C(a;b)$, она может быть и неограниченной. Действительно, $f(x) = \operatorname{tg} x$ непрерывна на $(-\pi/2;\pi/2)$, но является неограниченной на этом промежутке.

Если функция не является непрерывной на $[a;b]$, то ограниченности на этом отрезке может и не быть. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

определена на отрезке $[0;1]$, однако не является ограниченной на нем.

Теорема 5. Если функция $f(x) \in C[a;b]$ и $f(a) \ne f(b)$, то $f(x)$ принимает на $\big[a;b\big]$ любое значение μ, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$, т.е. существует такое $c \in \big[a;b\big]$, что $f(c) = \mu$

Теорема 6. (вторая теорема Вейерштрасса). Если $f(x) \in C[a;b]$, то $f(x)$ достигает на $\big[a;b\big]$ наименьшего m и наибольшего M значений.

Теорема 7. (Больцано – Коши). Пусть $f \in C[a,b]$, причем $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда существует точка $x_0 \in (a,b)$ такая, что $f(x_0) = 0$.

Эта теорема имеет простой геометрический смысл: если непрерывная функция на концах отрезка $[a,b]$ принимает значения разных знаков, то график этой функции пересекает ось абсцисс (см. рис. 3).

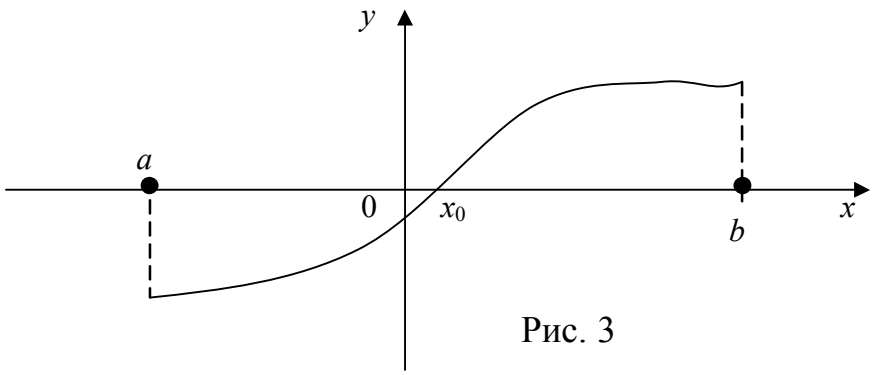


Рис. 3

Понятие равномерной непрерывности

Определение. Функцию $f(x)$ называют *равномерно непрерывной* на множестве $X \subseteq D(f)$, если для каждого $\varepsilon > 0$, найдется число $\delta > 0$ такое, что для любых двух $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Доказать непрерывность функции $f(x) = \sin(2x-3)$ при любом значении x, пользуясь определением непрерывности функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Решение. Возьмем любое значение x_0 на числовой оси и составим разность: $\sin(2x-3) - \sin(2x_0 - 3) = 2\cos(x + x_0 - 3)\sin(x - x_0) = \alpha(x)$.

Так как $|\cos(x + x_0 - 3)| \le 1$, а $|\sin(x - x_0)| \le |x - x_0|$, то при $x \to x_0$ $\sin(x - x_0)$ есть бесконечно малая функция. Следовательно, и $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$ как произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x \to x_0} \sin(2x-3) = \sin(2x_0 - 3)$. Непрерывность $\sin(2x-3)$, таким образом, показана.

Пример 2. Дана функция $f(x) = \sqrt{x+4}$. Доказать на «$\varepsilon - \delta$»-языке непрерывность функции в точке $x = 5$.

Решение. В точке $x = 5$ функция определена: $f(5) = 3$.

Зададим $\varepsilon > 0$. Составим разность $f(x) - f(5) = \sqrt{x+4} - 3$ и оценим ее по модулю. При $\delta > 0$ для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - 5| < \delta$, будет также выполняться и неравенство

$$\left|\sqrt{x+4} - 3\right| = \frac{|x-5|}{\left|\sqrt{x+4} + 3\right|} < \frac{|x-5|}{3} < \frac{\delta}{3}.$$

Если положить $\frac{\delta}{3} = \varepsilon$, т. е. $\delta = 3\varepsilon$, то при значениях x, для которых $|x - 5| < 3\varepsilon$, будет выполняться неравенство $\left|\sqrt{x+4} - 3\right| < \varepsilon$. Непрерывность функции при $x = 5$ доказана.

Пример 3. Дана функция $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2}, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ \dfrac{6x}{x+1}, & x \ge 2. \end{cases}$. Исследовать ее на непрерывность. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Определить характер точек разрыва и величину скачка. Построить график $f(x)$.

Решение. Функция $f(x)$ является неэлементарной, так как представлена различными аналитическими выражениями на промежутках $(-\infty;0],(0;2),[2;+\infty)$. Внутри первого промежутка элементарная функция $-\dfrac{1}{x+2}$ имеет разрыв при $x=-2$. Разрыв также возможен в точках перехода от одного аналитического выражения к другому, т.е. в точках $x_1=0$ и $x_2=2$, и в точке $x_3=-2$.

Исследуем непрерывность в точке $x_1=0$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{1}{0+2}=-\frac{1}{2},\ \text{т.е. } f(0-0)=-\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x^2=0,\ \text{ т.е. } f(0+0)=0;$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, то функция $f(x)$ в точке $x_1=0$ имеет разрыв первого рода. Найдем значение функции в точке $x_1=0$: $f(0)=-\dfrac{1}{2}$ (так как $0\in(-\infty;0]$). Так как $f(0-0)=f(0)$, то функция непрерывна в этой точке слева.

Для точки $x_2=2$ имеем:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} x^2=4,\ \text{т.е. } f(2-0)=4;$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{6x}{x+1}=\frac{6\cdot 2}{2+1}=4,\ \text{ т.е. } f(2+0)=4.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$. Найдем значение функции в точке $x_2=2$: $f(2)=4$ (так как $2\in[2;+\infty)$). Таким образом $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. Итак, функция непрерывна в точке $x_2=2$.

Наконец, для точки $x_3=-2$ находим:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x)=\lim_{x\to -2-0}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=+\infty,\ \text{т.е. } f(-2-0)=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -2+0} f(x)=\lim_{x\to -2+0}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=-\infty,\ \text{ т.е. } f(-2+0)=-\infty.$$

Таким образом, в точке $x_3=-2$ функция имеет разрыв второго рода (бесконечный скачок).

График функции представлен на рисунке 4.

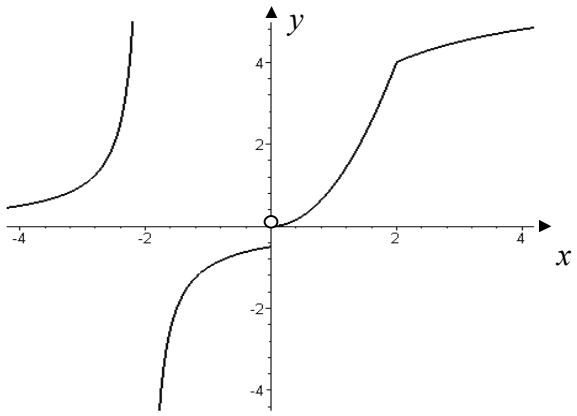


Рис. 4

Пример 4. Исследовать функцию $f(x)=2^{\frac{1}{3-x}}$ на непрерывность. Построить график $f(x)$.

Решение. Так как $f(x)$ – элементарная функция, определенная для всех $x\neq 3$: $D(f)=(-\infty;3)\bigcup(3;+\infty)$, поэтому она непрерывна на всей области определения.

Поскольку значение $f(3)$ не определено, функция терпит разрыв в точке $x=3$.

Найдем односторонние пределы в точке $x=3$

$$\lim_{x\to 3-0}2^{\frac{1}{3-x}}=\left[\frac{1}{3-x}\to\frac{1}{3-(3-0)}=\frac{1}{+0}=+\infty,\ 2^{+\infty}=+\infty\right]=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 3+0}2^{\frac{1}{3-x}}=\left[\frac{1}{3-x}\to\frac{1}{3-(3+0)}=\frac{1}{-0}=-\infty,\ 2^{-\infty}=0\right]=0.$$

Так как $f(3-0)=+\infty,$ в точке $x_2=3$ имеет место разрыв функции II рода.

Для того чтобы построить график $f(x)$, вычислим пределы функции при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}2^{\frac{1}{3-x}}=\left[2^{\frac{1}{3-x}}\to 2^{\frac{1}{3-(-\infty)}}=2^{\frac{1}{+\infty}}=2^0=1\right]=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}2^{\frac{1}{3-x}}=\left[2^{\frac{1}{3-x}}\to 2^{\frac{1}{3-(+\infty)}}=2^{\frac{1}{-\infty}}=2^0=1\right]=1.$$

График функции $f(x)$ изображен на рисунке 5.

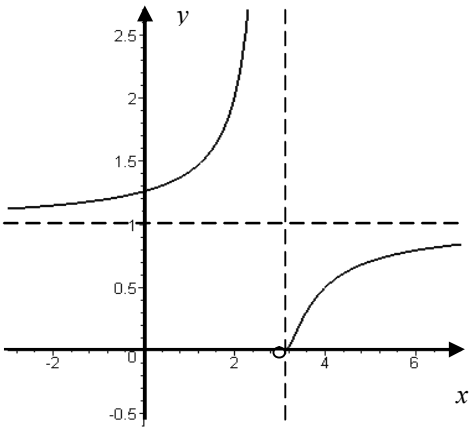


Рис. 5

Пример 5. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+x^2-12x}$, установить их род. В точках устранимого разрыва доопределить функцию таким образом, чтобы она стала непрерывной.

Решение. Так как $f(x)$ является элементарной функцией, определенной для всех x, для которых $x^3+x^2-12x\neq 0$, т.е. $D(f)=(-\infty;-4)\cup(-4;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$, то она непрерывна на всей области определения.

Поскольку значения $f(-4)$, $f(0)$ и $f(3)$ не определены, функция терпит разрыв в точках $x=-4$, $x=0$ и $x=3$.

Найдем односторонние пределы в точке $x=-4$:

$$\lim_{x\to -4-0}\frac{x^2+6x+8}{x^3+x^2-12x}=\lim_{x\to -4-0}\frac{(x+2)(x+4)}{x(x+4)(x-3)}=\lim_{x\to -4-0}\frac{x+2}{x(x-3)}=\frac{-4+2}{-4(-4-3)}=-\frac{1}{14},$$

т.е $f(-4-0)=-\dfrac{1}{14}$;

$$\lim_{x\to -4+0}\frac{x^2+6x+8}{x^3+x^2-12x}=\lim_{x\to -4+0}\frac{(x+2)(x+4)}{x(x+4)(x-3)}=\lim_{x\to -4+0}\frac{x+2}{x(x-3)}=\frac{-4+2}{-4(-4-3)}=-\frac{1}{14},$$

т.е. $f(-4+0)=-\dfrac{1}{14}$.

$f(-4-0)=f(-4+0)=\lim\limits_{x\to -4}f(x)$, но значение $f(-4)$ не определено. Таким образом, в точке $x=-4$ имеет место разрыв I рода (устранимый разрыв).

Доопределим функцию в точке $x=-4$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в этой точке.

По определению непрерывности функции в точке должно иметь место равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. т. е. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+6x+8}{x^3+x^2-12x}, & x \neq -4, \\ -\dfrac{1}{14}, & x = -4. \end{cases}$

Найдем односторонние пределы в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{x^2+6x+8}{x^3+x^2-12x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{(x+2)(x+4)}{x(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x+2}{x(x-3)} = +\infty,$$

т.е $f(0-0) = +\infty$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^2+6x+8}{x^3+x^2-12x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{(x+2)(x+4)}{x(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x+2}{x(x-3)} = -\infty,$$

т.е $f(0+0) = -\infty$.

Таким образом, в точке $x = 0$ имеет место разрыв II рода (бесконечный скачок).

Найдем односторонние пределы в точке $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{x^2+6x+8}{x^3+x^2-12x} = \lim_{x\to 3-0} \frac{(x+2)(x+4)}{x(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to 3-0} \frac{x+2}{x(x-3)} = -\infty,$$

т.е. $f(3-0) = -\infty$

$$\lim_{x\to 3+0} \frac{x^2+6x+8}{x^3+x^2-12x} = \lim_{x\to 3+0} \frac{(x+2)(x+4)}{x(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to 3+0} \frac{x+2}{x(x-3)} = +\infty,$$

т.е. $f(3+0) = +\infty$.

Таким образом, в точке $x = 3$ имеет место разрыв II рода (бесконечный скачок).

Пример 6. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \ln x$ на промежутке $(0;1)$.

Решение. Эта функция не является равномерно непрерывной на промежутке $(0;1)$. Зададим $\varepsilon = \frac{1}{2}\ln 2 > 0$.

Возьмем $x_1 = \frac{1}{n} \in (0;1)$ и $x_2 = \frac{1}{2n} \in (0;1)$, где n – натуральное число. Тогда $|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$.

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \left|\ln\frac{1}{n} - \ln\frac{1}{2n}\right| = |\ln 2|.$$

Какое бы $\delta > 0$ мы ни выбрали, n можно выбрать настолько большим, что будет $|x_1 - x_2| = \dfrac{1}{2n} < \delta$, при этом $|f(x_2) - f(x_1)| = |\ln 2| > \varepsilon = \dfrac{1}{2}\ln 2$. Это противоречит определению равномерно непрерывной функции.

Пример 7. Показать, что функция $y = e^x$ на промежутке $-\infty < x < +\infty$ не является равномерно непрерывной.

Решение. Зафиксируем $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Взяв $x_1 = \ln n$ и $x_2 = \ln(n+1)$, получим $|x_1 - x_2| = \left|\ln \dfrac{n}{n+1}\right| \to 0$ при $n \to \infty$, значит, $\forall \delta > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\left[|x_1 - x_2| < \delta\right]$, но $\left|e^{x_1} - e^{x_2}\right| = \left|e^{\ln n} - e^{\ln(n+1)}\right| = |n - (n+1)| = 1 > \dfrac{1}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

5.27. Исходя из определения непрерывности функции в терминах «$\varepsilon - \delta$», доказать непрерывность функций:

а) $y = \dfrac{x+3}{2-3x}$ в точке $x = \dfrac{1}{2}$;

б) $y = \sin x$ для $x \in (-\infty; +\infty)$;

в) $y = \sqrt{x}$ для $x \in [0; +\infty)$;

г) $y = \operatorname{arctg} x$ для $x \in (-\infty; +\infty)$;

д) $y = x^3$ для $x \in (-\infty; +\infty)$;

е) $y = 4x^2 + 1$ для $x \in (-\infty; +\infty)$;

ж) $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ для $x \in (-\infty; +\infty)$;

з) $y = 3\cos x$ для $x \in (-\infty; +\infty)$.

5.28. Найти точки разрыва функции, установить их характер. В точках устранимого разрыва доопределить функцию таким образом, чтобы она стала непрерывной:

а) $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x-2}$;

б) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x}{x}$;

в) $y = \dfrac{2x-4}{x^2 - 5x + 6}$;

г) $y = \dfrac{5x-15}{x^2 - 5x + 6}$;

д) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 6}$;

е) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 4}$;

ж) $y = \dfrac{x-3}{3x^2 - 8x - 3}$;

з) $y = \dfrac{2x-1}{2x^2 + 5x - 3}$.

5.29. Исследовать функцию на непрерывность. Построить график функции:

а) $y = 1 - 2^{\frac{1}{x-2}}$;

б) $y = 9^{\frac{x}{4-2x}}$;

в) $y = \dfrac{1-x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$;

г) $y = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$;

д) $y = 2^{\frac{x^2}{x^3-1}}$; е) $y = 5^{\frac{1}{2-4x}}$;

ж) $y = e^{\frac{x^2+1}{x}}$; з) $y = 1 - e^{\frac{1}{2-x}}$.

5.30. Исследовать данную функцию на непрерывность. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Определить характер точек разрыва и величину скачка:

а) $y = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \le x < 1, \\ x-3, & x \ge 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x+1, & x \le 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x \le 2, \\ -x+4, & x > 2; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} x+2, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 < x \le 1, \\ \dfrac{-x+3}{(x-4)^2}, & x > 1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} -\dfrac{x}{x+1}, & x \le 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \ge 2; \end{cases}$

д) $y = \begin{cases} \dfrac{1-x}{2-x}, & x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le 1, \\ \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}, & x > 1; \end{cases}$ е) $y = \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{x^2}, & x \le 1, \\ 2x, & 1 < x \le 3, \\ \dfrac{2x+7x^2}{x-1}, & x > 3; \end{cases}$

ж) $y = \begin{cases} \dfrac{-2(x+1)}{x+7}, & x \le -1, \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0, \\ \dfrac{x}{x-2}, & x \ge 0; \end{cases}$ з) $y = \begin{cases} \dfrac{x-4}{x+1}, & x < 0; \\ \dfrac{x^2}{x-1} + 2, & 0 \le x < 4; \\ 3+x, & x \ge 4. \end{cases}$

5.31. Исследовать на равномерную непрерывность в заданных областях следующие функции:

а) $y = x^2$ $(-1 < x < 1)$; б) $y = \operatorname{ctg} x$ $(0 < x < 1)$;

в) $y = \sin x^2$ $(-2 < x < 3)$; г) $y = x$ $(-\infty < x < +\infty)$;

д) $y = \sin x$ $(-\infty < x < +\infty)$; е) $y = \sqrt{x}$ $(1 \le x < +\infty)$;

ж) $y = \dfrac{1}{x}$ $(0 < x < 1)$; з) $y = \sin x^2$ $(-\infty < x < +\infty)$.

Ответы

5.28. б) x=0 – точка устранимого разрыва, г) x=3 – точка устранимого разрыва, x=2 – точка разрыва II рода, е) x=1 – точка устранимого разрыва, x=4 – точка разрыва II рода, з) $x=\frac{1}{2}$ – точка разрыва устранимого, x=3 – точка разрыва II рода. **5.29**. б) x=2 – точка разрыва II рода, г) x=1 – точка разрыва I рода, е) $x=\frac{1}{2}$ – точка разрыва II рода, з) x=2 – точка разрыва II рода. **5.30**. а) x=1 – точка разрыва I рода (скачок), б) x=2 – точка разрыва I рода (скачок), в) $x=\pm 1$ – точка разрыва I рода (скачок); x=4 точка разрыва II рода, г) x=–1 – точка разрыва II рода; x=0 – точка разрыва I рода, д) x=0, x=1 – точка разрыва I рода, е) x=0 – точка разрыва II рода; x=3 – точка разрыва I рода , ж) x=–7 – точка разрыва II рода; x=0 – точка разрыва I рода, з) x=–1 – точка разрыва II рода; x=4 – точка разрыва I рода.

5.5. Применения пределов в экономических расчетах

Краткие теоретические сведения

Понятие функции – одно из основных математических понятий, при помощи которых моделируются взаимосвязи между различными экономическими величинами. В качестве примеров рассмотрим такие известные в экономической теории функции как

- $D(p)$, $S(p)$ – функции спроса и предложения, выражающие связь цены p продукта и величин спроса и предложения продукта при постоянных вкусах потребителей, ценах на другие продукты и других параметрах. Равновесная рыночная цена данного продукта определяется решением уравнения $D(p)=S(p)$;
- $C(x)$, $R(x)$ – функции издержек и дохода фирмы в зависимости от объема произведенной продукции x. Издержки фирмы подразделяют на фиксированные F (не зависящие от объёма производства: аренда, страховка и т.п.) и переменные $V(x)$ (зависящие от объёма производства: расходный материал, электроэнергия и т.п.): $C(x)=F+V(x)$.

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированные одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т.д.). Время – дискретная переменная. В некоторых случаях – в доказательствах и расчетах, связанных с непрерывными процессами, возникает необходимость в применении непрерывных процентов. Рассмотрим формулу сложных процентов:

$$S = P(1+i)^n.$$

Здесь P – первоначальная сумма, i – ставка процентов (в виде десятичной дроби), S – сумма, образовавшаяся к концу срока ссуды в конце n-го года. Рост по сложным процентам представляет собой процесс, развивающийся по геометрической прогрессии. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют *капитализацией процентов.* В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной определению наращенной суммы: по заданной

сумме S, которую следует уплатить через некоторое время n, необходимо определить сумму полученной ссуды P. В этом случае говорят, что сумма S *дисконтируется*, а проценты в виде разности $S-P$ называются *дисконтом.* Величину P, найденную дисконтированием S, называют *современной,* или *приведенной,* величиной S. Имеем:

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}P=\lim_{n\to\infty}\frac{S}{(1+i)^n}=0.$$

Таким образом, при очень больших сроках платежа современная величина последнего будет крайне незначительна.

В практических финансово-кредитных операциях непрерывные процессы наращения денежных сумм, т.е. наращения за бесконечно малые промежутки времени, применяются редко. Существенно большее значение непрерывное наращение имеет в количественном финансово-экономическом анализе сложных производственных и хозяйственных объектов и явлений, например, при выборе и обосновании инвестиционных решений. Необходимость в применении непрерывных наращений (или непрерывных процентов) определяется, прежде всего, тем, что многие экономические явления по своей природе непрерывны, поэтому аналитическое описание в виде непрерывных процессов более адекватно, чем на основе дискретных. Обобщим формулу сложных процентов для случая, когда проценты начисляются m раз в году:

$$S=P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}.$$

Наращенная сумма при дискретных процессах находится по этой формуле, здесь m – число периодов начисления в году, i – годовая или номинальная ставка. Чем больше m, тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. В пределе при $m\to\infty$ имеем:

$$\overline{S}=\lim_{m\to\infty}P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}=P\cdot\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n}.$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}=e^{i}$, то $\overline{S}=Pe^{in}$.

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки – *силу роста*, которая характеризует относительный прирост наращенной суммы в бесконечно малом промежутке времени. При непрерывной капитализации процентов наращенная сумма равна конечной величине, зависящей от первоначальной суммы, срока наращения и номинальной ставки процентов. Для того чтобы отличить ставки непрерывных процентов от ставки дискретных процентов, обозначим первую через δ, тогда $\overline{S}=Pe^{\delta n}$.

Сила роста δ представляет собой номинальную ставку процентов при $m \to \infty$. Множитель наращения рассчитывается с помощью ЭВМ или по таблицам функции.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Пусть в конце каждого года в течение четырех лет в банк вносится по 1 млн рублей, проценты начисляются в конце года, ставка – 5 % годовых. В этом случае первый взнос обратится к концу срока ренты в величину $10^6 \times 1{,}05^3$ так как соответствующая сумма была на счете в течение 3 лет, второй взнос увеличится до $10^6 \times 1{,}05^2$, так как был на счете 2 года. Последний взнос процентов не приносит. Таким образом, в конце срока ренты взносы с начисленными на них процентами представляют ряд чисел: $10^6 \times 1{,}05^3$; $10^6 \times 1{,}05^2$; $10^6 \times 1{,}05$; 10^6. Наращенная к концу срока ренты величина будет равна сумме членов этого ряда. Обобщим сказанное, выведем соответствующую формулу для наращенной суммы годовой ренты. Обозначим: S - наращенная сумма ренты, R – размер члена ренты, i – ставка процентов (десятичная дробь), n – срок ренты (число лет). Члены ренты будут приносить проценты в течение $n-1$, $n-2$,..., 2, 1 и 0 лет, а наращенная величина членов ренты составит

$R(1+i)^{n-1}$, $R(1+i)^{n-2}$,..., $R(1+i)$, R.

Перепишем этот ряд в обратном порядке. Он представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+i)$ и первым членом R. Найдем сумму членов прогрессии. Получим: $S = \dfrac{R\left((1+i)^n - 1\right)}{(1+i)-1} = \dfrac{R\left((1+i)^n - 1\right)}{i}$. Обозначим $S_{n,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ и будем называть его *коэффициентом наращения ренты*. Если же проценты начисляются m раз в году, то $S = \dfrac{R\left((1+i/m)^{nm} - 1\right)}{(1+i/m)^m - 1}$, где i – номинальная ставка процентов.

Величина $a_{n,i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ называется *коэффициентом приведения ренты*. Коэффициент приведения ренты при $n \to \infty$ показывает, во сколько раз современная величина ренты больше ее члена:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}.$$

Пример 2. Брокерская фирма облагает комиссией в 6 % сделки по покупке золота на сумму от 100 до 1000 рублей, и комиссией в 2 % плюс 30 рублей – сделки на сумму, превышающую 1000 рублей.

а) Выразите сумму комиссионных как функцию f от суммы x, затраченной на покупку золота.

б) Вычислите $f(500)$, $f(1100)$.

Решение. а) Формула для $f(x)$ зависит от области изменения аргумента x. Когда $100 \le x \le 1000$, комиссионные составляют $0.06x$ рублей. Когда $1000 < x$, сумма комиссионных равна $0.02x+30$. Область определения $D(f)$ состоит из двух промежутков [100; 1000] и (1000; ∞), в каждом из которых функция $f(x)$ задана отдельной формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}06x, & 100 \le x \le 1000; \\ 0{,}02x + 30, & x > 1000. \end{cases}$$

Обратите внимание, что $D(f) = [100; \infty)$.

б) Так как $x=500$ принадлежит промежутку [100; 1000], будем использовать первую формулу для $f(x)$:

$f(500) = 0{,}06 \cdot 500 = 30$ (руб.).

Так как $x=1100$ принадлежит промежутку (1000; ∞), используем вторую формулу для $f(x)$:

$f(1100) = 0{,}02 \cdot 1100 + 30 = 52$ (руб.).

Пример 3. Фирма программног обеспечения производит и продаёт новую программу, которая обходится фирме 100 рублей за копию, её фиксированные издержки составляют 10000 рублей в месяц.

а) Выразите общую сумму издержек фирмы за месяц как функцию от количества x проданных копий программы.

б) Вычислите сумму издержек фирмы при $x = 500$.

Решение. Ежемесячные переменные издержки фирмы составляют $100x$ рублей. Таким образом, общая сумма издержек фирмы за месяц задана функцией:

$C(x) = 10000+100x$.

Если фирма продает за месяц 500 копий программы, её издержки составят

$C(500) = 10000+100 \cdot 500 = 60000$ (руб.).

Пример 4. Сумма 1000 рублей помещена на депозит, по которому банк начисляет проценты один раз в полгода при банковской процентной ставке r. Выразите сумму на счете через 2 года как функцию от r.

Решение. Наращенная сумма при использовании номинальной процентной ставки наращения определяется по формуле:

$$S = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn},$$

где P – базовая сумма, i – номинальная процентная ставка, m – число начислений процентов за год, n – количество лет.

В задаче $P = 1000$, $i = r$, $m = 2$, $n=2$. Таким образом, наращенная сумма равна:

$$S(r) = 1000 \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right)^4.$$

Задания для самостоятельной работы

5.32. Спрос и предложение на апельсины на рынке фруктов описываются линейными функциями вида $D(p)=a-bp$, $S(p)=dp+c$. Определить равновесную цену апельсинов, сделать графическую иллюстрацию:

а) $a=2$, $b=5$, $c=3$, $d=2$;

б) $a=5$, $b=3$, $c=1$, $d=4$.

5.33. Магазин офисной техники определил, что количество принтеров, проданных в течение года x, приблизительно задано функцией $f(x)=50+4x+0{,}5x^2$, где $x=0$ соответствует 2006 году. Найдите количество принтеров, проданных магазином в 2012 году.

5.34. В городе N Вы можете арендовать автомобиль за 500 рублей в день плюс 10 рублей за каждый километр пробега.

а) Найдите стоимость аренды автомобиля за один день при двухстах километрах пробега.

б) Выразите сумму аренды автомобиля за день как функцию от количества x пройденных в этот день километров. Постройте график функции.

5.35. Газодобывающая компания платит собственнику земли 150000 руб. за право пробурить скважину для добычи природного газа и 3 руб. за каждый извлеченный кубометр газа. Выразите сумму денег, которую получит землевладелец, как функцию добытого газа.

5.36. Предположим, что производителя игрушек есть фиксированные расходы 90000 рублей, которые должны быть заплачены независимо от того, сколько игрушек произведено. Кроме того, есть переменные издержки 160 рублей за игрушку.

а) Найдите стоимость производства 2000 игрушек; $C(2000)$-?

б) Каковы будут дополнительные издержки, если объем производства возрастет с 2000 до 2200 игрушек?

в) Сколько игрушек может быть произведено при общих затратах 250000 рублей?

г) Какому условию должна удовлетворять цена игрушки, чтобы производство было рентабельным?

5.37. Первые полчаса рабочего времени рабочие механического цеха готовят оборудование к работе. После чего они изготавливают по 10 деталей в час. Рабочий день составляет 8 часов. Издержки производства x деталей заданы (в рублях) функцией $C(x)=0{,}1x^2+25x+200$.

а) Выразите объем произведенной в течение дня продукции как функцию от количества t отработанных часов.

б) Выразите издержки производства как функцию t.

в) Каковы издержки первых 4 часов рабочего дня?

5.38. Магазин оценивает общий доход (в рублях) от реализации x велосипедов за год функцией $R(x) = 250x - 0{,}2x$.

а) Изобразите график $R(x)$ на отрезке [200; 500].

б) Каков доход от реализации 400 велосипедов?

в) Если объем продаж сократится на 50 велосипедов, то насколько сократится доход магазина?

г) Магазин предполагает, что если он потратит 10000 рублей на рекламу, это увеличит объём продаж с 400 до 450 велосипедов в следующем году. Оправданна ли эта инвестиция? Объясните своё заключение.

5.39. В некоторой стране подоходный налог определен следующим образом. Нет никакого налога на доход до 10000 рублей в месяц. Любой доход от 10000 до 20000 рублей в месяц обложен налогом в 10 %. Любой доход от 20000 рублей в месяц и выше обложен налогом в 15 %.

а) Изобразите график налоговой ставки R как функции дохода I.

б) Каков налог на доход 14000 рублей в месяц?

в) Изобразите график налога T как функции дохода I.

5.40. Ежемесячные издержки вождения автомобиля зависит от числа километров пробега автомобиля за месяц. Линн установила, что в мае пробег в 480 миль стоил ей 380 \$, а в июне пробег в 800 миль стоил ей 460 \$.

а) Выразите ежемесячные издержки C как функцию пройденного расстояния d, предполагая, что линейная функция дает подходящую модель.

б) Используйте часть а), чтобы предсказать стоимость пробега 1500 миль в месяц.

в) Изобразите график $C(d)$. Каков смысл наклона графика?

г) Укажите точку пересечения графика с осью Oy.

д) Почему линейная функция является подходящей моделью в этой ситуации?

5.41. Сумма 1000 рублей помещена на депозит, по которому банк начисляет 6 %. Какова будет сумма вклада через год, если проценты банк начисляет а) ежеквартально; б) ежемесячно; в) ежедневно; г) непрерывно?

5.42. Фирма производит 15000 единиц товара в течение 8-часового рабочего дня. Фиксированные издержки производства составляют 2000 рублей в день. Переменные издержки составляют 2 рубля за каждую единицу товара.

а) Выразите общие издержки фирмы при производстве x единиц товара как функцию $C(x)$.

б) Изобразите график функции $C(x)$.

в) Найдите $C(30000)$, $C(30000 - 0)$, $C(30000 + 0)$, если таковые существуют.

5.43. Автостоянка взимает 30 рублей в течение первого часа (или части часа) парковки автомобиля и 20 рублей в течение каждого последующего часа (или части) парковки до ежедневного максимума в 100 рублей.

а) Постройте график стоимости парковки как функции от времени парковки.

б) Укажите точки разрыва данной функции. Каково их значение для водителей автомобилей?

5.44. Объясните, почему каждая из перечисленных функций является или не является непрерывной.

а) Температура в определенное время суток как функция расстояния от Астрахани, отложенного строго на восток.

б) Высота выше уровня моря как функция расстояния от Астрахани, отложенного строго на восток.

в) Стоимость поездки на такси как функция расстояния проезда.

г) Величина транспортного налога как функция мощности двигателя автомобиля.

Ответы

5.33. 92. **5.34**. а) 2500; б) $C(x)=500+10x$. **5.36.** а) 410000; б) 32000; в) 1000. **5.37.** а) $x=10t-5$, $0{,}5\le t\le 8$; в) 837,5. **5.38.** б) 99920; в) 12490; г) нет. **5.41.** а) 1061,36; б) 1061,68; в) 1061,83; г) 1061,84. **5.42**. в) 64000, 64000, 66000. **5.43**. t=1, 2, 3,…24.

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 9 по теме «Функции» (30 мин.)

1. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{-x^2+5x-6}+\frac{\log_3(5-2x)}{x-2}$$

2. Найти область значений функции $f(x)=x^2+4x+1$

3. Найти период функции: $y=\sin^2 3x$.

4. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y=\ln\frac{1}{x+2}$

Контрольная работа № 10 по теме «Предел функции. Бесконечно малые функции (90 мин.)»

Найти пределы функций:

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{5x^3+2x^2-3}$

2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{10x-1}-3}$

3 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$

4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x\operatorname{tg}4x}$

5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{1-4x}$

6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}$

7 Выяснить является данные функции бесконечно малыми в окрестности точки $x=2$ и сравнить их: $\alpha(x)=4(\cos(x-2)-1), b(x)=(x\text{ - }2)^3$.

8 Вычислить предел, используя принцип замены эквивалентных бесконечно малых функций $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\arcsin 2x}$

Контрольная работа № 11 по теме «Непрерывность функции» (60 мин.)

Исследовать данную функцию на непрерывность. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Определить характер точек разрыва и величину скачка:

1. $y=\begin{cases} x-\dfrac{1}{x+1}, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x<2 \\ 2\dfrac{x}{x-4}, & x\ge 2 \end{cases}$

2. $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x^2+5x-3}$

3. $y=\dfrac{2}{1+e^{\frac{x+1}{x-1}}}$

4. Доопределить функцию в точке $x=0$ таким образом, чтобы она стала непрерывной $f(x)=\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$

ГЛАВА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Производная функции. Основные правила дифференцирования

Краткие теоретические сведения

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0, тогда $\Delta x = x - x_0$ – *приращение аргумента* x, $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – *приращение функции*.

Определение. *Производной* функции $f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, если он существует.

Производную функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $f'(x_0)$ или $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Через y' или $\dfrac{dy}{dx}$ обозначают производную функции $y = f(x)$ в точке x.

Таблица производных

1) $C' = 0$	2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
3) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$	4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
5) $(\sin x)' = \cos x$	6) $(\cos x)' = -\sin x$
7) $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	8) $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11) $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	12) $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Основные правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке x. Тогда:

1. $\left(Cf(x)\right)' = Cf'(x)$,

2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$.

5. **Производная сложной функции.** Пусть функция $u = g(x)$ имеет производную в точке x, функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u = g(x)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x, равную

$F'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$.

6. Производная функции, заданной параметрически. Пусть функции $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ задают параметрически функцию $y = f(x)$ в окрестности точки $x = \varphi(t)$, функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные $\varphi'(t) \neq 0$ и $\psi'(t)$ в точке t. Тогда функция $y = f(x)$ также имеет производную в точке x, и верна формула

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

7. Дифференцирование показательно-степенной функции. Для дифференцирования показательно-степенной функции $y = (f(x))^{g(x)}$ $(f(x) > 0)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – имеют производные в точке x, можно представить ее в виде:

$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Затем по правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$y' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)}\left(g(x)\ln f(x)\right)' =$$

$$= \left(g'(x)\cdot \ln f(x) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right)\cdot f(x)^{g(x)}.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2$ по определению.

Решение. Так как

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x.$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \sin x$ по определению.

Решение. Имеем:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x.$$

Следовательно, $(\sin x)'=\cos x$.

Пример 3. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$, если

$$f(x)=\begin{cases}e^{x\sin 5x}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

*Решение***.** По определению производной в точке $x=0$ имеем:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{(0+\Delta x)\sin 5(0+\Delta x)}-1-0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x\sin 5\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Так как $\Delta x\sin 5\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$, заменив бесконечно малую эквивалентной $(e^x-1\sim x)$, получим $f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin 5\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin 5\Delta x=0$.

Пример 4. Найти производную функции $y=9x^5-\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4$.

*Решение***.** Воспользуемся правилами дифференцирования и таблицей производных:

$$y'=\left(9x^5-\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4\right)'=\left(9x^5\right)'-\left(\frac{4}{x^3}\right)'+\left(\sqrt[3]{x^7}\right)'-\left(3x\right)'+\left(4\right)'=$$

$$=9\cdot 5x^4-4\cdot(-3)x^{-4}+\frac{7}{3}x^{4/3}-3=45x^4+12/x^4+\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}-3.$$

Пример 5. Найти производную: $y=\frac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. Воспользуемся правилами дифференцирования и таблицей производных:

$$y'=\left(\frac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+2)'\sqrt{1-x^4}-(x^2+2)(\sqrt{1-x^4})'}{(\sqrt{1-x^4})^2}\right)=$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x\sqrt{1-x^4} - \frac{(x^2+2)\cdot(-4x^3)}{2\sqrt{1-x^4}}}{1-x^4} \right) = \frac{x(1-x^4)+x^3(x^2+2)}{(1-x^4)\sqrt{1-x^4}} = \frac{x-x^5+x^5+2x^3}{\sqrt{(1-x^4)^3}} =$$

$$= \frac{2x^3+x}{\sqrt{(1-x^4)^3}}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}^5(x+2)\cdot \arccos 3x^2$.

Решение: Воспользуемся правилами дифференцирования:

$$y' = \left(\operatorname{tg}^5(x+2)\cdot \arccos 3x^2\right)' = 5\operatorname{tg}^4(x+2)\cdot\frac{1}{\cos^2(x+2)}\cdot \arccos 3x^2 +$$

$$+ \operatorname{tg}^5(x+2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\right)\cdot 6x = \frac{5\operatorname{tg}^4(x+2)\cdot \arccos 3x^2}{\cos^2(x+2)} - \frac{\operatorname{tg}^5(x+2)\cdot 6x}{\sqrt{1-9x^4}}.$$

Пример 7. Найти производную: $y = \ln\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}$.

Решение. При дифференцировании некоторых логарифмических выражений рациональнее предварительно упростить первоначальную функцию по свойствам логарифма:

$$y = \ln\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}} = \frac{1}{6}\ln\frac{1+3x}{1-3x} = \frac{1}{6}\left(\ln(1+3x) - \ln(1-3x)\right);$$

$$y' = \frac{1}{6}(\ln(1+3x))' - (\ln(1-3x))') = \frac{1}{6}\left(\frac{(1+3x)'}{1+3x} - \frac{(1-3x)'}{1-3x}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{1+3x} - \frac{-3}{1-3x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+3x} + \frac{1}{1-3x}\right) = \frac{1}{2}\frac{(1-3x+1+3x)}{1-9x^2} = \frac{1}{1-9x^2}.$$

Пример 8. Найти производную функции $y = \left(\cos x\right)^{\sin x}$.

Решение. По формуле

$$y' = \left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(g'(x)\cdot\ln f(x) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right)\cdot f(x)^{g(x)}$$

имеем

$$y' = \left(\cos x\right)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x + \frac{\sin x}{\cos x}\left(\cos x\right)'\right) = \left(\cos x\right)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x - \sin x\operatorname{tg}x\right)$$

Пример 9. Найти производную: $y = (\operatorname{tg}x)^{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{4}}$.

Решение. Данная функция показательно-степенная. Прологарифмируем все выражение: $\ln y = \ln(\operatorname{tg}x)^{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{4}}$.

Упростим правую часть по свойству логарифмической функции:

$$\ln y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{4} \cdot \ln \operatorname{tg} x .$$

Продифференцируем все выражение, учитывая, что y – функция от x, а $\ln y$ – сложная функция:

$$\frac{y'}{y} = \left(\ln \operatorname{tg}\frac{x}{4} \right)' \ln \operatorname{tg} x + \ln \operatorname{tg}\frac{x}{4} \cdot (\ln \operatorname{tg} x)';$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{4}} \cdot \ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}} + \ln \operatorname{tg}\frac{x}{4} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}}}{\operatorname{tg} x} = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{4\cos\frac{x}{4} \cdot \sin\frac{x}{4}} + \frac{\ln \operatorname{tg}\frac{x}{4}}{\sin x \cos x} = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{2\sin\frac{x}{2}} +$$

$$+ \frac{2\ln \operatorname{tg}\frac{x}{4}}{\sin 2x}; \qquad y' = \left(\frac{\ln \operatorname{tg} x}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{2\ln \operatorname{tg}\frac{x}{4}}{\sin 2x} \right) y .$$

Итак, $y' = \left(\frac{\ln \operatorname{tg} x}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{2\ln \operatorname{tg}\frac{x}{4}}{\sin 2x} \right) (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg}\frac{x}{4}}$.

Пример 10. Используя метод логарифмического дифференцирования, вычислить производную функции $y = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}$.

*Решение***.** Применим метод логарифмического дифференцирования. Для этого предварительно прологарифмируем обе части данного выражения и используя свойства логарифма преобразуем правую часть.

$$\ln y = \frac{6}{7}\ln(x+5) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3) .$$

Продифференцируем обе части равенства, учитывая, что y сложная функция

$$\left(\ln y\right)' = \left(\frac{6}{7}\ln(x+5) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3) \right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}.$$

Выражая производную искомой функции, получим

$$y' = y \cdot \left(\frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} \right)$$

Учитывая, что $y=\dfrac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}$, окончательно получим

$$y'=\frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}\cdot\left(\frac{6}{7(x+5)}-\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x+3}\right).$$

Пример 11. Для функции, заданной параметрически, найти $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\begin{cases} x=3\sin t+\sin 3t, \\ y=3\cos t+\cos 3t. \end{cases}$$

*Решение***.** Находим производные от x и от y по параметру t

$$x'_t=\frac{dx}{dt}=3\cos t+3\cos 3t,\ y'_t=\frac{dy}{dt}=-3\sin t-3\sin 3t.$$

Искомую производную от y по x находим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=-\frac{3(\sin t+\sin 3t)}{3(\cos t+\cos 3t)}=-\frac{2\sin\dfrac{t+3t}{2}\cdot\cos\dfrac{t-3t}{2}}{2\cos\dfrac{t+3t}{2}\cdot\cos\dfrac{t-3t}{2}}=-\frac{\sin 2t}{\cos 2t}=-\operatorname{tg}2t.$$

Задания для самостоятельной работы

6.1. Найти производную функции по определению:

а) $y=5x-1$;

б) $y=3x^2-2$;

в) $y=e^x$;

г) $y=5^{3x+1}$;

д) $y=\cos(2x+1)$;

е) $y=\ln(x+2)$;

ж) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\operatorname{tg}x}-2^{\sin x}}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$;

з) $f(x)=\begin{cases}e^{x\sin\frac{5}{x}}-1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

6.2. Вычислить производную функции:

а) $y=x^2\sqrt{1-x^3}$;

б) $y=x^2\arcsin 5x$;

в) $y=3e^{2x}\cdot\operatorname{tg}5x$;

г) $y=\sin\ 5x\cdot\arccos\ 2x$;

д) $y=\dfrac{4\sin 3x}{e^{2x}}$;

е) $y=\dfrac{2x^3}{\sqrt{4x+5}}$;

ж) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}\ 2x}{e^{3x}-x}$;

з) $y=\dfrac{3^{\ln(1+2x)}}{(1+2x)^3}$.

6.3. Вычислить производную функции:

а) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

б); $y=\operatorname{arctg}(x-2)+\dfrac{x-3}{x^2-4x+5}$

в) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$;

г) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;

д) $y=\dfrac{\ln(x^2+2)}{2}+\dfrac{2-x}{4(x^2+2)}-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$;

е) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

ж) $y=\cos\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$;

з) $y=\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$.

6.4. Вычислить производную функции, используя логарифмическую производную:

а) $y=(x^2-3)^{\sqrt{x^2-3}}$;

б) $y=x^{\sin x^3}$;

в) $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)}$;

г) $y=\left(\cos 5x\right)^{e^x}$;

д) $y=\dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$;

е) $y=\dfrac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$;

ж) $y=2\sqrt[3]{\dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{1+\sqrt{x}}}$;

з) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$.

6.5. Вычислить производную функции, заданной параметрически:

а) $\begin{cases} x=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\ln t}, \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x=\ln\left(\operatorname{ctg} t\right), \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x=t\sqrt{t^2+1}, \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x=\ln\dfrac{1-t}{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t^2}; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x=\left(1+\cos^2 t\right)^2, \\ y=\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$

Ответы

6.2. а) $-\frac{7x^3-4}{2\sqrt{1-x^3}}$; б) $2\arcsin 5x+\frac{5x^2}{\sqrt{1-25x^2}}$; в) $6e^{2x}tg5x+\frac{15e^{2x}}{\cos^2 5x}$; г) $5\cos 5x\cdot\arccos 2x-\frac{2\sin 5x}{\sqrt{1-4x^2}}$; д) $\frac{12\cos 53x-8\sin 3x}{e^{2x}}$; е) $\frac{10x^2(2x+3)}{\sqrt{(4x+5)^3}}$; ж) $\frac{(1-3e^{3x})ctg2x}{(e^{3x}-x)^2}-\frac{2}{\sin^2 2x(e^{3x}-x)}$; з) $y=\frac{3^{\ln(1+2x)}(\ln 3-6)}{(1+2x)^4}$. **6.3.** а) $-\frac{1}{\sqrt{2(x-x^2)}(1+x)}$, б) $\frac{2x-2}{(x^2-4x+5)^2}$, в) $-\frac{1}{x^2+1}$, г) $\arcsin x$, д) $\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}$, е) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, ж) $\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\sin\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, з) $-\sqrt{\frac{x}{1-x}}$. **6.4.** б) $x^{\sin x^3}(3x^2\cos x^3+\frac{\sin x^3}{x})$; г) $(\cos x)^{e^x}\ (e^x\sin 5x-5e^x tg5x)$; е) $\frac{2x^2+15x+20}{(2x+7)^2\sqrt{2x-1}}$; з) $-\frac{1}{8}\frac{3x^2-8}{x^3\sqrt{x-1}}$. **6.5.** а) $\frac{t}{t^2-1}$; б) $\frac{\sqrt{1-t^2}}{\ln^2 t}$; в) $\frac{-2\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2(1+tg^2\sqrt{1+t})}}$; г) $t\sqrt{t^2-1}$; д) $\frac{\cos^2 t}{2(\cos^2 t-1)}$; е) $-t(2t^2+1)$; ж) $-\frac{2}{t\sqrt{1-t^2}}$; з) $4\cos t(\cos^4 t-2\cos^2 t+1)$.

6.2. Производные высших порядков

Краткие теоретические сведения

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке x некоторого множества D. Тогда ее производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию, определенную на множестве D. В свою очередь функция $f'(x)$ может в некоторых точках множества D иметь производную. В этом случае производной второго порядка (второй производной) называется производная от производной $((f'(x))'$. Для второй производной функции $y=f(x)$ в точке x применяются обозначения:

$$y'',\quad f''(x),\quad y^{(2)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогично определяются производные 3-го, 4-го и т.д. порядков.

Производной первого порядка (или первой производной) считается $f'(x)$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти вторую производную функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Сначала найдем $f'(x)$ и обязательно упростим полученное выражение:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\frac{x'\sqrt{1-x^2}-(\sqrt{1-x^2})'x}{(1-x^2)}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}=\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}=(1-x^2)^{-3/2}.$$

$$f''(x)=\left((1-x^2)^{-3/2}\right)'=-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-5/2}(-2x)=\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}=\frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

Пример 2. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

Решение. Найдем производную первого порядка:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\left((1-t)^{-\frac{1}{2}}\right)'}{(\sqrt{t})'}=\frac{-\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(1-t)'}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=-\sqrt{t}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(-1)=\sqrt{t}(1-t)^{-\frac{3}{2}};$$

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t};$$

$$(y'_x)'_t=(\sqrt{t}(1-t)^{-\frac{3}{2}})'=(\sqrt{t})'(1-t)^{-\frac{3}{2}}+\sqrt{t}((1-t)^{-\frac{3}{2}})'=\frac{(1-t)^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{t}}-$$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{t}(1-t)^{-\frac{5}{2}}(1-t)'=\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{(1-t)^3}}+\frac{3\sqrt{t}}{2\sqrt{(1-t)^5}};$$

$$y''_{xx}=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{(1-t)^3}}+\frac{3\sqrt{t}}{2\sqrt{(1-t)^5}}\right):\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}}+\frac{3t}{\sqrt{(1-t)^5}}=\frac{1+2t}{\sqrt{(1-t)^5}}.$$

Пример 3. Найти производную *n*-го порядка: $y=\sqrt{e^{5x+3}}$.

Решение. Найдем последовательно несколько производных высших порядков:

$$y'=(\sqrt{e^{5x+3}})'=\frac{e^{5x+3}\cdot 5}{2\sqrt{e^{5x+3}}}=\frac{5}{2}\sqrt{e^{5x+3}};$$

$$y''=\left(\frac{5}{2}\sqrt{e^{5x+3}}\right)'=\left(\frac{5}{2}\right)(\sqrt{e^{5x+3}})'=\left(\frac{5}{2}\right)^2\sqrt{e^{5x+3}};$$

$$y''' = \left(\left(\frac{5}{2} \right)^2 \sqrt{e^{5x+3}} \right)' = \left(\frac{5}{2} \right)^2 (\sqrt{e^{5x+3}})' = \left(\frac{5}{2} \right)^3 \sqrt{e^{5x+3}} .$$

И так далее. Получим общую формулу для производной *n*-го порядка

$$y^{(n)} = \left(\frac{5}{2} \right)^{(n)} \sqrt{e^{5x+3}} .$$

Задания для самостоятельной работы

6.6. Найти производные указанных порядков явно заданных функций:

а) $y = x^5 - 2x^3 + 7x - 1, \ y^{(4)}$;

$y = e^x (x^2 - 5), \ y''$;

$y = \sin^2 x, \ y^{(n)}$;

б) $y = 7x^5 - 2x^3 + 1, \ y^{(5)}$;

$y = \ln \sin 2x, \ y'''$;

$y = e^{-2x} + \cos 3x, \ y^{(n)}$;

в) $y = 5x^4 - 3x^3 + 2x - 3, \ y^{(5)}$;

$y = e^{-2x}(2x^3 + 1), \ y''$;

$y = \dfrac{2}{5x - 3}, \ y^{(n)}$;

г) $y = 3x^6 + 2x^4 - 5x^2 - 3, \ y^{(4)}$;

$y = e^{3x}(x^3 + 2), \ y''$;

$y = \log_5 (3x - 1), \ y^{(n)}$;

д) $y = x^2 e^{3x}, \ y'''$;

$y = 2x^5 - 7x^3 - 1, \ y^{(4)}$;

$y = \dfrac{1}{x - 4}, \ y^{(n)}$;

е) $y = x^3 e^{-3x}, \ y'''$;

$y = x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 + x^4, \ y^{(4)}$;

$y = 5^{3x}, \ y^{(n)}$;

ж) $y = \operatorname{arctg} 2x, \ y'''$;

$y = x^3 - 5x^7 + 6x^8, \ y^{(4)}$;

$y = \dfrac{1}{x^2}, \ y^{(n)}$;

з) $y = 7x^5 - 2x^3 + 1, \ y^{(4)}$;

$y = 3x + \operatorname{arctg} 2x, \ y'''$;

$y = \ln x, \ y^{(n)}$.

6.7. Найти производные первого и второго порядка параметрически заданных функций:

а) $\begin{cases} y = t^3 + 5t, \\ x = 3t - 2t^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = 3t^2 + 5t, \\ x = -4t^3 - t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = t^2 - 3t, \\ x = 3t^2 + t - 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = 3t^5 + t^4 - 1, \\ y = 2t^3 - t; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x = 3t^3 - 2t^2 + 4, \\ y = -3t^5 + 2t; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x = 2t^2 - 3t, \\ y = 3t^3 - 1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x = 2t^3 - 2t + 1, \\ y = 4t^4 + 2t^2 - 3; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x = 3t^3 - 2t + 1, \\ y = 2t^4 + t^2. \end{cases}$

Ответы

6.6. а) -120, $e^x(x^2+4x-3)$, $y^{(n)}=2^{n-1}\sin(2x+\frac{\pi(n-1)}{2})$; б) 840, $-\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$; $y^{(n)}=(-1)^n 2^n e^{-2x}+3^n\cos(3x+\frac{\pi n}{2})$; в) 0, $e^{-2x}(8x^3-24x^2+12x+4)$, $y^{(n)}=\frac{(-1)^n 3!5^n}{(5x-3)^{n+1}}$; г) $1080x^2+48$, $y^{(n)}=\frac{3^n(n-1)!}{\ln 5\cdot(3x-1)^n}$; д) $y^{(n)}=(-1)^n n!(x-4)^{-n-1}$; е) $e^{-3x}(6-54x+81x^2-27x^3)$, -24, $y^{(n)}=5^{3x}(3\ln 5)^n$; ж) $y^{(n)}=\frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$; з) $840x$, $\frac{256x^2}{(1+4x^2)^3}-\frac{16}{(1+4x^2)^2}$, $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. **6.7.** а) $y'_x=\frac{3t^2+5}{3-4t}$, $y''_{xx}=\frac{12t^2-18t+20}{(4t-3)^3}$; б) $y'_x=\frac{6t+5}{-12t^2-1}$, $y''_{xx}=\frac{-72t^2-120t+6}{(12t^2+1)^3}$; в) $y'_x=\frac{2t-3}{6t+1}$, $y''_{xx}=\frac{20}{(6t+1)^3}$; г) $y'_x=\frac{6t^2-1}{15t^4+4t^3}$, $y''_{xx}=-\frac{12(15t^3+2t^2-5t-1)}{t^7(15t+4)^3}$; д) $y'_x=\frac{-15t^4+2}{3t^3-4t}$, $y''_{xx}=\frac{-45t^6-180t^4+18t^2-8}{t^3(3t^2-4)^2(9t-4)}$; е) $y'_x=\frac{9t^2}{4t-3}$, $y''_{xx}=\frac{18t(2t-3)}{(4t-3)^3}$; ж) $y'_x=\frac{8t^3\,2t}{4t^2-1}$; з) $y'_x=\frac{8t^3+2t}{9t^2-2}$, $y''_{xx}=2\frac{36t^4-33t^2-2}{(9t^2-3)^3}$.

6.3. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к кривой

Краткие теоретические сведения

Пусть $y=f(x)$ – имеет производную в точке x_0, M_0 – точка на графике этой функции с координатами x_0 и $y_0=f(x_0)$, $k=\operatorname{tg}\varphi$ – *угловой коэффициент касательной*, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0, φ $\left(-\pi/2<\varphi\le\pi/2\right)$ – угол наклона касательной к оси абсцисс (см. рис 6. *а*).

Геометрический смысл производной состоит в том, что $f'(x_0)=k$.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 имеет вид

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

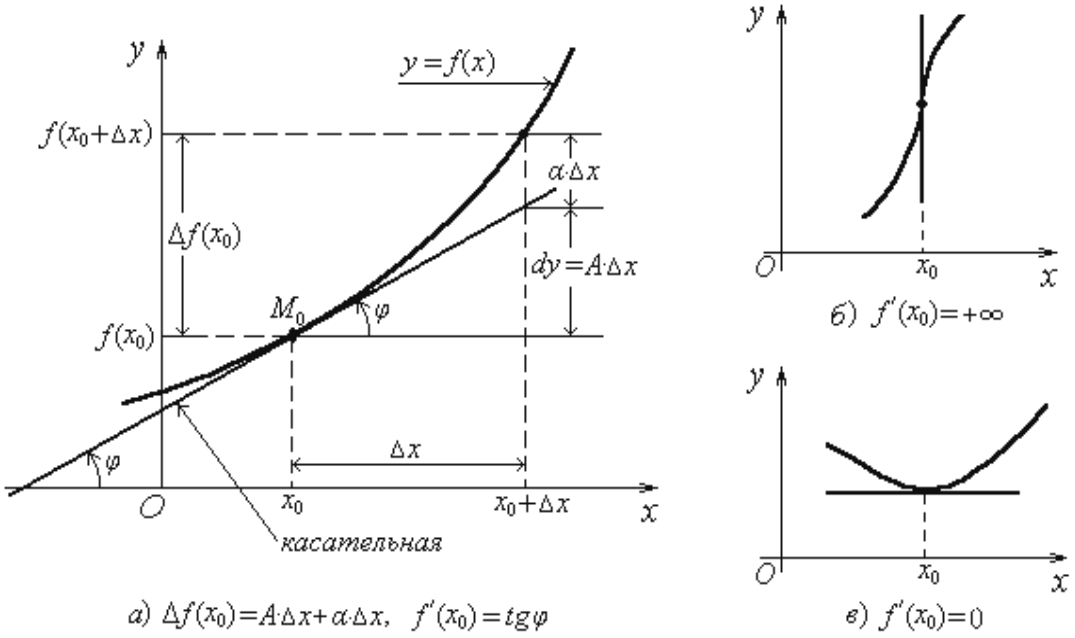
Прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания, называется *нормалью* к графику функции $y=f(x)$ в этой точке.

Уравнение нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид

$$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+y_0.$$

Замечание. Пусть $f'(x_0)=+\infty$ (или $f'(x_0)=-\infty$). Тогда касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 параллельна оси Oy, а уравнение касательной имеет вид $x=x_0$ (рис. 6*б*).

Замечание. Если $f'(x_0)=0$, то касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 параллельна оси Ox (рис. 6*в*).



а) $\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,\ \ f'(x_0)=tg\varphi$ *б)* $f'(x_0)=+\infty$ *в)* $f'(x_0)=0$

Рис. 6

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Составить уравнение нормали и уравнение касательной к кривой $y=x+\sqrt{x^3}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид: $y-y_0=y_0'(x-x_0)$. Уравнение нормали имеет вид: $y-y_0=-\dfrac{1}{y_0'}(x-x_0)$.

Найдем производную функции в точке с абсциссой $x_0=1$.

$$y'=\left(x+\sqrt{x^3}\right)'=1+\frac{3}{2}\sqrt{x};\ \ y'(1)=1+\frac{3}{2}\sqrt{1}=\frac{5}{2};\ \ y(1)=1+\sqrt{1^3}=2.$$

Запишем уравнения касательной к кривой $y=x+\sqrt{x^3}$ в точке с абсциссой $x_0=1$: $y-2=\dfrac{5}{2}(x-1)$ или $y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{1}{2}$. Уравнение нормали в этой же точке: $y-2=-\dfrac{2}{5}(x-1)$ или $y=-\dfrac{2}{5}x+2\dfrac{2}{5}$.

Пример 2. Составить уравнения касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ в точке $M_0(3;2)$.

*Решение***.** Продифференцируем по x $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}-1=0$: $\frac{2x}{18}+\frac{2y\cdot y'}{8}=0$, откуда $y'(x)=-\frac{4x}{9y}$, $y'(x_0)=y'(3)=-\frac{4\cdot 3}{2\cdot 9}=-\frac{2}{3}$. Подставляя значения $x_0=3$, $y_0=2$, $y'(x_0)=-\frac{2}{3}$ в формулы уравнений касательной $y-y_0=y'_0(x-x_0)$ и нормали $y-y_0=-\frac{1}{y'_0}(x-x_0)$, получим $y-2=-\frac{2}{3}(x-3)$ или $2x+3y-12=0$ – уравнение касательной; $y-2=\frac{3}{2}(x-3)$ или $3x-2y-5=0$ – уравнение нормали.

Пример 3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t^2-t^3 \end{cases}$ в точке соответствующей значению параметра $t_0=3$.

Решение. Уравнение касательной к кривой имеет вид: $y-y_0=y'_0(x-x_0)$.

Найдем производную: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(3t^2-t^3)'}{(2t-t^2)'}=\frac{6t-3t^2}{2-2t}$, $y'(3)=\frac{9}{4}$.

При $t_0=3$, $x_0=-3$, $y_0=0$. Запишем уравнение касательной к данной кривой в точке $t_0=3$: $y=\frac{9}{4}(x+3)$ или $9x-4y+27=0$.

Уравнение нормали: $y-y_0=-\frac{1}{y'_0}(x-x_0)$; $y=-\frac{4}{9}(x+3)$, или $4x+9y+12=0$.

Задания для самостоятельной работы

6.8. Составить уравнения касательной и нормали к данной функции в указанной точке:

а) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x_0=4$;

б) $y=\frac{x^5+1}{x^4+1}$, $x_0=1$;

в) $y=\frac{2x}{x^2+1}$, $x_0=1$;

г) $y=\frac{1}{3x+2}$, $x_0=2$;

Ответы

6.8. а) $y=0{,}5x-5$; б) $y=0{,}5x+0{,}5$; в) $y=1$; г) $y=-\frac{3}{64}x+\frac{7}{32}$.

6.4. Дифференциал. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Краткие теоретические сведения

Если для любого достаточно малого Δx выполняется равенство $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где A – постоянная, a – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0. Линейная часть приращения называется *дифференциалом* функции в точке x_0 и обозначается в виде

$dy = A\Delta x$.

Подчеркнем, что дифференциал – это линейная функция от Δx, бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Теорема. Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела производную $f'(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была дифференцируемой в точке x_0, при этом $dy = f'(x_0)dx$.

На рисунке 7 изображен график некоторой дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0. Точки B и D на графике функции имеют соответственно координаты $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

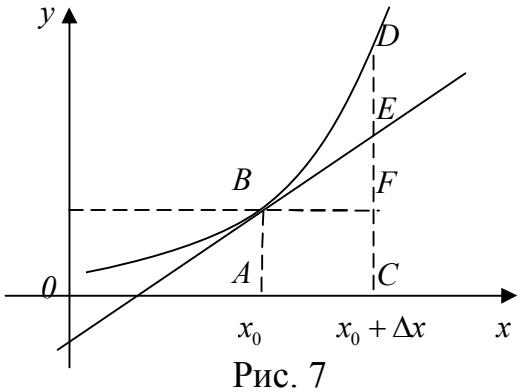


Рис. 7

Выражения $\Delta x, f(x_0), f(x_0 + \Delta x), \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ геометрически означают длины следующих отрезков: AC, AB, DC, DF. Треугольник BEF ограничен горизонтальной линией BF, вертикальной линией EF и касательной BE к графику функции в точке B. В силу геометрического смысла производной имеем: $f'(x_0) = tg \angle FBE$; но тогда $f'(x_0)\Delta x = dy$ есть длина отрезка EF. Таким образом, с геометрической точки зрения дифференциал равен приращению ординаты касательной от точки x_0 до точки $x_0 + \Delta x$.

Заметим, что разделение приращения функции Δy на две части: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ соответствует разделению отрезка DF: $DF = FE + ED$. Длина отрезка EF, как уже отмечалось, равна значению

дифференциала, а длина отрезка ED – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

В равенстве $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ функция $\alpha \cdot \Delta x\ \alpha$ является б.м.в. более высокого порядка, чем Δx, следовательно, имеет смысл говорить о приближенных равенствах (при малых $|\Delta x|$):

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, или $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Формула $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ важна в задачах, когда известны значения функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$ в точке x_0 и требуется вычислить значение функции $f(x)$ в некоторой близкой к x_0 точке x.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти дифференциал функции $f(x) = e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

Решение. Сначала найдем первую производную исходной функции:

$$f'(x) = e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)' = e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{(1-\cos x)'(1+\cos x) - (1+\cos x)'(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{\sin x(1+\cos x) + \sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2} = e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}.$$

Далее в силу равенства $df(x) = f'(x)dx$ получим

$$df(x) = e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2} dx.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции, заданной неявно $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1$.

Решение. Найдем дифференциал обеих частей равенства. Получим $2xdx + 2ydy + 2xy^2dx + x^2 2ydy = 0$. Отсюда выразим дифференциал dy:

$$dy = -\frac{2xdx + 2xy^2dx}{2y + 2x^2y} = -\frac{x}{y}\frac{1+y^2}{1+x^2}dx.$$

Пример 3. Вычислить приближенно значение $\sin 32^\circ$.

*Решение***.** Воспользуемся формулой $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Для этого определим функцию $f(x) = \sin x$ и положим $x = 32^\circ$, $x_0 = 30^\circ$ или в радианах $x = \frac{32\pi}{180}$ и $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Тогда, учитывая, что $(\sin x)' = \cos x$, получим

$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x - x_0)$, или

$$\sin 32^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{32\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \approx 0{,}5 + \frac{1{,}73 \cdot 3{,}14}{90} \approx$$

$$\approx 0{,}5 + 0{,}03 = 0{,}53.$$

Для сравнения: имеет место равенство $\sin 32^\circ = 0{,}5299$ с четырьмя верными знаками.

Пример 4. Вычислить приближенно $\sqrt{24{,}89}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и выберем $x_0 = 25$, $x = 24{,}89$. Найдем:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(x_0) = \sqrt{25} = 5, \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = 0{,}1.$$

Тогда $f(24{,}89) = \sqrt{24{,}89} \approx 5 + 0{,}1 \cdot (-0{,}11) = 5 - 0{,}011 = 4{,}989$. Для сравнения: приближенно $\sqrt{24{,}89} = 4{,}988987873$ с точностью до 9-го знака после запятой.

Задания для самостоятельной работы

6.9. Найти дифференциал функции:

а) $y = \arccos\left(1/\sqrt{1+2x^2}\right)$;

б) $y = x^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$;

в) $y = \cos x \cdot \operatorname{lntg} x$;

г) $y = x \operatorname{arctg} x$;

Д) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}$;

е) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-2}}$;

Ж) $y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right)$;

з) $y = \arccos\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

6.10. Найти дифференциал функции, заданной неявно:

а) $x^3 - 2y^2 + 5 = 0$;

б) $y = x^2 - y^2$;

в) $y = x^3 + y^3 - 3y$;

г) $y = y^3 - x^3$;

д) $x + y - 7xy = 0$;

е) $x^3 + y^3 = 2y$;

ж) $x^2 + y^2 = R^2 \cdot y$;

з) $3x^2 - 5xy + y^3 = 0$.

6.11. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt[4]{17}$;

б) $\sqrt[3]{26{,}97}$;

в) $\operatorname{arctg} 1{,}02$;

г) $\ln 1{,}01$;

д) $\lg 10{,}08$;

е) $\operatorname{tg} 44^\circ 52'$;

ж) $e^{0{,}2}$;

з) $\arcsin 0{,}48$.

Ответы

6.9. а) $dy = \dfrac{\sqrt{2}dx}{1+2x^2}$; б) $dy = \dfrac{2\sqrt{x^2-1}\cdot arctg\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}dx$;

в) $dy = \dfrac{-\ln tgx + \cos^2 x \ln tgx + 1}{\sin x}dx$; г) $dy = \dfrac{x^2 arctgx + arctgx + x}{1+x^2}dx$; д) $dy = \dfrac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$;

е) $dy = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2}\cdot(x-2)^{-2}\,dx$; ж) $dy = \frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}-1}}\cdot\left(e^x+\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\right)dx$;

з) $dy = -\frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}dx$. **6.10.** а) $dy = \frac{3x^2}{4y}dx$; б) $dy = \frac{2x}{1+2y}dx$; в) $dy = \frac{3x^2}{4-3y^2}dx$;

г) $dy = \frac{3x^2}{3y^2-1}dx$; д) $dy = \frac{3x^2}{1-7x}dx$; е) $dy = \frac{3x^2}{2-3y^2}dx$; ж) $dy = \frac{2x}{3y^2-5x}dx$;

з) $dy = \frac{5y-6x}{3y^2-5x}dx$.

6.5. Правило Лопиталя

Краткие теоретические сведения

Это правило нахождения некоторых пределов функций при помощи производных. Правило Лопиталя задается следующей теоремой.

Теорема. Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки a, 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (или ∞), 3) $g(x)\neq 0$ и $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ и верно равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Теорема верна и для случая $a=\infty$ $(+\infty;-\infty)$.

Замечание. Теорема верна и для случая $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

Замечание. Из условий теоремы следует, что функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ является неопределенностью вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ (или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$) при $x\to a$, следовательно, теорема позволяет в некоторых случаях раскрыть эти неопределенности.

Часто правило Лопиталя применяется повторно следующим образом. Пусть при выполнении условий 1–3 теоремы $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ является неопределенностью вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ (или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$). Тогда правило Лопиталя применяется повторно к $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ и т.д. Если после нескольких повторных применений пра-

вила будет получено конечное или бесконечное значение предела, то оно будет равно $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Для раскрытия неопределенностей типа $[0\cdot\infty]$ необходимо преобразовать соответствующее произведение $f(x)\cdot g(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, например, $\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ (вид $\left[\dfrac{0}{0}\right]$) или $\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ (вид $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$).

В случае неопределенности вида $[\infty-\infty]$ необходимо преобразовать соответствующую разность $f(x)-g(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, в произведение $f(x)\left[1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$ и раскрыть сначала неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$;

если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, то следует привести выражение к виду $\dfrac{1-\dfrac{g(x)}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}$ (вид $\left[\dfrac{0}{0}\right]$).

Неопределенности видов $[1^{\infty}]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ раскрываются с помощью предварительного логарифмирования и нахождения предела степени $[f(x)]^{g(x)}$. Эти неопределенности сводятся к случаю неопределенности $[0\cdot\infty]$, при этом используется тождество $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.

Примеры решения типовых задач

Пример. Найти с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+x)-2\sin x+x^2}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to +0} x\ln(\sin x)$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+x)-2\sin x+x^2}{x^3}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2\ln(1+x)-2\sin x+x^2)'}{(x^3)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2}{1+x}-2\cos x+2x}{3x^2}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1}{1+x}-\cos x+x\right)'}{(x^2)'}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-1}{(1+x)^2}+\sin x+1}{2x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$

$\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{-1}{(1+x)^2}+\sin x+1\right)'}{(x)'}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-1\cdot(-2)}{(1+x)^3}+\cos x}{1}=\dfrac{2+1}{3}=1.$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+x)-2\sin x+x^2}{x^3}=1$.

При решении этого примера правило Лопиталя фактически было применено трижды (в тех местах, где над знаком равенства указан вид неопределенности). При этом для обеспечения строгости рассуждений необходимо каждый раз проверять условия сформулированного выше утверждения.

б) При $x\to+0$ $(x\to 0, x>0)$ $\sin x\to+0$ и $\ln\sin x\to-\infty$. Это неопределенность вида $[0\cdot\infty]$, к которой правило Лопиталя не применяется, однако можно учесть, что если $f(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$ функция, то $\dfrac{1}{f(x)}$ будет бесконечно большой при $x\to a$. Поскольку $x\ln\sin x=\dfrac{\ln\sin x}{x^{-1}}$,то мы приходим к неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ и далее действуем так, как при решении задания *а*. Обе функции требуемым условиям удовлетворяют, поэтому

$$\lim_{x\to+0}x\ln(\sin x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to+0}\frac{(\ln\sin x)'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{x\cos x}{1}=1\cdot\lim_{x\to+0}x\cos x=0.$$

Задания для самостоятельной работы

6.12. Вычислить пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+7x-5}{x^3+2x^2-9x+6}$, $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x^2+3x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-7\sin x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\ln x$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 4x}$, $\lim\limits_{x\to+0}x\ln^2 x$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln x$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+0}x^2\ln^2 x$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-10x+9}{(x-1)^2}$, $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[4]{x}\ln x$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin x}$, $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}\ln(\sin x)$.

6.13. Вычислить пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to+0}x^x$;

г) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Ответы

6.12. а) –2, ∞; б) $\frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}$, 0; в) 0, 0; г) $\frac{1}{2}$, 0; д) $-\frac{1}{2}$, 0; е) $-\frac{1}{2}$, 0; ж) 45, 0; з) 3, 0.

6.13. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 1; г) $\sqrt[3]{e}$; д) е; е) 1; ж) 1; з) $e^{-\frac{1}{6}}$.

6.6. Промежутки монотонности и экстремумы функций

Краткие теоретические сведения

Определение. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в промежутке X из области определения, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

На рисунке 8а функция возрастает в интервалах $(a;b)$, $(c;d)$, убывает в $(b;c)$.

Под *монотонностью* понимается либо возрастание, либо убывание.

Теорема 3 (достаточное условие монотонности). Если функция $f(x)$ дифференцируема в промежутке X и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in X$, то $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) в промежутке X.

Определение. Точка x_0 называется *точкой минимума* (*максимума*) функции $y = f(x)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и для каждой точки $x = x_0$ этой окрестности $f(x) > f(x_0)$ (соответственно $f(x) < f(x_0)$). Значение функции $f(x_0)$ называется *минимумом* (соответственно *максимумом*).

На рисунке 8а: b – точка максимума, c – точка минимума.

Под *экстремумом функции (локальным)* понимается либо минимум функции, либо её максимум.

Определение. Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$, называется *стационарной точкой*, если $f(x)$ дифференцируема в x_0 и $f'(x_0) = 0$.

Определение. Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$, называется *критической точкой*, если $f(x)$ не дифференцируема в x_0.

На рисунке 8б точка x_0 – критическая, а на рисунке 8в точка x_0 – стационарная.

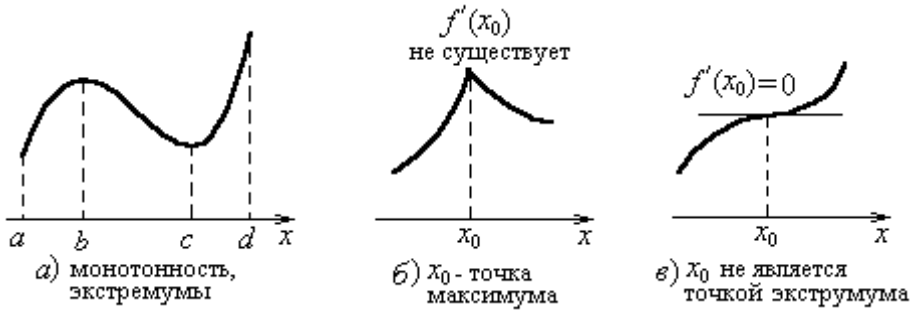


Рис. 8

Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то она является стационарной ил критической точкой этой функции.

На рисунке 8б критическая точка x_0 является точкой экстремума, а на рисунке 8в стационарная точка x_0 не является точкой экстремума. Таким образом, не всякая критическая или стационарная точка является точкой экстремума.

Первое достаточное условие экстремума. $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в $\overset{\circ}{S}(x_0)$. Пусть x_0 – стационарная или критическая точка функции $y=f(x)$. Если в некоторой окрестности точки x_0 слева от x_0 производная $f'(x)$ принимает один знак, а справа от x_0 – противоположный, то x_0 – точка экстремума. При этом если слева $f'(x)>0$, справа $f'(x)<0$, то x_0 – точка максимума, в противном случае x_0 – точка минимума. Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 производная $f'(x)$ имеет постоянный знак, то x_0 не является точкой экстремума. Если к тому же $f(x)$ непрерывна в x_0, то функция монотонна в этой окрестности (рис. 8в).

Второе достаточное условие экстремума. Пусть $f'(x_0)=0$ и существует $f''(x_0)$. Тогда если $f''(x_0)>0$, то x_0- точка минимума. Если же $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума.

Вторым достаточным условием экстремума удобно пользоваться, если достаточно сложно установить знак первой производной в окрестности точки экстремума.

Примеры решения типовых задач

При решении задач на определение экстремумов функции одного переменного придерживаются следующей схемы:

1) Установить область определения функции $y=f(x)$.

2) Найти ее первую производную.

3) Найти стационарные и критические точки.

4) Применить к каждой точке достаточное условие существования экстремума для решения вопроса о его наличии.

Пример 1. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{x^2-4x}$ на экстремум и монотонность.

Решение. Область определения – множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$.

1) Находим производную функции:

$$y'=\left(\left(x^2-4x\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^2-4x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2-4x\right)'=\frac{2x-4}{3\sqrt[3]{\left(x^2-4x\right)^2}}.$$

2) Найдем стационарные и критические точки. Решим уравнение $y'=0$: $2x-4=0\Leftrightarrow x=2$ – стационарная; y' не существует при $\sqrt[3]{x^2-4x}=0\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow x(x-4)=0\Leftrightarrow x=0$ или $x=4$. Эти точки входят в область определения функции, следовательно, являются критическими.

3) Разобьем область определения $\mathbb{R}$ точками 0, 2, 4 на интервалы $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;4)$, $(4;+\infty)$, в каждом из которых производная сохраняет знак. Найдем знаки производной в этих интервалах (см. рис. 9).

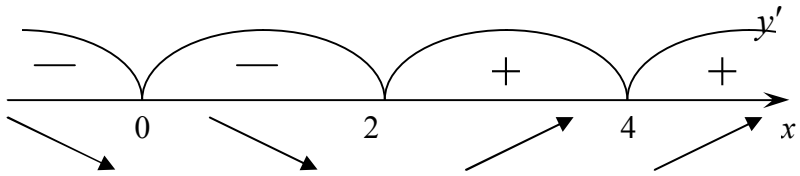


Рис. 3

4) Функция убывает в интервалах $(-\infty;0)$ и $(0;2)$, возрастает в интервалах $(2;4)$ и $(4;+\infty)$. Однако можно сделать более сильный вывод. В самом деле, в окрестностях критических точек $x=0$ и $x=4$ производная не меняет знака, значит, они не являются точками экстремума. Функция убывает в интервале $(-\infty;2)$ и возрастает в интервале $(2;+\infty)$.

5) Стационарная точка $x=2$ является точкой минимума. Тогда $y_{\min}=y(2)=\sqrt[3]{2^2-4\cdot 2}=\sqrt[3]{4-8}=-\sqrt[3]{4}$.

Пример 2. Найти экстремумы функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$.

Решение. Данная функция определена для всех действительных чисел, кроме $x=-2$. Дифференцируя частное, получим

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-1\cdot x^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}.$$

Очевидно, что производная также определена при всех x, кроме $x=-2$. Из уравнения $x^2+4x=0$ находим стационарные точки: $x_1=-4$, $x_2=0$.

Разобьем область определения $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$ точками $x=0$ и $x=-4$ на интервалы $(-\infty;-4)$, $(-4;-2)$, $(-2;0)$, $(0;+\infty)$, в каждой из которых производная сохраняет знак. Найдем знаки производной в этих интервалах (см. рис. 10).

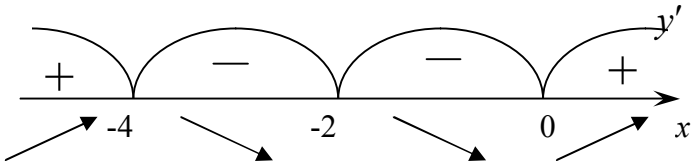


Рис. 10

Функция убывает в интервалах $(-4;-2)$ и $(-2;0)$, возрастает в интервалах $(-\infty;-4)$ и $(0;+\infty)$. Кроме того, в окрестностях стационарных точек $x=0$ и $x=-4$ производная меняет знак, значит, они являются точками экстремума) Таким образом, $x=-4$ – точка максимума и $f_{\max}=f(-4)=-8$, $x=0$ – точка минимума ($f_{\min}=f(0)=0$).

Задания для самостоятельной работы

6.14. Исследовать функцию на экстремум и монотонность:

а) $y=\sqrt[3]{\left(x^2-4x+3\right)^2}$;

б) $y=\sqrt[3]{x^2\left(x+2\right)^2}$;

в) $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$;

г) $y=\dfrac{x^2}{\left(x-1\right)^2}$;

д) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$;

е) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$;

ж) $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$;

з) $y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$.

Ответы

6.14. б) x=1, x=3 – точки минимума, x=2 точка максимума, функция возрастает при $x\in(1;\,2),\,(3;+\infty)$, убывает при $x\in(-\infty;\,1),(2;\,3)$; в) x=0, x=–2 – точки минимума, x=–1 точка максимума, функция возрастает при $x\in(-2;\,-1),\,(0;\,+\infty)$; убывает при $x\in(-\infty;\,-2),\,(-1;\,0)$; г) x=0 – точка минимума, функция возрастает при $x\in(-\infty;\,0),\,(1;\,+\infty)$, убывает при $(-\infty;\,0),\,(1;\,+\infty)$; е) x=2 – точка минимума, функция возрастает при $x\in(-\infty;\,0),\,(2;\,+\infty)$; убывает при $(0;\,2)$; з) x =–4 – точка максимума, функция возрастает при $x\in(-\infty;-4)$, убывает при $x\in(-4;\,0),\,(0;+\infty)$.

6.7. Наибольшее и наименьшее значения функции на числовом промежутке

Краткие теоретические сведения

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Если $f(x)$ непрерывна на этом отрезке, то существуют точки $x_1 \in [a;b]$ и $x_2 \in [a;b]$, в которых функция достигает своего максимального и минимального значений (на отрезке!). Этими точками могут быть либо внутренние критические точки (из $(a;b)$), либо граничные. Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ на числовом отрезке придерживаются следующего алгоритма.

1) Найти первую производную $f'(x)$.

2) Найти стационарные и критические точки функции $f(x)$ и выбрать те из них, которые попадают в отрезок $[a;b]$.

3) Сравнить значения функции в найденных точках и на границах (т.е. в точках $x = a$, $x = b$). Выбрать наибольшее и наименьшее значения, эти значения являются наибольшими и наименьшими значениями $f(x)$ на $[a;b]$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a;b)$. В этом случае не гарантируется существование наибольшего и наименьшего значений у функций. После определения стационарных и критических точек и значений функции в них, необходимо изучить поведение функции при $x \to a + 0$ и $x \to b - 0$. Сравнивая полученные значения, получают наибольшее или наименьшее значения функции или обосновывается факт отсутствия таких значений.

В случае бесконечных промежутков $(a;+\infty)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;a)$ и др. схема исследований аналогична. Наибольшее и наименьшее значения функции на числовом промежутке называют *глобальными экстремумами* функции.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2$ на отрезке $[1;4]$.

Решение. $f'(x) = 4x^2 - 6x = 2x(2x-3)$, причем производная определена всюду, критических точек нет. Чтобы найти стационарные точки, приравниваем производную к нулю: $2x(2x-3) = 0$. Итак, $x = 3/2$ и $x = 0$ – стационарные точки. При этом $3/2 \in [1;4]$, а $0 \notin [1;4]$, поэтому последняя точка нас не интересует. Вычисляем значения исходной функции в вы-

бранной точке и на концах отрезка: $f(1)=\frac{4}{3}-3=-\frac{5}{3}$;

$f(\frac{3}{2})=\frac{4\cdot 27}{3\cdot 8}-\frac{3\cdot 9}{4}=\frac{9}{2}-\frac{27}{4}=-\frac{9}{4}$; $f(4)=\frac{4\cdot 64}{3}-3\cdot 16=\frac{112}{3}$.

Сравнивая значения, получаем: $\min\limits_{x\in[1;4]} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$,

$\max\limits_{x\in[1;4]} f(x)=f(4)=\frac{112}{3}$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}$ в интервале $(0;3)$.

Решение. $f'(x)=\left(\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^2-2x\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot(2x-2)=\frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2-2x}}$,

причем производная не существует при $x=0$ и $x=2$. Эти точки являются критическими. Чтобы найти стационарные точки, приравниваем производную к нулю: $4(x-1)=0$, т.е. $x=1$. Итак, $x=1$- стационарная точка. При этом $1\in(0;3)$ и $2\in(0;3)$, а $0\notin(0;3)$, поэтому последняя точка нас не интересует. Вычисляем значения исходной функции в выбранных точках:

$f(1)=\sqrt[3]{\left(1^2-2\cdot 1\right)^2}=1$, $f(2)=\sqrt[3]{\left(2^2-2\cdot 2\right)^2}=0$.

Находим предельные значения функции на границах интервала:

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}=0$;

$f(3-0)=\lim\limits_{x\to 3-0}\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}=3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{9}\approx 2{,}08$.

Эти значения в точках $x=0$ и $x=3$ функция не достигает, поскольку эти точки не принадлежат интервалу $(0;3)$.

Сравнивая $f(1)=1$, $f(2)=0$, $f(0+0)=0$ и $f(3-0)\approx 2{,}08$, получаем $\max\limits_{x\in(0;3)} f(x)$ не существует, $\min\limits_{x\in(0;3)} f(x)=f(2)=0$.

При решении **задач практического характера** полезно пользоваться следующим фактом.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на открытом числовом интервале $(a;b)$ и имеет на нем единственную стационарную точку x_0. Если x_0 – точка локального максимума, то $\max\limits_{x\in(a;b)} f(x)=f(x_0)$; если x_0 - точка локального минимума, то $\min\limits_{x\in(a;b)} f(x)=f(x_0)$

Пример 3. Предприятие выпускает некий товар в объеме, превосходящем 1 кг. Прибыль (в у.е.) зависит от объема выпущенного товара (x) и

определяются формулой $F(x) = -x^3 + 20x^2 - 13x - 4$. Найти объем производства товара, при котором прибыль будет максимальна.

Решение. В силу условий задачи функция, максимум которой нас интересует, определена на интервале $(1;+\infty)$. Найдем производную этой функции и приравняем к нулю: $F'(x) = -3x^2 + 40x - 13 = 0$. Решив квадратное уравнение, получим два корня: $x_1 = 13,\ x_2 = 1/3$. Очевидно, что условию задачи удовлетворяет только первое значение ($13 > 1,\ 1/3 < 1$). Сравнив знаки производной слева и справа от точки $x_1 = 13$, получим, что это точка максимума. Находим максимальное значение $F(x)$ на заданном интервале: $\max\limits_{x\in(1;+\infty)} F(x) = F(13) = -13^3 + 20\cdot 13^2 - 13\cdot 13 - 4 = 1010$.

Итак, при объеме производства в 13 единиц прибыль будет максимальной и составит 1010 у.е.

Пример 4. Определить наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R.

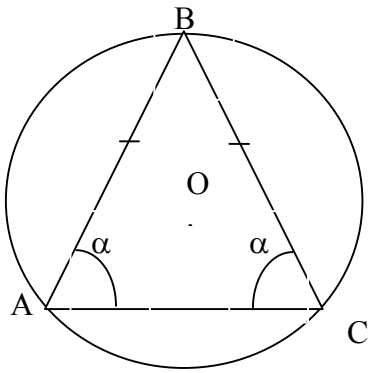


Рис. 11

Решение. Пусть $AB = BC$ и $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle ABC = \pi - 2\alpha$, α – острый угол. Из теоремы синусов имеем

$AB = BC = 2R\sin\alpha$, а $AC = 2R\sin(\pi - 2\alpha) = 2R\sin 2\alpha$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha \cdot 2R\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha =$$

$$= 2R^2 \sin^2\alpha \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 4R^2 \sin^3\alpha\cos\alpha .$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\alpha = \frac{2}{2}\cdot R\sin\alpha \cdot 2R\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha = 2R^2 \sin^2\alpha \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= 4R^2 \sin^3\alpha\cos\alpha .$$

$S' = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ – стационарная точка функции $S(\alpha)$.

$$S''(\alpha) = 4R^2(\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha\cdot\cos 2\alpha)' = 4R^2(2\sin\alpha\cos\alpha +$$

$$+2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha + 2\cdot 2\sin^2\alpha\cdot(-\sin 2\alpha)) =$$

$$= 4R^2\sin 2\alpha(1 + 2\cos 2\alpha - 4\sin^2\alpha)$$

$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right)=4R^2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\left(1+2\cos\frac{2\pi}{3}-4\sin^2\frac{\pi}{3}\right)=4R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1-2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)<0$$

$\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$ – точка локального максимума, так как функция $S(\alpha)$ непрерывна на $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ и имеет единственную точку локального максимума, то в этой точке обязательно достигается наибольшее значение функции на этом интервале. Найдем $S_{наиб}=4R^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ (кв.ед.).

Задания для самостоятельной работы

6.15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

а) $y=\frac{4x}{4+x^2}$, $[-3;3]$;

б) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $[-1;1]$;

в) $y=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$, $[1;4]$;

г) $y=2\sqrt{x}-x$, $[0,\ 4]$;

д) $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$, $[-2,\ 4]$;

е) $y=2\sqrt{x-1}-x+2$, $[1,\ 5]$;

ж) $y=-\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$, $[-5,\ 1]$;

з) $y=-\frac{10x+10}{x^2+2x+2}$, $[-1,\ 2]$.

6.16. Найти наибольшее и наименьшее значения на указанном промежутке:

а) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $[1;9)$;

б) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$, $(2;1]$;

в) $y=xe^{-x^2}$, $(0;2]$;

г) $y=8x+\frac{4}{x^2}-15$, $(0;2]$;

д) $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8$, $[-4;0)$;

е) $y=\frac{4}{x^2}-8x-15$, $[-2;0)$;

ж) $y=\sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$, $(0;2]$;

з) $y=x^2-2x+\frac{16}{x-1}-13$, $[0;1)$.

6.17. Решить задачи:

а) Имеется 200 метров железной решетки, которой надо огородить с трех сторон площадку, примыкающую четвертой стороной к длинной каменной стене. Каковы должны быть размеры площадки, чтобы она имела наибольшую площадь?

б) Кровельщику надо сделать открытый желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Как дно, так и бока желоба

имеют ширину 10 см. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее возможное количество воды?

в) Консервная коробка цилиндрической формы с дном и крышкой должна вмещать V см в кубе. Каковы должны быть размеры коробки, чтобы на ее изготовление пошло наименьшее количество материала?

г) Бак без крышки с квадратным основанием должен вмещать V литров воды. Каковы должны быть размеры бака, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала?

д) Из квадратного листа жести со стороной a надо изготовить открытый сверху ящик. Для этой цели по углам листа вырезают равные квадраты и образовавшиеся края загибают сверху. Какого размера следует сделать вырезы, чтобы полученный ящик имел наибольшую вместимость?

е) Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу основания, чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

ж) Из полосы жести шириной 60 см, требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 10 см. Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

з) Стрела прогиба балки прямоугольного поперечного сечения обратно пропорциональна произведению ширины этого сечения на куб его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, с наименьшей стрелой прогиба (наибольшей жесткости)?

Ответы

6.15. б) $\max\limits_{[-1,1]} y = 0$, $\min\limits_{[-1,1]} y = -1$; г) $\max\limits_{[0,4]} y = 1$, $\min\limits_{[0,4]} y = 0$; е) $\max\limits_{[1,5]} y = 2$, $\min\limits_{[1,5]} y = 1$; з) $\max\limits_{[-1,2]} y = 0$, $\min\limits_{[-1,2]} y = -5$. **6.16.** а) $\min\limits_{[1,9)} y = 0$, $\max\limits_{[1,9)} y$ не существует; б) $\min\limits_{(2,1]} y$ не существует, $\max\limits_{(2,1]} y = e$; г) $\min\limits_{(2,1]} y = 3$, $\max\limits_{(2,1]} y$ не существует; з) $\min\limits_{[0,1)} y$ не существует, $\max\limits_{[0,1)} y = -2$.

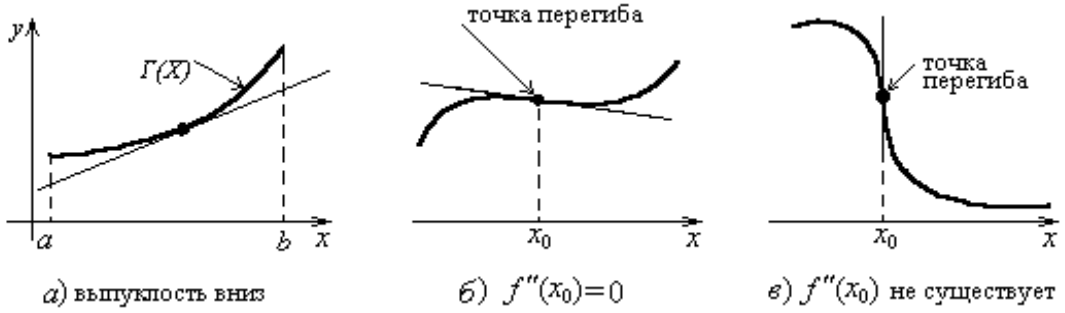
6.8. Направления выпуклости графика функции одного переменного. Точки перегиба

Краткие теоретические сведения

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную или бесконечную производную в каждой точке интервала $X = (a;b)$. Обозначим $\Gamma(X)$ дугу графика функции $f(x)$, соответствующую интервалу X.

Определение. Если дуга $\Gamma(X)$ лежит не ниже (не выше) касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в любой точке $M \in \Gamma(X)$, то функция называется *выпуклой* (соответственно *вогнутой*) в интервале X (рис. 12а).

Точка на графике функции, в которой существует касательная к графику функции, называется *точкой перегиба* функции или графика функции, если она является границей дуг графика с разными направлениями выпуклости (рис. 12б, в).



а) выпуклость вниз *б)* $f''(x_0)=0$ *в)* $f''(x_0)$ не существует

Рис. 12

Заметим, что в точке перегиба требуется существование касательной к графику.

Теорема (достаточное условие выпуклости вверх и вниз). Если функция $f(x)$ дифференцируема дважды в интервале X и в нём $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то $f(x)$ является выпуклой вниз (соответственно выпуклой вверх) в интервале X.

Необходимое условие точки перегиба. Если $M_0(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба функции $f(x)$, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует (рис. 12б, в). Следовательно, абсциссы точек перегиба нужно искать в тех значениях *x*, при которых вторая производная либо равна нулю, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ имеет производную (может быть бесконечную) в точке x_0, существует вторая производная в проколотой окрестности точки x_0 и либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует. Тогда если при переходе через x_0 $f''(x)$ меняет знак, то $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба.

Примеры решения типовых задач

При исследовании функции на выпуклость и вогнутость функции придерживаются следующей схемы:

1) Установить область определения функции $y = f(x)$.

2) Найти вторую производную $f''(x)$.

3) Выяснить, в каких точках из области определения вторая производная обращается в нуль (т.е. решить уравнение $f''(x)=0$) или не существует.

4) Установить знак второй производной на числовых интервалах, на которые найденные точки разбили область определения, и определить направления выпуклости (если $f''(x)<0$, то график функции направлен выпуклостью вверх, т.е. $\cap$; если $f''(x)>0$ – выпуклостью вниз, т.е. $\cup$).

5) Если при переходе через найденную точку x_0 направление выпуклости меняется и существует $f'(x)$, то точка $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ на выпуклость, вогнутость, найти точки перегиба.

Решение. 1) Функция определена при всех действительных значениях x, таких, что $x^2-4\neq 0$, т.е. $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

2) Найдем вторую производную.

$$y'=\left(\frac{x}{x^2-4}\right)'=\frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}=-\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2},$$

$$y''=-\frac{2x(x^2-4)^2-2(x^2-4)2x(x^2+4)}{(x^2-4)^4}=-\frac{2x(x^2-4)^2-2(x^2-4)2x(x^2+4)}{(x^2-4)^4}=$$

$$=-\frac{2x(x^2-4-2x^2-8)}{(x^2-4)^3}=\frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

$y''=0$ при $x=0$. y'' не существует при $x=\pm 2$, но эти точки не входят в область определения функции, поэтому они не могут быть абсциссами точек перегиба.

3) Разобьем область определения точкой $x=0$ на интервалы $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$, в каждом из которых вторая производная сохраняет знак.

Определим знак второй производной в каждом из этих интервалов (см. рис. 13).

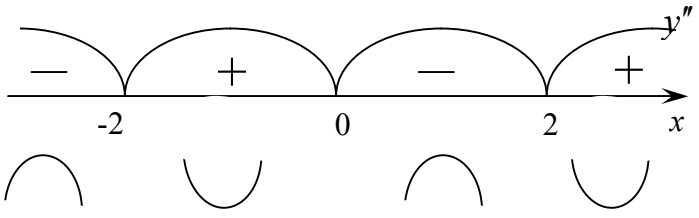


Рис. 13

4) Функция выпукла вверх в интервалах $(-\infty;-2)$, $(0;2)$; выпукла вниз в интервалах $(-2;0)$, $(2;+\infty)$.

5) В интервалах $(-2;0)$, $(0;2)$ y'' имеет разные знаки. Значит, точка $(0;0)$ является точкой перегиба графика функции.

Задания для самостоятельной работы

6.18. Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость, найти точки перегиба графика функции:

а) $y=\dfrac{17-x^2}{4x-5}$;

б) $y=\dfrac{2x^2-5}{x-2}$;

в) $y=\dfrac{2x^3+2x^2-3x-1}{2-4x^2}$;

г) $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$;

д) $y=\dfrac{2x^3-3x^2-2x+1}{1-3x^2}$;

е) $y=\dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}$;

ж) $y=\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}$;

з) $y=\dfrac{3x^2-10}{\sqrt{4x^2-1}}$.

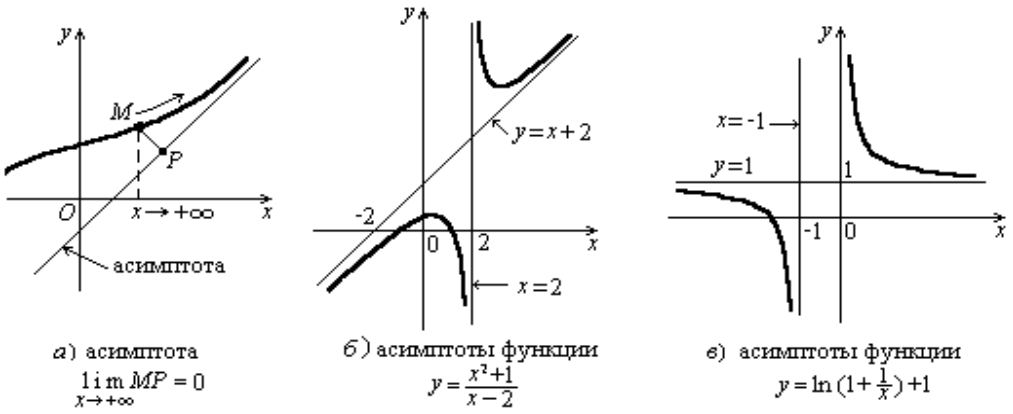
Ответы

6.18. а) функция выпуклая вверх при $x\in\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right)$ и выпукла вниз при $x\in\left(\dfrac{5}{4};+\infty\right)$, точек перегиба нет; б) функция выпуклая вверх при $x\in(-\infty;2)$ и выпукла вниз при $x\in(2;+\infty)$, точек перегиба нет; в) функция выпуклая вверх при $x\in\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и выпукла вниз при $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right),\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$, $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ – точка перегиба; г) функция выпуклая вверх при $x\in\left(-\infty;-\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right),\left(0;\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$ и выпукла вниз при $x\in\left(-\sqrt{\dfrac{5}{3}};0\right),\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}};+\infty\right)$, $(0;0)$ – точка перегиба; д) функция выпуклая вверх при $x\in\left(-\infty;-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right),\left(0;\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$ и выпукла вниз при $x\in\left(-\sqrt{\dfrac{1}{3}};0\right),\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}};+\infty\right)$, $(0;1)$ – точка перегиба; е) функция выпуклая вверх при $x\in\left(-\infty;-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right),\left(0;\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ и выпукла вниз при $x\in\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}};0\right),\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}};+\infty\right)$, $(0;-1)$ – точка перегиба; ж) функция выпуклая вверх при $x\in\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ и выпукла вниз при $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$, точек перегиба нет; з) функция выпуклая вверх при $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

6.9. Асимптоты графика функции

Краткие теоретические сведения

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x; y)$ кривой до прямой $y = kx + b$ стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат (т.е. стремление хотя бы одной из координат точки к бесконечности). Пример показан на рисунке 14а.



а) асимптота $\lim\limits_{x \to +\infty} MP = 0$

б) асимптоты функции $y = \frac{x^2+1}{x-2}$

в) асимптоты функции $y = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1$

Рис. 14

Нахождение вертикальных асимптот. Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ бесконечен, то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Например, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$, то точка графика при $y \to -\infty$ бесконечно близко приближается к вертикальной асимптоте $x = x_0$ с левой стороны (рис. 8 *в*), $x_0 = -1$).

Нахождение горизонтальных асимптот. Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ (или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$), то прямая $y = y_0$ является горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$).

Нахождение наклонных асимптот. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$, где угловой коэффициент $k \neq 0$. Коэффициенты k и b при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) находят по формулам:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Замечание. В формулах подразумевается, что оба предела существуют и конечны. Если хотя бы один из них не существует, то наклонной асимптоты у графика функции нет.

Замечание. Если пределы конечны и $k = 0$, то график имеет горизонтальную асимптоту $y = b$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$). Поэтому если сущест-

вует горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, то нет наклонной асимптоты при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Примеры решения типовых задач

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.

Решение. Точка $x = 2$ является точкой разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2+1}{x-2} = -\infty,, \ \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2+1}{x-2} = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой при $y \to +\infty$ и $y \to -\infty$.

Найдем наклонные асимптота:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x-2)} = 1, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-2} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2.$$

Следовательно, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой при $x \to \pm\infty$.

Задания для самостоятельной работы

6.19. Найти асимптоты графика функции:

а) $y = \dfrac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}$;

б) $y = \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 8x - 2}{2 - 3x^2}$;

в) $y = \dfrac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}$;

г) $y = \dfrac{3x^2 - 7}{2x + 1}$;

д) $y = \dfrac{21 - x^2}{7x + 9}$;

е) $y = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 3}}$;

ж) $y = \dfrac{4x^2 + 9}{4x + 8}$;

з) $y = \dfrac{x^2 - 11}{4x - 3}$.

Ответы

6.19. а) $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ – вертикальные асимптоты, $y = \dfrac{x}{3}$ – наклонная асимптота; б) $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ – вертикальные асимптоты, $y = -\dfrac{4}{3} - 1$ – наклонная асимптота; в) $x = \pm\dfrac{1}{2}$ – вертикальные асимптоты, $y = x$ – наклонная асимптота; г) $x = -\dfrac{1}{2}$ – вертикальная асимптота, $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{4}$ – наклонная асимптота; д) $x = -\dfrac{9}{7}$ – вертикальная асимптота, $y = -\dfrac{1}{7}x + \dfrac{9}{14}$ – наклонная асимптота; е) $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ – вертикальные асимптоты, $y = \dfrac{1}{4}$ –

горизонтальная асимптота; ж) $x=-2$ – вертикальная асимптота, $y=x-2$ – наклонная асимптота; з) $x=-\frac{3}{4}$ – вертикальная асимптота, $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$ – наклонная асимптота.

6.10. Построение эскиза графика функции одного переменного

Краткие теоретические сведения

Полное исследование функции проводится по следующему плану.

1) Найти область определения функции $y=f(x)$.

2) Проверить наличие у исследуемой функции дополнительных свойств (четность, нечетность, периодичность). В случае, когда, например, функция является нечетной (четной), достаточно проводить исследования и строить эскиз графика при $x\geq 0$ с последующим симметричным его отображением (относительно начала координат для нечетной функции или относительно оси Oy для четной).

3) Определить координаты точек пересечения графика функции с осями координат (для нахождения точки пересечения графика с осью Ox решаем уравнение $f(x)=0$; для нахождения точки пересечения графика с осью Oy подставляем в аналитическое выражение функции значение $x=0$).

4) Найти $f'(x)$ и с ее помощью определить интервалы монотонности функции, точки экстремума и экстремальные значения функции.

5) Найти $f''(x)$, с ее помощью определить направления выпуклости графика функции и найти точки перегиба графика функции.

6) Найти асимптоты графика.

7) Используя все полученные результаты, построить график функции.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Провести полное исследование функции $y=\frac{x^2}{2(x-1)}$

Решение.

1) $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2) $y(-x)=\frac{(-x)^2}{2(-x-1)}=-\frac{x^2}{2(x+1)}$, т.е. $y(-x)\neq -y(x)$ и $y(-x)\neq y(x)$.

Функция является функцией общего вида, непериодической.

3) Так как $\frac{x^2}{2(x-1)}=0 \Leftrightarrow x=0$, то график пересекает оси координат только в точке $(0;0)$.

4) $y'=\frac{2x\cdot 2(x-1)-2x^2}{4(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2}{4(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x}{4(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{2(x-1)^2}$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0$ $x=0$ или $x=2$. y' не существует в точке $x=1$, но она не входит в область определения функции. Следовательно, имеются две стационарные точки: $x=0$ и $x=2$. Разобьем этими точками область определения на интервалы знакопостоянства производной: $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$. Определим знаки производной в этих интервалах (см. рис. 15).

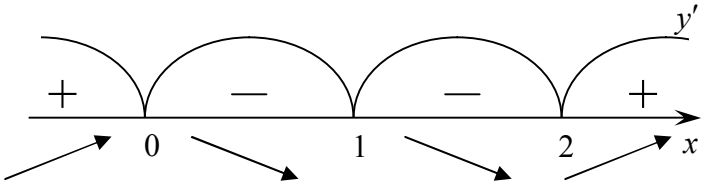


Рис. 15

Используя достаточные условия монотонности и экстремума, можно сделать следующие выводы: функция возрастает в интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$, убывает в $(0;1)$ и $(1;2)$. Значение максимума $y_{\max}=y(0)=0$, значение минимума $y_{\min}=y(2)=2$.

5) $y''=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{2(x-1)^4}=\dfrac{1}{(x-1)^3}$.

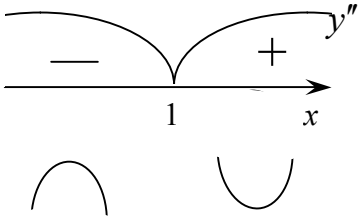


Рис. 16

y'' не обращается в 0, а в точке 1, где y'' не существует, функция не определена, поэтому график функции не имеет точки перегиба. Таким образом, имеются два интервала $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$, знакопостоянства второй производной (см. рис. 16).

В силу достаточных условий выпуклости и вогнутости графика в интервале $(-\infty;1)$ график выпуклый (вверх), а в интервале $(1;+\infty)$ график вогнутый (выпуклый вниз).

6) Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2}{2(x-1)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{2(x-1)}=+\infty$, то прямая $x=1$ – вертикальная асимптота графика функции.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2-2x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2\left(2-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, прямая $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ – наклонная асимптота графика функции при $x\to\pm\infty$.

7) Построим график функции. Сначала изобразим асимптоты $x=1$ и $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (пунктирной линией). Наносим на чертеж точки (0, 0) и (2, 2), найденные в пункте 4. Проводим через эти точки линию, согласно результатам исследования функции в пунктах 4, 5, 6. Еще раз сравниваем полученный график с результатами исследования и убеждаемся в правильности построения графика.

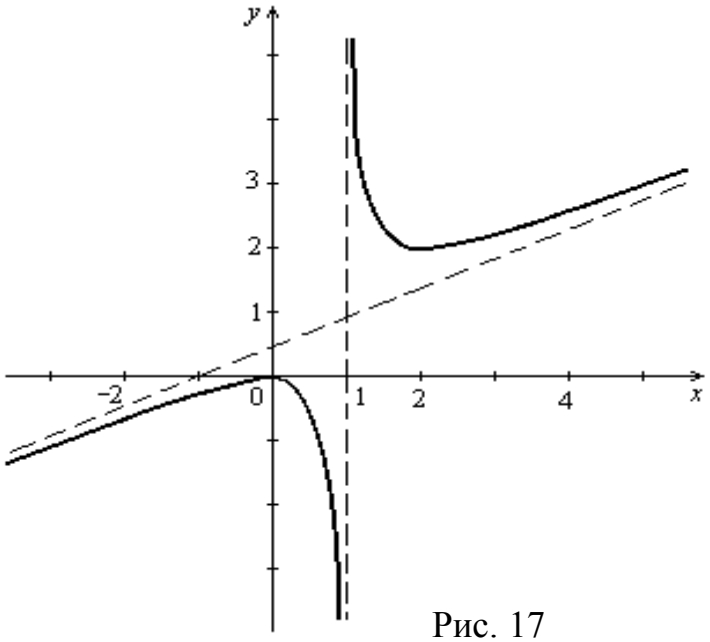


Рис. 17

Пример 2. Провести полное исследование функции $y=(x-2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

Решение.

1) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

2) $y(-x)=\frac{(-x)^2}{2(-x-1)}=-\frac{x^2}{2(x+1)}$, т.е. $y(-x)\neq -y(x)$ и $y(-x)\neq y(x)$.

Функция является функцией общего вида, непериодической.

3) Так как в точке x=0 функция не определена и

$$\lim_{x\to 0+0} y(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-2)e^{-\frac{1}{x}}=0,\ \lim_{x\to 0-0} y(x)=\lim_{x\to 0-0}(x-2)e^{-\frac{1}{x}}=-\infty,$$

то график функции “подходит” справа к началу координат.

Чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Ox, решим уравнение $y(x)=0\Leftrightarrow (x-2)e^{-\frac{1}{x}}=0\Leftrightarrow x=2.$ Значит, график пересекает ось Ox при $x=2$. Обозначим эту точку $C(2;0)$.

4) $y' = (x-2)'e^{-\frac{1}{x}} + (x-2)(e^{-\frac{1}{x}})' = e^{-\frac{1}{x}} + (x-2)e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2+x-2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}.$

$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=-2$ или $x=1.$

Производная не существует в точке $x=0$, но в ней функция не определена, поэтому она не является критической. Таким образом, стационарными являются точки $x=-2$ и $x=1.$

Разобьем стационарными точками область определения на интервалы и нейдем в них знаки производной (см. рис. 18).

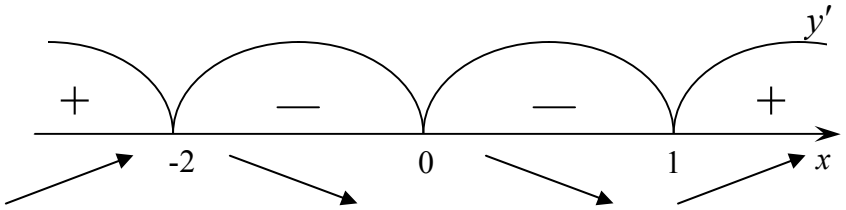


Рис. 18

Таким образом, функция возрастает в интервалах $(-\infty;-2)$ и $(1;+\infty)$, убывает в интервалах $(-2;0)$ и $(0;1)$, $x=-2$ – точка максимума, максимальное значение равно $y_{\max} = y(-2) = -4\sqrt{e} \approx -6,6$ $A(-2;6,6)$, $x=1$ – точка минимума, минимальное значение равно $y_{\min} = y(1) = -1/e \approx -0,37$ $B(1;-0,37)$.

5) $y'' = \left(\frac{x^2+x-2}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2+x-2}{x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' =$

$= \frac{(2x+1)x^2 - (x^2+x-2)\cdot 2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2+x-2}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{5x-2}{x^4}\cdot e^{-\frac{1}{x}}.$

Вторая производная существует во всех точках области определения функции, значит, точка перегиба может быть только при таких значениях x, что $y''=0$. Решив уравнение $\frac{5x-2}{x^4}\cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0$, получим $x = 2/5 = 0,4$. Эта точка разбивает область определения функции на интервалы, в каждом из которых y'' сохраняет знак (см. рис. 19).

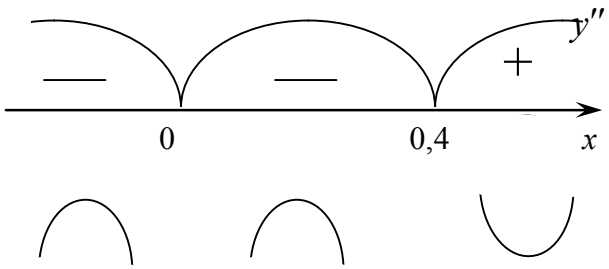


Рис. 19

Таким образом, функция выпукла (вверх) в интервалах $(-\infty;0)$ и $(0;0,4)$, вогнута (выпукла вниз) в интервале $(0,4;+\infty)$, $x=0,4$ является абсциссой точки перегиба, $y(0,4)=-\dfrac{8}{5e^2\sqrt{e}}\approx -0,13$, $D(0,4;0,13)$ – точка перегиба графика функции.

6) Вертикальная асимптота может быть в точке разрыва $x=0$. Найдем односторонние пределы функции в этой точке.

$$\lim_{x\to 0-0}(x-2)e^{-\frac{1}{x}}=-2e^{+\infty}=-\infty,\ \lim_{x\to 0+0}(x-2)e^{-\frac{1}{x}}=-2e^{-\infty}=\frac{-2}{e^{+\infty}}=0.$$

Следовательно, прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой при $x\to 0$ слева.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{x}e^{-\frac{1}{x}}=1\cdot e^0=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}((x-2)e^{-\frac{1}{x}}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}(x(e^{-\frac{1}{x}}-1)-2e^{-\frac{1}{x}})=\lim_{x\to\pm\infty}x(e^{-\frac{1}{x}}-1)-\lim_{x\to\pm\infty}2e^{-\frac{1}{x}}=-3,$$

так как по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}x(e^{-\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{-\frac{1}{x}}-1)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}(-e^{-\frac{1}{x}})=-1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}2e^{-\frac{1}{x}}=2e^0=2.$$

Таким образом, прямая $y=x-3$ является наклонной асимптотой.

7) Строим график функции (рис. 20).

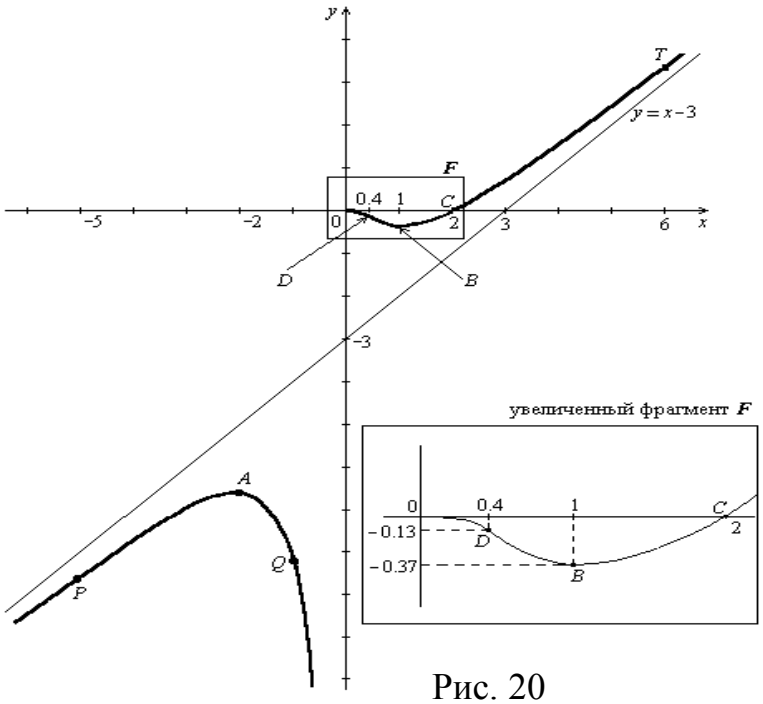


Рис. 20

Задания для самостоятельной работы

6.20. Провести полное исследование функций:

а) $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$;

б) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$;

в) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$;

г) $y = \dfrac{12x}{9 + x^2}$;

д) $y = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$;

е) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$;

ж) $y = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$;

з) $y = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$.

6.21. Провести полное исследование функций:

а) $y = \dfrac{e^{2-x}}{2 - x}$;

б) $y = \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$;

в) $y = 3 - 3\ln\dfrac{x}{x+4}$;

г) $y = \ln\dfrac{x}{x+2} + 1$;

д) $y = (3 - x)e^{x-2}$;

е) $y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}$;

ж) $y = 2\ln\dfrac{x}{x-4} - 3$;

з) $y = \ln\dfrac{x}{x+5} - 1$.

6.11. Приложение дифференциального исчисления к экономической теории

Краткие теоретические сведения

Предельные функции и теория фирм

Рассмотрим несколько из многочисленных приложений математического анализа к экономике, а именно к теории фирм. Мы изучим деятельность отдельной фирмы (или, возможно, целой отрасли промышленности) и ограничим наш анализ периодом времени, во время которого второстепенные условия (такие как поставки сырья, ставки заработной платы, налогов) относительно постоянны. Покажем, как математический анализ помогает менеджерам таких фирм принимать производственные решения. Менеджмент использует многие знакомые нам функции, например, такие как:

$C(x)$ – издержки производства x единиц продукции,

$R(x)$ – общий доход от продажи x единиц продукции,

$P(x) = R(x) - C(x)$ – прибыль от производства и продажи x единиц продукции.

Хотя областью определения этих функций, как правило, является множество неотрицательных целых чисел x=0, 1, 2, 3, …, в экономической теории принято определять их на интервале $(0, \infty)$, соединяя точки графика сплошной линией.

Производные $C'(x)$, $R'(x)$ называют соответственно функциями предельных издержек и предельного дохода. Экономисты используют их, чтобы измерить темп изменения издержек или дохода при увеличении продаж на одну единицу продукции.

Если фирма невелика и конкурирует со многими другими, её продажи имеют весьма малое влияние на рыночную цену товара. Тогда цена продукта является постоянной величиной p, общий доход равен

$R(x)=x\cdot p$,

а предельный доход равен цене $R'(x)=p$ (т.е. увеличение дохода при продаже единицы продукции равно цене этой продукции).

Интересна ситуация, когда фирма является единственным поставщиком определенного продукта (или услуг), т.е. монополистом. Потребители покупают больше продукта при снижении цены, и меньше – при её возрастании. Для каждого объёма продукции x определяют $f(x)$ как самую высокую цену, по которой можно продать потребителям все x единиц продукта. Ясно, что $f(x)$ – убывающая функция. Общий доход от продажи x единиц продукта будет равна

$R(x)=xp=xf(x)$.

График зависимости цены от количества продаваемой продукции $p=f(x)$ называют кривой спроса.

Понятие кривой спроса относится ко всей промышленности (со многими производителями) так же как к единственной монополистической фирме. В этом случае многие производители предлагают на рынке похожую продукцию. Если обозначить x общий объем этого продукта на рынке, то $f(x)$ есть рыночная цена этого продукта и $xf(x)$ есть общий доход от реализации.

Необходимым условием получения фирмой максимальной прибыли является

$P'(x)=R'(x)-C'(x)=0$ или $R'(x)=C'(x)$.

Эластичность

Эластичность функции приближенно показывает, на сколько процентов изменится одна переменная в результате изменения другой переменной на 1%. Эта мера реагирования одной переменной величины на изменение другой.

Эластичность функции определяется с помощью соотношения:

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'_x \text{ или } E_x(y)=x\cdot T_y,$$

где $T_y=\left(\ln y\right)'=\frac{1}{y}\cdot y'_x$ – относительная скорость изменения (темп) функции.

Эластичность функции применяется при анализе зависимости спроса и предложения от цены (*ценовая эластичность*). Она показывает реакцию спроса или предложения на изменение цены и определяет, на сколько процентов приближенно изменится спрос или предложение при изменении цены на 1 %.

Если эластичность спроса $|E_x(y)|>1$, то спрос считается *эластичным*, если $|E_x(y)|=1$ – *нейтральным* (с единичной эластичностью), а если $|E_x(y)|<1$ – *неэластичным* относительно цены.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Предположим, что функция издержек фирмы имеет вид $C(x)=(10^{-6})x^3-0{,}003x^2+5x+1000$ рублей. Постройте графики функций:

а) предельных издержек $C'(x)$; б) издержек $C(x)$.

*Решение***.** а) Продифференцируем дважды функцию $C(x)$:

$C'(x)=3(10^{-6})x^2-0{,}006x+5,$

$C''(x)=(6\cdot10^{-6})x-0{,}006.$

Графиком функции предельных издержек $C'(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины параболы является точкой минимума $C'(x)$. Решив уравнение $C''(x)=(6\cdot10^{-6})x-0{,}006=0$, получим x=1000. Подставив x=1000 в $C'(x)$, находим ординату вершины параболы:

$y=(3\cdot10^{-6})(1000)^2-0{,}006\cdot1000+5=2.$

График функции предельных издержек $C'(x)$ изображен на рисунке 21.

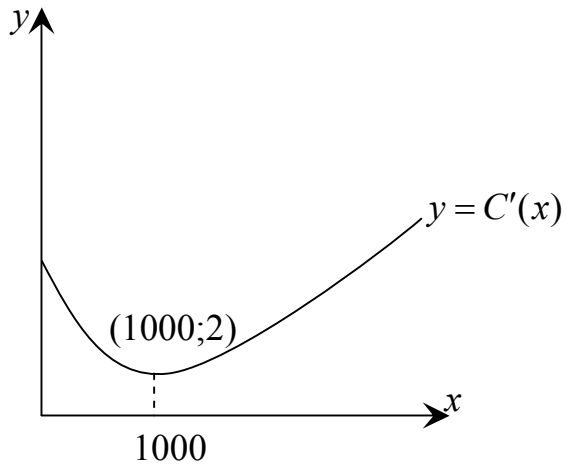


Рис. 21

б) Для построения графика функции $C(x)$ будем использовать график её производной (см. рис. 21). Так как $C'(x)\neq0$, функция $C(x)$ не имеет экстремумов. Так как $C'(x)$ всюду положительна на (0, ∞), $C(x)$ всюду возрастает. Кроме того, так как $C'(x)$ убывает на (0,1000) и возрастает на

(1000,∞), то график $C(x)$ вогнут на (0,1000) и выпукл на (1000,∞). Точка x=1000 является точкой перегиба графика $C(x)$. Проведенные рассуждения позволяют построить график функции издержек $C(x)$ (см. рис. 22).

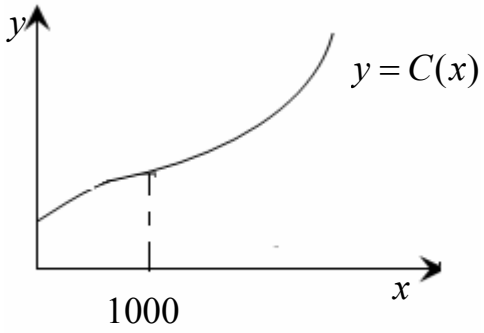


Рис. 22

Пример 2. Уравнение спроса на некоторый продукт имеет вид $p = 6 - \frac{1}{2}x$. Определить объем выпускаемой продукции, при котором доход будет максимальным.

*Решение***.** В данном случае функция дохода имеет вид

$$R(x) = x \cdot p = x\left(6 - \frac{1}{2}x\right) = 6x - \frac{1}{2}x^2.$$

Тогда предельный доход равен

$R'(x) = 6 - x$.

Решая уравнение $R'(x) = 0$, получим $x = 6$. Это точка максимума функции $R(x)$, так как график $R(x)$ представляет собой параболу с опущенными вниз ветвями, и единственный экстремум приходится на её вершину – максимум.

Таким образом, объём выпуска, максимизирующий доход от его реализации, равен 6 единицам, а соответствующий ему максимальный доход равен

$$R(6) = 6 \cdot 6 - \frac{1}{2 \cdot 6^2} = 18 \text{ (ден. ед.)}.$$

Пример 3. Турфирма «Ласточка» предлагает туры по осмотру достопримечательностей Санкт-Петербурга. Один из туров, цена которого 7000 руб. с человека, имел спрос примерно 1000 путевок в месяц. Когда его стоимость понизилась до 6000 руб., ежемесячный спрос возрос до 1200 путевок. Предполагая, что уравнение спроса линейно, определите цену этого тура таким образом, чтобы она, оставаясь доступной, обеспечила фирме максимальный ежемесячный доход.

*Решение***.** Прежде всего, найдем уравнение спроса. Пусть x – количество покупателей путевок за месяц, p – цена путевки. Тогда точки (1000,7000), (1200, 6000) принадлежат кривой спроса p=$p(x)$. Используя уравнение прямой (поскольку уравнение спроса линейно), проходящей через две точки, получим уравнение спроса

$p = 12000 - 5x$.

Функция дохода примет вид

$R(x) = x(12000 - 5x) = 12000x - 5x^2$.

Найдем функцию предельного дохода

$R'(x) = 12000 - 10x$.

Используя функции $R(x)$, $R'(x)$, мы можем построить график $R(x)$ (рис. 23).

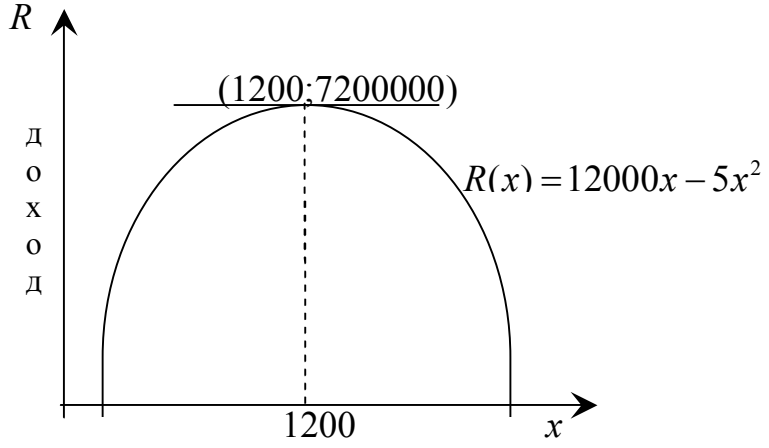


Рис. 23

Максимальный доход приходится на ноль предельного дохода – точку x=1200. Соответствующую цену путевки получим, подставив это значение в уравнение спроса:

$p = 12000 - 5 \cdot 1200 = 6000$ (руб.).

Именно эта цена путевки позволит получить максимальный доход от их реализации.

Пример 4. Пусть уравнение спроса фирмы-монополиста имеет вид $p = 100 - 0{,}01x$ и функция её издержек $C(x) = 50x + 10000$. Найти количество выпускаемого продукта x, максимизирующее прибыль фирмы, а также соответствующие этому количеству цену и полную прибыль фирмы.

*Решение***.** Функция общего дохода имеет вид

$R(x) = xp = x(100 - 0{,}01x) = 100x - 0{,}01x^2$.

Тогда функция прибыли

$P(x) = R(x) - C(x) =$

$= 100x - 0{,}01x^2 - (50x + 10000) = -0{,}01x^2 + 50x - 10000$.

График этой функции – парабола, ветви которой направлены вниз (рис. 24).

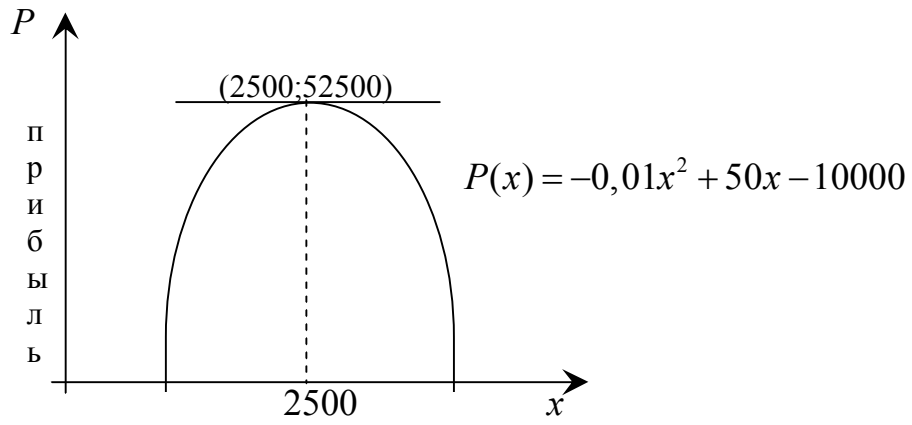


Рис. 24

Её вершина соответствует точке максимума, в которой $P'(x)$ равна нулю:

$P'(x) = -0,02x + 50 = 0$,

x=2500.

Соответствующая прибыль составит

$P(2500) = -0,01(2500)^2 + 50 \cdot 2500 - 10000 = 52500$.

Теперь вернемся к уравнению спроса, чтобы найти наибольшую цену, по которой можно продать все 2500 единиц продукта:

$p = 100 - 0,01 \cdot 2500 = 100 - 25 = 75$.

Ответ: если фирма произведет 2500 единиц продукта и продаст его по цене 75 рублей, то она получит наибольшую прибыль 52500 рублей.

Пример 5. Решите предыдущую задачу при дополнительном условии: правительство налагает акцизный сбор 10 рублей на единицу продукта.

*Решение***.** За каждую проданную единицу продукта производитель должен заплатить правительству 10 рублей. Другими словами, 10x рублей добавляются к издержкам производства и реализации x единиц продукта.

$C(x) = (50x + 10000) + 10x = 60x + 10000$.

Акцизный сбор не влияет на рыночный спрос, поэтому доход по-прежнему равен

$$R(x) = 100x - 0,01x^2.$$

Повторив рассуждения предыдущей задачи, получим

$$P(x) = R(x) - C(x) =$$

$$= 100x - 0,01x^2 - (60x + 10000) = -0,01x^2 + 450x - 10000,$$

$$P'(x) = -0,02x + 40 = 0,$$

$$x = 2000.$$

Соответствующая прибыль составит

$$P(2000) = -0,01(2000)^2 + 40 \cdot 2000 - 10000 = 30000.$$

Подставив $x = 2000$ в уравнение спроса, найдем соответствующую цену:

$$p = 100 - 0{,}01 \cdot 2000 = 80.$$

Ответ: если фирма произведет 2000 единиц продукта и продаст его по цене 80 рублей, то она получит наибольшую прибыль 30000 рублей.

Пример 6. Стоимость разового использования некоторой платной дороги составляет 25 рублей. Исследование, проведенное местным транспортным отделом, показало, что при стоимости проезда равной p рублей, q автомобилей будут ежедневно пользоваться дорогой, где

$$q=60000e^{-0,5p}.$$

а) Вычислите эластичность спроса по цене при p=25 рублей.

б) Спрос является эластичным или неэластичным при p=25 рублей.

в) Если администрация немного увеличит стоимость проезда, как это повлияет на доход от платной дороги.

Решение. а) Функция спроса по условию равна $f(p) = 60000e^{-0,5p}$. Тогда

$$f'(p) = -30000e^{-0,5p}$$

$$E_p(q) = \frac{pf'(p)}{f(p)} = \frac{p(60000e^{-0,5p})}{-30000e^{-0,5p}} = -\frac{p}{2},$$

$$E_p(q) = -\frac{25}{2} = -12{,}5$$

б) Спрос эластичный, так как $\left|E_p(q)\right| > 1$.

в) Так как спрос эластичный при p=25 рублей, небольшое увеличение стоимости проезда по дороге приведет к снижению дохода.

Ответ: а) $E_p(q) = -12{,}5$; б) эластичный; в) приведет к снижению дохода.

Задания для самостоятельной работы

6.22. Пусть функция общих издержек производства имеет вид $C(x) = 0{,}0001x^3 - 0{,}06x^2 + 12x + 10$. Предельные издержки растут, снижаются или постоянны при x=100? Определите минимальные предельные издержки производства.

6.23. Функция дохода фирмы, производящей один вид товара, имеет вид $R(x) = 200 - \frac{1600}{x+8} - x$. Определите, какой объем выпуска x позволит фирме получить наибольший доход.

6.24. По оценкам менеджеров фирмы, производящей один вид товара, её функция ежедневных издержек $C(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 15$ и функция дохода за день $R(x)=28x$. Определите объем производства x, который позволит фирме получать наибольшую ежедневную прибыль.

6.25. Его функция ежедневных издержек имеет вид $C(x) = 0{,}0006x^3 - 0{,}03x^2 + 2x + 20$, где x – среднее количество проданных галстуков за день. Определите, сколько галстуков необходимо продавать в течение дня, чтобы максимизировать ежедневную прибыль магазина.

6.26. Уравнение спроса на некоторый продукт имеет вид $p = \frac{1}{12}x^2 - 10x + 300$, $0 \le x \le 60$. Определите оптимальный объём производства этого товара и соответствующую ему цену, которые позволят максимизировать доход.

6.27. До недавнего времени пончики на городском стадионе продавались по цене 20 рублей. За игровой вечер продавалось в среднем 10000 пончиков. Когда цена возросла до 24 рублей, продажа пончиков сократилась в среднем до 8000 штук за вечер.

а) Предполагая линейность уравнения спроса, определите цену пончика, которая позволит получить наибольший доход за игровой вечер.

б) Пусть фиксированные издержки от реализации пончиков составляют 1000 рублей за вечер, а переменные издержки – 0,60 рублей за пончик. Определите цену пончика, при которой прибыль от их реализации в течение игрового вечера будет максимальной.

6.28. Средняя цена билета в оперный театр составляла 1000 рублей при средней посещаемости 4000 человек. Когда средняя цена билета возросла до 1100 рублей, посещаемость представлений снизилась в среднем до 3800 человек Какова должна быть средняя цена билета, чтобы оперный театр получал наибольший доход? (Функция спроса линейна).

6.29. Уравнение спроса за месяц для электроэнергетической компании согласно её расчетам имеет вид $p = 60 - (10^{-5})x$, где p исчисляется в рублях, а x – в тысячах кВт/ч. Функция спроса имеет вид $C(x) = 7 \cdot 10^6 + 30x$, где $7 \cdot 10^6$ – постоянные издержки производства за месяц, а $30x$ – переменные издержки за месяц.

а) Определите объем выпуска x и соответствующую цену каждой 1000 кВт/ч, которые позволят компании получить наибольшую прибыль.

б) Предположим, что рост налогов привел к увеличению переменных издержек с 30 до 40 рублей, так что новая функция издержек примет вид $C_1(x) = 7 \cdot 10^6 + 40x$. Должна ли компания повысить цену каждой 1000 кВт/ч на 10 рублей для потребителей? Объясните свой ответ.

6.30. Уравнение спроса монополиста имеет вид $p = 200 - 3x$, а функция его издержек $C(x) = 75 + 80x - x^2$, $0 \le x \le 40$.

а) Определите объем выпуска x и соответствующую цену p, которые позволят монополисту максимизировать прибыль.

б) Предположим, что правительство ввело налог 4 рубля на каждую единицу продукта. Определите новую цену, позволяющую получить монополисту наибольшую прибыль.

в) Предположим, что правительство ввело налог T рублей на каждую единицу продукта, так что новая функция издержек примет вид $C(x) = 75 + (80 + T)x - x^2$, $0 \le x \le 40$. Определите новую цену, позволяющую получить монополисту наибольшую прибыль как функцию от T; Выразите налоговые поступления правительства V как функцию от T. Найдите значение T, при котором налоговые поступления будут наибольшими.

6.31. По оценке банковской ассоциации сумма депозитов в 10 миллионов раз превышает величину процентной ставки. Например, размер банковской процентной ставки в 4% привлечет 40 млн. руб. на депозитные вклады. Ассоциация установила размер ставки по кредитам в 10%. Каков должен быть размер процентной ставки по депозитам, чтобы прибыль ассоциации была наибольшей?

6.32. Найдите $E_p(q)$ и определите является ли спрос эластичным или неэластичным при указанном значении цены p.

а) $q = 700 - 5p$, $p = 80$;

б) $q = 600e^{-0,2p}$, $p = 10$;

в) $q = 400(116 - p^2)$, $p = 6$;

г) $q = \dfrac{77}{p^2} + 3$, $p = 1$;

д) $q = p^2 e^{-(p+3)}$, $p = 4$;

е) $q = \dfrac{700}{p+5}$, $p = 15$.

6.33. Ежедневно на электричке по некоторому маршруту ездят в среднем 1800 человек, которые платят по 144 рубля за билет. Спрос на билеты описывается функцией $q = 600(5 - \sqrt{p})$. Транспортные службы хотели бы увеличить свой доход.

а) Является спрос эластичным при цене p=144 рубля?

б) Транспортным службам следует повысить или понизить цену билета?

6.34. Фирма может продавать $q = 9000/(p + 60) - 50$ лампочек в день по цене p рублей. Текущая цена p=30 руб.

а) Является спрос эластичным при цене p=30 рублей?

б) Если цена лампочки немного снизится, как это отразится на доходе фирмы?

6.35. В кинотеатре «Мираж» имеется один зал, рассчитанный на 3000 зрителей. Количество людей, посещающих кинотеатр при цене билета p рублей, равно $q = (18000/p) - 100$. Текущая цена билета p=150 рублей.

а) Является спрос эластичным при цене p=150 рублей?

б) Если кинотеатр снизит цену, как это отразится на его доходе?

6.36. Ежедневно услугами московского метрополитена пользуются в среднем 7 млн. человек при средней цене одной поездки p=20 рублей. Функция спроса на услуги метрополитена имеет вид $q = 2 \cdot 10^4 \sqrt{122520 - p}$.

а) Является спрос эластичным при цене p=20 рублей.

б) Какова должна быть ценовая политика метрополитена, если он намерен увеличить свой доход?

Ответы

6.22. растут; 12 рублей. **6.23.** 32. **6.24.** 5. **6.26.** 20 ед.; 133,33 руб. **6.27.** а) 20 руб.; б) 23 руб. **6.28.** 1500 руб.**6.29.** а) x=15·10^5, p=45 руб.; б) нет. **6.30.** а) x=30, p=110 руб.; б) p=113 руб.; в) $p = 110 + \frac{3}{4}T$, $V = 30T - \frac{1}{4}T^2$, T=60 руб. **6.31.** 5%.**6.33.** а) спрос неэластичный; б) повысить. **6.34.** а) спрос неэластичный; б) уменьшится. **6.35.** а) является; б) увеличится.

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 12 по теме «Нахождение производных. Техника дифференцирования»

1–3. Найти производные указанных функций

1. $y = \arccos(1-2x) + \cos\ln 5 - \frac{1}{\sqrt{3x}}$

2. $c = \ln\frac{1-e^t}{e^t}$

3. $y = \left(x^4 + 1\right)^{\frac{1}{x}}$

4. Вычислить приближенно $\operatorname{ctg}43^\circ$

5. Найти производную функции, используя логарифмическое дифференцирование, $y = \left(\operatorname{tg}3x\right)^{4e^x}$.

6. Найти производную параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = \ln\left(\operatorname{ctg}t\right), \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

7. Найти производную n-порядка функции $y = \frac{1}{2x+3}$

Контрольная работа № 13 по теме «Приложение дифференциального исчисления функций одной переменной»

1. Провести полное исследование функции и построить ее график

$f(x) = 1 + \frac{4x+1}{x^2}$

2. Исследовать функцию на глобальный экстремум (найти наибольшее и наименьшее значение на множестве) на полуотрезке $\left[-2;0\right)$.

ГЛАВА 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Первообразная. Неопределённый интеграл. Основные свойства неопределённого интеграла. Основные методы интегрирования

Краткие теоретические сведения

Первообразная

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если она дифференцируема на этом промежутке и для всех $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1. Если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то любая другая первообразная для $f(x)$ на том же промежутке может представлена в виде $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Неопределённый интеграл, его основные свойства

Если функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то множество функций $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на X.

Иначе говоря, неопределённый интеграл от функции $f(x)$ – это совокупность всех первообразных $f(x)$. Обозначение:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (1)$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Восстановление функции по её производной, или, что то же самое, отыскание неопределённого интеграла по данной подынтегральной функции, называется интегрированием этой функции. Интегрирование представляет собой операцию обратную дифференцированию. Для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Например, $\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, т.к. $(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C)' = e^{-2x}$. Аналогично $\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$, т.к. $(-\frac{1}{2}\cos 3x + C)' = \sin 3x$.

Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие свойства:

1. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $(\int f(x)dx)' = f(x); d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

2. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т.е. $\int dFx = \int f(x)dx = F(x) + C$.

3. Постоянный множитель можно вынести из под знака интеграла, т.е. если $k = const$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, k \neq 0$.

4. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е. $(\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов с помощью непосредственного использования таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределённых интегралов называется непосредственным интегрированием. То есть непосредственное интегрирование – это сведение данного интеграла к табличному путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла. Ниже приведена таблица интегралов от основных элементарных функций.

Таблица основных интегралов:

1) $\int 0dx = C$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1; \int e^x dx = e^x + C$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C; \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C; \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{actg} \frac{x}{a} + C$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$

12) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Метод подстановки

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т.е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой подход называется методом подстановки или методом замены переменной.

Теорема 2. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X – множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt . \qquad (2)$$

Формула (2) – *формула замены переменной* в неопределённом интеграле.

Метод интегрирования по частям

Теорема 3. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и пусть функция $u'(x) \cdot v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда на промежутке X функция $u(x) \cdot v'(x)$ также имеет первообразную и справедлива формула

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx . \qquad (3)$$

Формула (3) – *формула интегрирования по частям* в неопределённом интеграле.

Так как $v'(x)dx = dv, u'(x)dx = du$, то формулу (3) можно переписать в виде $\int udv = u \cdot v - \int vdu$

Применять формулу (3) целесообразно, когда интеграл в правой части более прост для нахождения, нежели исходный. Рассмотрим два класса функций $f(x)$, которые целесообразно интегрировать по частям, и укажем, что в этих случаях при представлении подынтегрального выражения $f(x)dx$ в виде произведения udv следует принять за u, а что за dv. Ниже через $P(x)$ обозначен многочлен.

I. $f(x) = P(x)e^{\alpha x} \rightarrow u = P(x), dv = e^{\alpha x}dx$

$f(x) = P(x)\sin \beta x \rightarrow u = P(x), dv = \sin \beta x dx$

$f(x) = P(x)\cos \beta x \rightarrow u = P(x), dv = \cos \beta x dx$

II. $f(x) = P(x)\ln x \rightarrow u = \ln x, dv = P(x)dx$

$f(x) = P(x)arctgx \rightarrow u = arctgx, dv = P(x)dx$

$f(x) = P(x)\arcsin x \rightarrow u = \arcsin x, dv = P(x)dx .$

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Вычислить интеграл $\int(4\sin x-3+2x^2-\frac{5}{x}+\frac{7}{\sqrt{1-x^2}})dx$.

Решение. Воспользуемся свойствами 3 и 4 и табличными интегралами (5), (2), (3), (9). Получим:

$$\int(4\sin x-3+2x^2-\frac{5}{x}+\frac{7}{\sqrt{1-x^2}})dx=4\int\sin xdx-3\int dx+2\int x^2dx-5\int\frac{dx}{x}+7\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-4cosx-3x+2\frac{x^3}{3}-5\ln|x|+7\arcsin x+C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2dx$.

Решение. Возведём в квадрат подынтегральную функцию, проведём тригонометрические преобразования, применим свойство 4 и табличные интегралы (2),(5)

$$\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2dx=\int(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2x)dx=\int(1+\sin x)dx=x-\cos x+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

Решение. Применив тождественные преобразования, свойство 4 и табличные интегралы (2), (10), получим:

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx+\int\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int x^{-2}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^{-1}}{-1}+arctgx+C=arctgx-\frac{1}{x}+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}dx$.

Решение. Введём переменную $t=x+1, dx=dt$. Тогда $x=t-1$. Используем формулу (2.1)

$$\int\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}dx=\int\frac{(t-3)^3}{t^2}dt=\int\frac{t^3-9t^2+27t-27}{t^2}dt=\int(t-9+\frac{27}{t}-\frac{27}{t^2})dt=$$

$$=\frac{1}{2}t^2-9t+27\ln|t|+\frac{27}{t}+C=\frac{1}{2}(x+1)^2-9(x+1)+27\ln|x+1|+\frac{27}{x+1}+C.$$

При замене переменной в неопределённом интеграле иногда более удобно заменять не x как функцию t, а наоборот, задавать t как функцию от x.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{x^6}{x^7-5}dx$.

Решение. Положим $t = x^7 - 5$. Тогда $dt = 7x^6 dx$. Используя формулу (2.1) и табличный интеграл (3), получим:

$$\int \frac{x^6}{x^7-5}dx = \frac{1}{7}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{7}\ln|t| + C = \frac{1}{7}\ln\left|x^7 - 5\right| + C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \cos^7 x \cdot \sin^3 x dx$.

Решение. Применим известное тригонометрическое тождество, далее положим $\cos x = t$. Тогда $dt = -\sin x dx$. Используя табличный интеграл (2), имеем:

$$\int \cos^7 x \cdot \sin^3 x dx = \int \cos^7 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x dx = -\int \cos^7 x \cdot (1-\cos^2 x) d\cos x =$$

$$= -\int t^7 (1-t^2)dt == -\int (t^7 - t^9)dt = -\frac{t^8}{8} + \frac{t^{10}}{10} + C = \frac{1}{10}\cos^{10} x - \frac{1}{8}\cos^8 x + C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x, dv = dx$. Тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}, v = x$ и по формуле интегрирования по частям получим:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \text{ где } d(1+x^2) = 2xdx.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int x \cdot 3^x dx$.

Решение. Положим $u = x, dv = 3^x dx.$ Тогда $du = dx, v = \frac{1}{\ln 3}3^x$ и по формуле интегрирования по частям получим:

$$\int x \cdot 3^x dx = x \cdot \frac{1}{\ln 3}3^x - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}x \cdot 3^x - \frac{1}{\ln^2 3}3^x + C.$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int x \cdot \ln x dx$.

Решение. Положим $u = \ln x, dv = xdx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^2}{2}$ и по формуле интегрирования по частям получим:

$$\int x \ln x dx = \ln x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

В некоторых случаях формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

Пример 10. Вычислить интеграл $\int x^2 \cos x dx$.

Решение. Положим $u = x^2, dv = \cos x dx$. Тогда $du = 2xdx, v = \sin x$, по формуле интегрирования по частям имеем: $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx$. Далее, пусть $u = x, dv = \sin x$. Тогда $du = dx, v = -\cos x$, ещё раз применив формулу интегрирования по частям, имеем: $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x dx =$

$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$.

Задания для самостоятельной работы

7.1. Вычислить интегралы с помощью непосредственного интегрирования:

а) $\int \left(2x^2 + 3\right)\left(1 + 5x^3\right)dx$;

б) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 2\sin x - \frac{3}{2x} + e^{2x}\right)dx$;

в) $\int \frac{\left(3\sqrt{x} - 1\right)^2}{\sqrt{x^3}}dx$;

г) $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}}dx$;

д) $\int \frac{\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 + x^2}}{\sqrt{16 - x^4}}dx$;

е) $\int \left(2^x 5^x + \frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$;

ж) $\int \frac{3^x + 2^x}{6^x}dx$;

з) $\int \left(\frac{5}{x^2 - 16} - \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)dx$.

7.2. Вычислить интегралы с помощью метода замены переменной:

а) $\int \left(\sqrt{1 + 3x} + \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x + 1}}\right)dx$;

б) $\int \left(\frac{x^3}{\sqrt{4 - x^8}} + \frac{\ln^6\left(x + 9\right)}{x + 9}\right)dx$;

в) $\int \left(\sqrt[3]{(2 - x)^2} + \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x}\right)dx$;

г) $\int \left(5^{1 - 3x^2} \cdot x + \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\mathrm{ctg}^3 4x}{\sin^2 4x}\right)dx$;

д) $\int \left(\frac{\mathrm{arcctg}^4 7x}{1 + 49x^2} - \frac{x}{\sqrt{4 - x^4}}\right)dx$;

е) $\int \left(e^{-x^5} x^4 + \sqrt{7 - \sin 5x}\cos 5x\right)dx$;

ж) $\int \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\arcsin^4 x}\right)dx$;

з) $\int \left(\frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5 - 6x}}\right)dx$.

7.3. Вычислить интеграл методом интегрирования по частям:

а) $\int \left(x + 5\right)\sin 3x dx$;

б) $\int \left(x - 3\right)\cos 5x dx$;

в) $\int x^2 e^x dx$;

г) $\int \sin\left(\ln x\right)dx$;

д) $\int x\ln(5x+3)dx$;

е) $\int \arcsin\frac{x}{3}dx$;

ж) $\int \ln^2 xdx$;

з) $\int \frac{x}{2}e^{-3x}dx$.

7.4. Разные задачи.

а) $\int x^2\sin 2xdx$;

б) $\int\left(x^2-3x+5\right)\cos 5xdx$;

в) $\int x\operatorname{arctg}xdx$;

г) $\int\sqrt{1+x^2}dx$;

д) $\int\sqrt{1+4x^2}dx$;

е) $\int \arcsin^2\frac{x}{3}dx$;

ж) $\int e^x\cos 2xdx$;

з) $\int e^{-3x}\cos 3xdx$.

Ответы

7.1. а) $\frac{5}{3}x^6+\frac{15}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x+C$; б) $3\sqrt[3]{x^2}-2\cos x-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{1}{2}e^{2x}+C$;

в) $18\sqrt{x}-6\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$; г) $6\sqrt{x}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$; д) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\arcsin\frac{x}{2}+C$;

е) $\frac{10^x}{\ln 10}+\frac{4\sqrt{x^5}}{5}-5\ln|x|+3\operatorname{tg}x+C$; ж) $-\frac{2^{-x}}{\ln 2}-\frac{3^{-x}}{\ln 3}+C$; з) $\frac{5}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+\operatorname{ctg}x+3\sqrt{x}+C$. **7.2.**

а) $\frac{2}{9}\sqrt{(1+3x)^3}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\cos x+1)^2}+C$; б) $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x^4}{2}+\frac{\ln^7(x+9)}{x+9}+C$;

в) $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{(2-x)^5}-\frac{1}{18\sin^3 6x}+C$; г) $\frac{5^{1-3x^2}}{6\ln 5}-2\cos\sqrt{x}+\frac{ctg^2 4x}{8}+C$;

д) $\frac{arctg^5 7x}{35}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+C$; е) $-\frac{1}{5}e^{-x^4}-\frac{2\sqrt{(7-\sin 5x)^3}}{15}+C$; ж) $2e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{3\arcsin^3 x}+C$;

з) $\frac{\arcsin^2 x}{2}-\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt[3]{(5-6x)^2}}{4}+C$. **7.3.** а) $\frac{1}{9}\sin 3x-\frac{1}{3}(x+5)\cos 3x+C$;

б) $\frac{1}{25}\cos 5x+\frac{1}{5}(x-3)\sin 5x+c$; в) $e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$; г) $\frac{1}{2}x\left(\sin\ln x-\cos\ln x\right)+C$;

д) $\frac{1}{50}(5x+3)^2\ln(5x+3)-\frac{3}{25}(5x+3)\ln(5x+3)-\frac{x^2}{4}+\frac{3}{10}x+\frac{27}{100}+C$;

е) $x\arcsin 3x+3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}+C$; ж) $x\ln^2 x-2x(\ln x-1)+C$; з) $-\frac{xe^{-3x}}{6\ln xe}+C$.

7.4. а) $\left(\frac{-x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+C$; б) $\left(\frac{1}{5}x^2-\frac{3}{5}x+\frac{123}{125}\right)\sin 5x+\left(\frac{2}{25}x-\frac{3}{25}\right)\cos 5x+C$;

в) $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)arctgx-\frac{1}{2}x+C$; г) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2\ln}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$;

д) $\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{4x^2+1}\right|+C$;

ж) $e^x\left(\frac{1}{5}\cos 2x+\frac{2}{5}\sin 2x\right)+C$;

з) $e^{-3x}\left(-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{6}\sin 3x\right)+C$.

7.2. Интегрирование рациональных функций

Краткие теоретические сведения

Рациональными функциями называются функции вида: $R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где $Q_m(x), P_n(x)$ – многочлены степени m, n соответственно.

Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя. В противном случае называется неправильной. Всякую неправильную рациональную дробь можно, деля числитель на знаменатель, представить в виде суммы многочлена, называемого целой частью дроби, и правильной рациональной дроби.

Например: $\frac{x^4}{x^3-2x+6}=\frac{x^4-2x^2+6x+2x^2-6x}{x^3-2x+6}=x+\frac{2x^2-6x}{x^3-2x+6}$.

Будем рассматривать правильные рациональные дроби с действительными коэффициентами многочленов в числителе и знаменателе. Среди них назовём простейшими дроби вида: 1) $\frac{A}{(x-a)^n}$, n – натуральное число,

2) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, n – натуральное число.

Теорема (о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей). Всякую рациональную правильную дробь со знаменателем представимым в виде произведения можно разложить в виде суммы простейших рациональных дробей вида 1 – 2. В этом разложении каждому корню a_r кратности k_i многочлена $P_n(x)$ соответствует сумма k дробей вида $\frac{A_1}{x-a_r}+\frac{A_2}{(x-a_r)^2}+...+\frac{A_{k_i}}{(x-a_r)^{k_i}}$, где $A_1, A_2, ..., A_{k_i}$ – действительные числа, называемые неопределёнными коэффициентами.

Примеры решения типовых задач

Рассмотрим два наиболее простых способа нахождения неопределённых коэффициентов на одном конкретном примере.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\frac{3x+1}{x^3+x}dx$.

Решение. I метод – метод неопределённых коэффициентов.

Разложим знаменатель на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами: $x^3 + x = x(x^2 + 1)$ и запишем разложение данной дроби на простейшие с неопределёнными коэффициентами: $\frac{3x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$. Приведя к общему знаменателю правую часть, получим равенство числителей: $3x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$.

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях этого равенства.

При $x^2 : A + B = 0$.

При $x : C = 3$.

При $x^0 : A = 1$.

Тогда $B = -A = -1$ и $\frac{3x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x+3}{x^2+1}$.

Далее находим неопределённый интеграл:

$$\int \frac{3x+1}{x^3+x}dx = \int (\frac{1}{x} + \frac{-x+3}{x^2+1})dx = \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + 3\int \frac{dx}{x^2+1} = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) +$$
$$+ 3\operatorname{arctg} x + C.$$

II метод – метод частных значений.

Придадим аргументу x столько различных значений, сколько имеется неопределённых коэффициентов, используя в первую очередь корни знаменателя.

$3x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$, $x = 0 \Rightarrow 1 = A$,

$x = 1 \Rightarrow 4 = 2A + B + C$,

$x = -1 \Rightarrow -2 = 2A + B - C$. Тогда получим систему независимых уравнений, из которой имеем: $B = -1, C = 3$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

Решение. Представим дробь в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами: $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$. Приведя дроби в обеих частях к общему знаменателю, получим: $x = A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+1)$. Найдём неопределённые коэффициенты методом частных значений, придадим аргументу x последовательно значения –1, 1, 0. Получим систему: $-1 = -2B, 1 = 4A, 0 = A - B - C$, откуда $B = \frac{1}{2}, A = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{4}$ и $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{4(x+1)}$. Таким

образом:

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}=\int(\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{4(x+1)})dx=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+$$

$$+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2(x+1)}+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx$.

Решение. Выделим целую часть дроби:

$$\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}=x-2+\frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x}.$$

Разложим знаменатель дроби на множители с действительными коэффициентами:

$\frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$. Умножая это равенство на общий знаменатель, получим: $2x^2+10x-5=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)x$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа.

При x^2 : $A+B=2$.

При x : $2A+C=10$.

При x^0 : $5A=-5$. Тогда $A=-1, C=12, B=3$ и

$\frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x}=-\frac{1}{x}+\frac{3x+12}{x^2+2x+5}$. Итак, вычислим неопределённый интеграл:

$$\int\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx=\int(x-2+\frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x})dx=\int xdx-2\int dx+\int(-\frac{1}{x}+\frac{3x+12}{x^2+2x+5})dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x-\ln|x|+3\int(\frac{x}{x^2+2x+5}+\frac{4}{(x+1)^2+4})dx=\frac{x^2}{2}-2x-\ln|x|+\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx+$$

$$+3\cdot3\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{x^2}{2}-2x-\ln|x|+\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}+9\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=\frac{x^2}{2}-2x-$$

$$-\ln|x|+\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Задания для самостоятельной работы

7.5. Вычислить интеграл от дроби, содержащий в знаменателе квадратный трехчлен:

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

б) $\int \frac{dx}{3x^2+6x-1}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

д) $\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}$;

е) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$;

ж) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}dx$;

з) $\int \frac{6x+5}{3x^2+5x+10}dx$.

7.6. Вычислить интегралы от рациональных функций:

а) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+1)}$;

б) $\int \frac{x^2dx}{x^2-4x+3}$;

в) $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)}$;

г) $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-5x^2+6x}$;

д) $\int \frac{(3x+1)dx}{x(1+x^2)^2}$;

е) $\int \frac{(3x+5)dx}{(x^2+2x+5)^2}$;

ж) $\int \frac{(2x^2+x+3)dx}{(x+2)(x^2+x+1)}$

з) $\int \frac{(x+1)dx}{x^3-x^2-6x}$.

Ответы

7.5. а) arctg $(x+2)+C$; б) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{3-2}}{2x+\sqrt{3+2}}\right|+C$; в) $\ln(x+1)+\left|\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$;

г) $\arcsin\frac{x+1}{2}+C$; д) arctg$(2x+1)+C$; е) $\frac{1}{2}arctg\left|\frac{x-3}{2}\right|+C$; ж) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+7\right|+C$;

з) $\ln(3x^2+5x+10)+C$). **7.6.** а) $-\frac{1}{3(x-2)}-\frac{\ln(x-2)}{9}+\frac{\ln(1+x)}{9}+C$;

б) $x-\frac{\ln(x-1)}{2}+\frac{3\ln(x-3)}{2}+C$; в) $\frac{3}{2(1+x)}\frac{\ln|x+1|}{4}+\frac{3\ln|x-1|}{4}+C$;

г) $x+\frac{\ln|x|}{6}+\frac{9}{2}\ln(x-2)+\frac{28}{3}\ln(x-3)+C$; д) $\ln x-\frac{\ln(1+x^2)}{2}+\frac{3arctgx}{2}+\frac{3+1}{2(1+x^2)}+C$;

е) $\frac{x-5}{4(x^2+2x+5)}+\frac{1}{8}arctg\frac{x+1}{2}+c$; ж) $3\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

з) $\frac{\ln x}{6}-\frac{\ln(x+2)}{10}+\frac{4}{15}\ln(x-3)+C$

7.3. Интегрирование некоторых тригонометрических и иррациональных функций

Краткие теоретические сведения

В этом параграфе для интегралов от некоторых классов тригонометрических и иррациональных выражений будут даны рационализирующие подстановки, то есть замены переменной, приводящие исходный интеграл к интегралу от рациональной дроби. Здесь через $R(...)$ будем обозначать рациональные функции.

Интегрирование тригонометрических функций

I. Интегралы вида $\int R(\cos x, \sin x)dx$ приводятся к интегралам от рациональной функции новой переменной t с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. В этом случае $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Подставляя в подынтегральное выражение вместо $\sin x$, $\cos x$, dx их выражения через t, dt, получим интеграл от рациональной дроби:

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int r(t)dt .$$

В случае, когда имеет место тождество $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применять упрощённую подстановку $\operatorname{tg} x = t$. При этом $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Если $R(\cos x, \sin x)$ – нечетная функция относительно $\sin x$, т.е. $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\cos x = t$.

Если $R(\cos x, \sin x)$ – нечетная функция относительно $\cos x$, т.е. $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\sin x = t$.

II. Для отыскания интегралов вида

$\int \sin mx \cdot \cos nxdx$, $\int \sin mx \cdot \sin nxdx$, $\int \cos mx \cdot \cos nxdx$ используют следующие формулы:

$$1) \sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x);$$

$$2)\ \sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x);$$

$$3)\ \cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

При нахождении интегралов вида $\int \cos^m x \cdot \sin^n x dx$ $(m,n \in Z)$ возможны следующие случаи:

1) хотя бы одно из чисел m или n – нечетное, например $m = 2k+1$, тогда $\int cos^m x \cdot \sin^n x dx = \int cos^{2k} x \cdot \sin^n x \cdot \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^k \sin^n x d\sin x =$

$= \int (1-t^2)^k t^n dt, t = \sin x;$

2) оба числа m или n – четные, тогда рекомендуется использовать следующие формулы, позволяющие понизить степень тригонометрических функций: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x.$

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Не для всякой иррациональной функции можно найти первообразную в виде элементарной функции. Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций, которые с помощью определённых подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной.

I. Интеграл вида $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r_1}{s_1}}, ..., (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r_k}{s_k}})dx$, где a,b,c,d – постоянные, $r_i, s_i \in Z_+, i = 1,...,k$ приводятся к интегралу от рациональной функции новой переменной u с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = u^m$, где $m -$ наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей дробей $\frac{r_1}{s_1}, ..., \frac{r_k}{s_k}$, т.е. $m = HOK(s_1, ..., s_k)$.

II. Интегралы вида $а)\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, $б)\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$, $в)\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ тригонометрическими подстановками соответственно $а) x = a\sin t$, $б) x = a\,\mathrm{tg}\, t$, $в) x = a\frac{1}{\sin x}$ сводятся к уже рассмотренным интегралам вида $\int R(\cos x, \sin x)dx$.

К рассмотренным интегралам могут быть преобразованы интегралы $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$, если из квадратного трёхчлена выделить полный квадрат суммы и сделать линейную замену переменной. Существуют и другие методы интегрирования указанного интеграла, мы их здесь не рассматриваем.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Решение: Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{2dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2}=$$

$$=2\int \frac{dt}{t^2-8t+15}=2\int \frac{d(t-4)}{(t-4)^2-1}=\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|+C=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C=\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$.

Решение. Используем замену переменной $\operatorname{tg} x=t$. Тогда $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Получаем:

$$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{3+3t^2+t^2}=\int \frac{dt}{4t^2+3}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{5-\cos x}dx$.

Решение. Данная функция нечетна относительно $\sin x$. Используем замену переменной $\cos x=t$. Тогда $-\sin x dx=dt, \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t^2$ и

$$\int \frac{\sin^3 x}{5-\cos x}dx=-\int \frac{1-t^2}{5-t}dt=-\int \frac{t^2-5t+5t-25+24}{t-5}dt=-\int (t+5+\frac{24}{t-5})dt=-\frac{t^2}{2}-$$

$$-5t-24\ln|t-5|+C=-\frac{\cos^2 x}{2}-5\cos x-24\ln|\cos x-5|+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \cos(3x+1)\cdot\sin(2x-5)dx$.

Решение. Применив формулу (1) и табличные интегралы, получим:

$$\int \cos(3x+1)\cdot\sin(2x-5)dx=\frac{1}{2}\int(\sin(2x-5+3x+1)+\sin(2x-5-3x-1))dx=$$

$$= \frac{1}{2}(\int \sin(5x-4)dx + \int \sin(-x-6)dx = -\frac{1}{10}\cos(5x-4) + \frac{1}{2}\cos(x+6) + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \sin^2 5x$.

Решение. Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

$$\int \sin^2 5x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 10x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{20}\int \cos 10x d10x = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 10x}{20} + C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt[6]{x-7}}{\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x-7}}dx$.

Решение. Так как $HOK(2,3,6) = 6$, то положим $x-7 = u^6$. Тогда $\sqrt{x-7} = u^3$, $\sqrt[3]{x-7} = u^2$, $\sqrt[6]{x-7} = u$, $dx = 6u^5 du$ и $\int \frac{\sqrt[6]{x-7}}{\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x-7}}dx =$

$$= \int \frac{u \cdot 6u^5 du}{u^3+u^2} = 6\int \frac{u^6}{u^2(u+1)}du = 6\int \frac{u^4}{u+1}du = 6\int (u^3 - u^2 + u - 1 + \frac{1}{u+1})du = 6(\frac{u^4}{4} -$$

$$-\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} - -u + \ln|u+1|) + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-7)^2} - 2\sqrt{x-7} + 3\sqrt[3]{x-7} - 6\sqrt[6]{x-7} +$$

$$+ 6\ln\left|\sqrt[6]{x-7}+1\right| + C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение. Положим $x = 2\sin t$. Тогда $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$, $dx = 2\cos t dt$ и исходный интеграл преобразуется в интеграл вида $\int 4\sin^2 t \cdot 2\cos t \cdot 2\cos t dt = \int 16\sin^2 t\cos^2 t dt$. Интегрируя его, получим:

$$\int 16\sin^2 t\cos^2 t dt = 16\int \frac{1}{4}\sin^2 2t dt = 4\int \frac{1}{2}(1-\cos 4t)dt = 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin(4\arcsin\frac{x}{2}) + C.$$

Задания для самостоятельной работы

7.7. Вычислить интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int \cos^3 x \sin^5 x dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$;

в) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$;

г) $\int \frac{dx}{3+5\sin x + 3\cos x}$;

д) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}dx$;

е) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx$;

ж) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x}$; з) $\int (1 + 2\cos x)^2 dx$.

7.8. Вычислить интегралы от иррациональных функций:

а) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x} - \sqrt[4]{1-3x}}$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$:

д) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$; е) $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$;

ж) $\int \frac{x^2 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$; з) $\int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

Ответы

7.7. а) $-\frac{\sin^4 x\cos^4 x}{8} - \frac{\sin^4 x\cos^4 x}{12} - \frac{\cos^4 x}{24} + C$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{tg\frac{x}{2}-11\sqrt{2}}\right| + C$;

в) $-tg\frac{x}{2} + x + C$; г) $\frac{1}{5}\ln$ (6+10 arctg $\frac{x}{2}$)+ C; д) $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C$;

е) $-\frac{\cos x}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{x}{3} + C$; ж) $\ln tg\frac{x}{2} - \ln(1+tg^2\frac{x}{2}) - \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + C$; з) $3x+4\sin 2x+C$.

7.8. а) $6\sqrt[6]{x} - 4arctg\sqrt[6]{x} - 2arctg(2\sqrt[6]{x}-\sqrt{3}) - 2arctg(2\sqrt[6]{x}+\sqrt{3}) - 2\sqrt{x} + 2arctg\sqrt{x} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + C$;

б) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$; г) arcsin $\frac{a}{x}$+C; д) $\left(\frac{1}{24x} - \frac{1}{12x^3}\right)\sqrt{x^2+4}$ + C; е) –2 $\sqrt{7-6x-x^2}$ –

–3arcsin $\frac{x+3}{4}$+C; ж) $\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$ –arcsin $\frac{x}{4}$+C; з) $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$.

7.4. Понятие определённого интеграла, его геометрический смысл. Свойства определённого интеграла

Краткие теоретические сведения

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a;b]$. Разобьём $[a;b]$ произвольным образом точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ на n частичных отрезков длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,...,n$. Выберем в каждой из них точку $\xi_i, x_{i-1} < \xi_i < x_i$ и найдем значения функции в каждой из этих точек ξ_i – $f(\xi_i)$. Сумма вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

называется *n*-ой *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на $[a;b]$.

Геометрический смысл интегральной суммы (1) – сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ и высотами $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_n)$. Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка данного разбиения $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}$ (рис. 25).

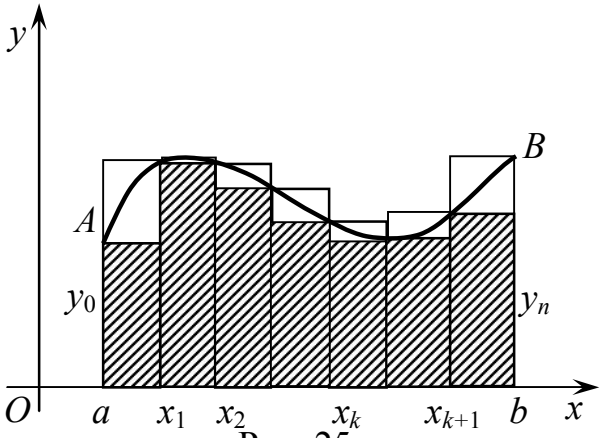


Рис. 25

Определение. Если существует конечный предел I суммы (5.1) при $\lambda \to 0$, то этот предел называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначается: $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

$f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $[a;b]$ – отрезок интегрирования, a и b – нижний и верхний пределы интегрирования, x – переменная интегрирования.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$, т.е. предел интегральной суммы (1) существует и не зависит от способа разбиения $[a;b]$ на частичные отрезки Δx_i и выбора на них точек ξ_i.

Если $f(x) \ge 0, x \in [a;b]$, то геометрически определённый интеграл выражает площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$. Эта фигура – криволинейная трапеция. В общем случае, когда функция $y = f(x)$ на $[a;b]$ принимает значения разных знаков, определённый интеграл выражает разность площадей криволинейных трапеций, расположенных над осью Ox и под ней, т.к. $S_{кр.тр.}$, расположенной под осью Ox, присваивается знак «–».

Далее будем рассматривать функцию $f(x)$ непрерывную на $[a;b]$. По определению полагают, что определённый интеграл от функции с равными верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (2)$$

1. При перестановке пределов интегрирования определённый интеграл меняет знак на противоположный

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (3)$$

2. Каковы бы ни были числа a, b, c имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ . \qquad (4)$$

Определённый интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям (аддитивность по области интегрирования).

3. Постоянный множитель можно вынести за знак определённого интеграла, т.е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx. \qquad (5)$$

4. Определённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \qquad (6)$$

Свойства 3,4 называются свойствами **линейности.**

Далее будем считать, что $a < b$.

5. Если всюду на $[a;b]$ $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

6. **Монотонность.** Если всюду на $[a;b]$ $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

7. **Оценка модуля интеграла.** Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (7)$$

Следствие. Если всюду на $[a;b]$ $f(x) \leq k$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq k(b-a)$.

8. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \qquad (8)$$

9. **Теорема о среднем.** Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке существует точка c, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \qquad (9)$$

10. **Интеграл с переменным верхним пределом.** Если функция $f(x)$ непрерывна и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то имеет место равенство $\Phi'(x) = f(x)$, т.е. производная определённого интеграла по переменному верхнему пределу x равна значению подынтегральной функции при том же $x \Rightarrow \Phi(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

11. **Формула Ньютона – Лейбница.** Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, непрерывной на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (10)$$

Формула (10) даёт простой метод вычисления определённого интеграла: определённый интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой её первообразной, вычисленных для верхнего и нижнего пределов интегрирования. Таким образом, задача вычисления определённого интеграла сводится к задаче вычисления неопределённого интеграла, которая достаточно изучена. Здесь используются те же методы интегрирования.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Положим $x = t^2 \quad (t > 0)$ при $x = 0 \quad t = 0$, при $x = 4 \quad t = 2$. Применим подстановку:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\int_0^2 (1 - \frac{1}{t+1})dt = 2(t - \ln|t+1|)\Big|_0^2 = 2(2 - \ln 3) =$$
$$= 4 - 2\ln 3.$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int_1^e \ln x dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям, пусть $u = \ln x, dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, v = x$. Тогда

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = e\ln e - 1\ln 1 - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3}$.

Решение. Применим универсальную тригонометрическую подстановку. Пусть

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1, x = 0 \Rightarrow t = 0$. Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3} = \int_0^1 \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\right)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{2 - 2t^2 + 3 + 3t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{5 + t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} arctg \frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 \approx 0{,}38.$$

Задания для самостоятельной работы

7.9. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^1 xe^{-x}dx$;

б) $\int_0^{0,5} \frac{\arcsin^5 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\int_0^{\pi} x\cos x dx$;

г) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$;

д) $\int_1^e \frac{dx}{x\left(1 + \ln^2 x\right)}$;

е) $\int_{-1}^1 xe^{-x^2}dx$;

ж) $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx$;

з) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

Ответы

7.9. а) $1 - \frac{2}{e}$; б)1/64; в)–2; г)arctg2; д) $\frac{\pi}{4}$; е)0; ж) $\frac{1}{3}$; з) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

7.5. Несобственные интегралы

Краткие теоретические сведения

Несобственные интегралы являются обобщением понятия определённого интеграла на случаи: 1) когда область интегрирования является не отрезком $[a;b]$, а полупрямыми $[a;\infty)$, $(\infty;b]$ или вся прямая $(\infty;\infty)$; 2) когда функция имеет точки разрыва 2-го рода, в окрестностях которых функция неограниченна.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a;\infty)$, то $\int\limits_a^B f(x)dx = I(B)$ – некоторая непрерывная функция от B. Тогда предел $\lim\limits_{B\to\infty}\int\limits_a^B f(x)dx$ (6.1) называется *несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом* функции $y=f(x)$ на $[a;\infty)$ и обозначается

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \qquad (1).$$

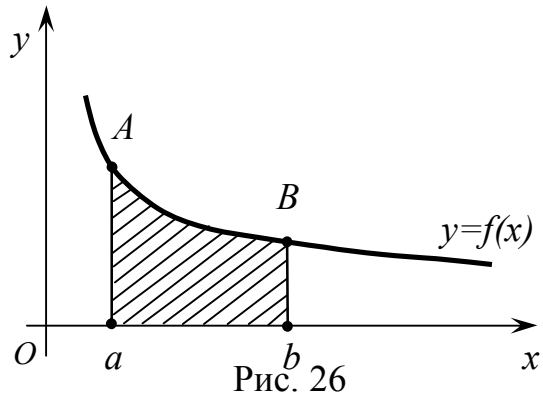


Рис. 26

Таким образом

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{B\to\infty}\int\limits_a^B f(x)dx. \qquad (2)$$

На рисунке 26 в случае неотрицательной функции $f(x)$ проиллюстрировано вычисление площади фигуры, ограниченной снизу полупрямой $[a;+\infty)$, сверху графиком функции $y=f(x)$ и слева прямой $x=a$, как предела площади криволинейной трапеции $aABb$ при $b\to+\infty$.

Если предел существует и конечен, то интеграл сходящийся, если не существует или бесконечен, то расходящийся. Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)dx, \qquad (3)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^c f(x)dx + \lim_{B\to\infty}\int\limits_c^{B\to\infty} f(x), \qquad (4)$$

где c – произвольная фиксированная точка. При этом говорят, что интеграл (6.5) сходится, если сходится каждый из двух несобственных интегралов в правой части этого равенства, и расходится, если хотя бы один из них расходится.

Если сходится интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ – абсолютно сходящийся.

Для установления сходимости интеграла (6.2) можно использовать следующие признаки сравнения.

Теорема. Пусть всюду на полупрямой $[a;\infty)$ справедливо неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Тогда: 1) если интеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ – сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$, причем $\int_a^{\infty} f(x)dx \le \int_a^{\infty} \varphi(x)dx$; 2) если интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ расходится, то будет расходиться и интеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна во всех точках $[a;b]$ за исключением точки $x = c$ $(a < c < b)$, где она терпит бесконечный разрыв. Тогда по определению

$$\int_a^{в} f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{в} f(x)dx, \text{ где } \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0. \quad (5)$$

Интеграл (6.6) называется *несобственным интегралом* от *разрывной* функции. Если оба предела, стоящие в правой части, существуют и конечны, то интеграл сходящийся, если хотя бы один из них не существует или бесконечен, то расходящийся. В случае, когда $c = a$ или $c = b$ (рис. 27), в правой части равенства будет только один предел.

Теорема. Пусть всюду на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$, $\varphi(x)$ терпят бесконечный разрыв в точке $x = c$ и всюду, кроме $x = c$, выполняется неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Тогда: 1) если интеграл $\int_a^{в} \varphi(x)dx$ – сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{в} f(x)dx$; 2) если интеграл $\int_a^{в} f(x)dx$ расходится, то будет расходиться и интеграл $\int_a^{в} \varphi(x)dx$.

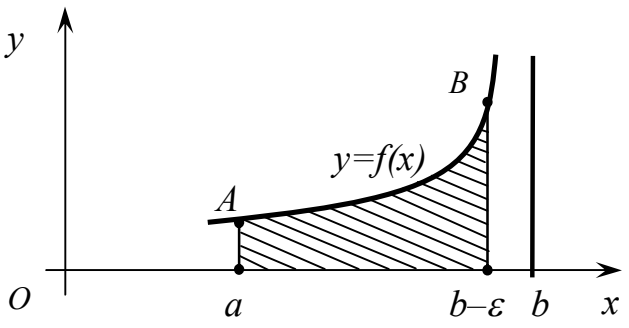


Рис. 27

Примеры решения типовых задач

Пример 1. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} (\alpha > 0)$. Установить при каких значениях α этот интеграл сходится, а при каких расходится.

Решение. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда $\int\limits_1^B \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^B = \frac{1}{1-\alpha}(B^{1-\alpha} - 1)$.

Итак, $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{B\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}(B^{1-\alpha} - 1)$. Следовательно, если $\alpha > 1$, то $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(-1) = \frac{1}{\alpha - 1}$ (т.к. $B^{1-\alpha} = \frac{1}{B^{\alpha-1}} \to 0$ при $B \to \infty$), т.е. интеграл сходится; если $\alpha < 1$, то $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$ (т.к. $B^{1-\alpha} \to \infty$ при $B \to \infty$), т.е. интеграл расходится.

При $\alpha = 1$ $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{B\to\infty} \int\limits_1^B \frac{dx}{x} = \lim\limits_{B\to\infty} \ln|x|\Big|_1^B = \infty$, т.е. интеграл расходится.

Пример 2. Доказать, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)e^x}$ сходится.

Решение. Известно, что при $x \geq 1, \frac{1}{\left(x^2+1\right)e^x} \leq \frac{1}{x^2+1}$. Тогда $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)} = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_1^B \frac{dx}{x^2+1} = \lim\limits_{B\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_1^B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)e^x}$ – сходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2x^3}$.

Решение. Функция терпит разрыв в точке $x = 0$. Очевидно, что при $x \geq 0$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2x^3} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, тогда

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2x^3} \leq \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{3}{2} \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(1 - \sqrt[3]{\varepsilon^2}\right) = \frac{3}{2}$. Итак, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2x^3}$ сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв при $x=1$, следовательно, по определению:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = -2 \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2 \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\sqrt{1-1+\varepsilon} - \sqrt{1-0}\right) = -2 \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\sqrt{\varepsilon} - 1\right) = 2.$$ Интеграл сходится.

Пример 5. Найти условия сходимости и расходимости несобственных интегралов $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} (\alpha - const > 0)$.

Решение. Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв при $x=0$.

Пусть $\alpha \neq 1$.

Тогда $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$ и если $\alpha<1$, то $\frac{1}{1-\alpha}$; если $\alpha>1$, то ∞.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} (\ln 1 - \ln\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon\to+0} \ln\varepsilon = +\infty.$$

Итак, данный интеграл сходится при $0<\alpha<1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Задания для самостоятельной работы

7.10. Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$;

б) $\int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$;

в) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x}$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

д) $\int\limits_0^{\infty} x \sin x dx$;

е) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$;

ж) $\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$;

з) $\int\limits_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

Ответы

7.10. а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) ∞; г) $\frac{\pi^2}{8}$; д) не существует; е) $\frac{\pi}{6}$; ж) 2; з) $\frac{3}{10}$.

7.6. Приложения определённого интеграла

Краткие теоретические сведения

Площадь криволинейной трапеции

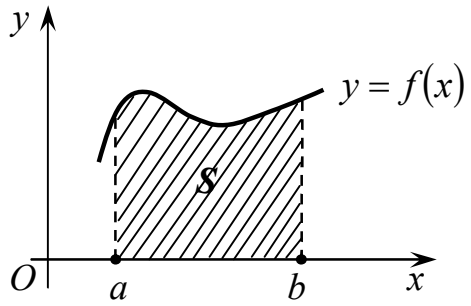


Рис. 28

Площадь криволинейной трапеции в декартовых координатах

Нами было установлено, что геометрический смысл определённого интеграла – *площадь криволинейной трапеции*, ограниченной осью Ox, прямыми $x=a,\ x=b$ и графиком функции $y=f(x)$. Таким образом, если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y=f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 28) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке:

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Если функция $f(x)$ неположительна на отрезке $[a;b]$, то площадь S над кривой $y=f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 29) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке, взятому со знаком «минус»:

$$S=-\int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

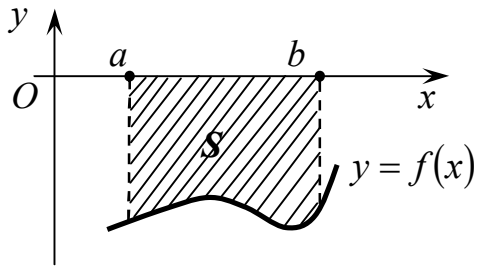


Рис. 29

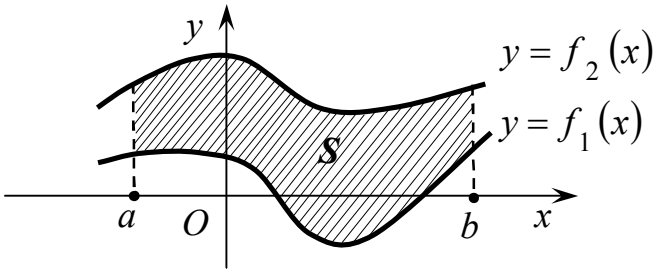


Рис. 30

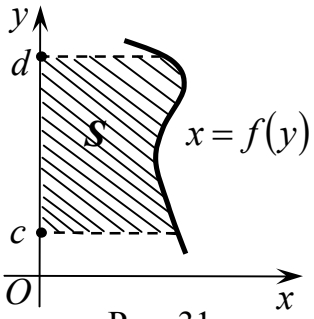


Рис. 31

Если $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на этом отрезке (рис. 30) вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \tag{3}$$

Если криволинейная трапеция прилегает к оси ординат и ограничена непрерывной кривой $x = f(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и осью Oy (рис. 31), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d f(y)dy. \tag{4}$$

Площадь криволинейной трапеции в случае параметрического задания граничной кривой. Для вычисления площади криволинейной трапеции при задании верхней ограничивающей кривой параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $y(t)$ – непрерывна, а $x(t)$ – монотонно возрастает и непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta]$ и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, достаточно в формуле для вычисления площади в прямоугольных декартовых координатах сделать в интеграле замену переменной $x = x(t)$:

$$S = \int_a^b ydx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt. \tag{5}$$

При монотонном убывании $x(t)$, то есть при $x'(t) < 0$, $x(\alpha) = b$, $x(\beta) = a$ будем иметь

$$S = \int_a^b ydx = \int_\beta^\alpha y(t)x'(t)dt. \tag{6}$$

Длина дуги кривой

Длина дуги кривой в декартовых координатах

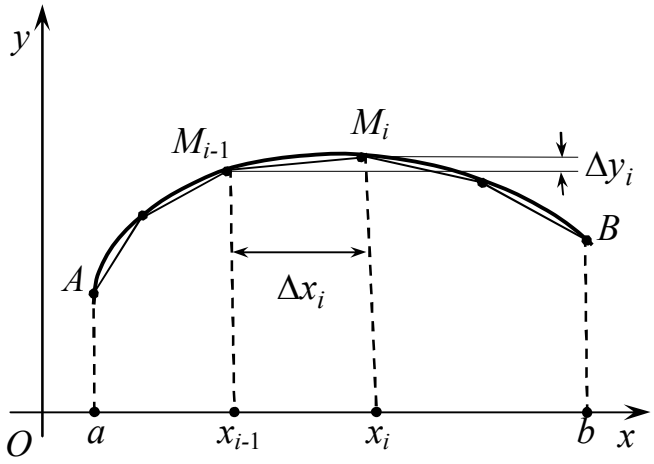


Рис. 32

Пусть AB – несамопересекающаяся незамкнутая дуга кривой. Такие дуги называются также *простыми* дугами. За длину простой дуги принимают предел периметров вписанных ломаных при стремлении наибольшей из длин звеньев ломаной к нулю, если этот предел существует и конечен. В случае замкнутой кривой, а также самопересекающейся кривой, когда она может быть разбита на конечное число простых дуг, за длину кривой принимают сумму длин простых дуг, ее составляющих (рис. 32).

Пусть дуга AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, где функция $f(x)$ – непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[a;b]$. Тогда ее длина s вычисляется по формуле:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{7}$$

Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями. Пусть дуга AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, где $x(t)$, $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, $x^2 + y^2 \ne 0$ и $x(t)$ – монотонная функция. Тогда длина s дуги AB вычисляется по формуле

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\, dt. \tag{8}$$

<u>*Площадь поверхности вращения*</u>

Площадь поверхности вращения в декартовых координатах. Пусть поверхность σ образована вращением вокруг оси Ox дуги AB, заданной уравнением $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, где $f(x)$ – неотрицательная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ функция.

За площадь S поверхности вращения σ принимают предел площадей поверхностей, образованных вращением вокруг оси Ox вписанных в дугу AB ломаных, при неограниченном увеличении числа звеньев ломаной и стремлении к нулю наибольшей из длин ее звеньев.

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{9}$$

Площадь поверхности вращения в случае параметрического задания кривой. В случае задания кривой AB параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где функции $x(t)$, $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, $x(t)$ – монотонна и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, в результате замены переменной $x = x(t)$ в интеграле в равенстве (7.8) получаем формулу

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \tag{10}$$

<u>*Объём тел вращения*</u>

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a;b]$. Тогда *тело, которое образуется вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции*, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ (рис. 33), имеет объём

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (11)$$

Если тело вращается вокруг оси Oy (рис. 34), то его объём:

$$V_y = \pi \int_c^d f^2(y)dy. \qquad (12)$$

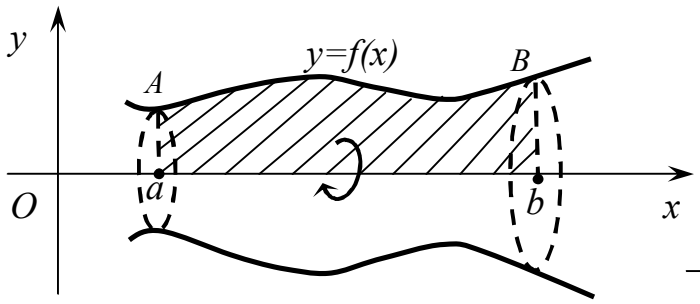


Рис. 33

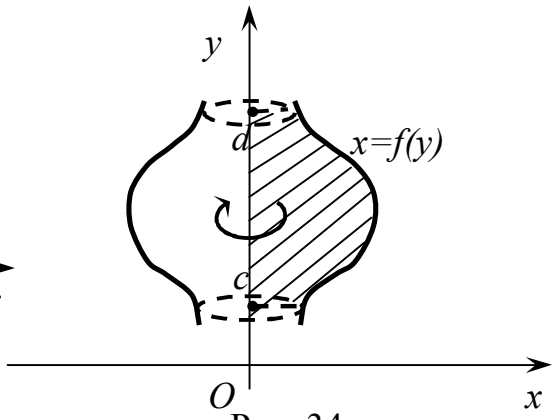


Рис. 34

Примеры решения типовых задач

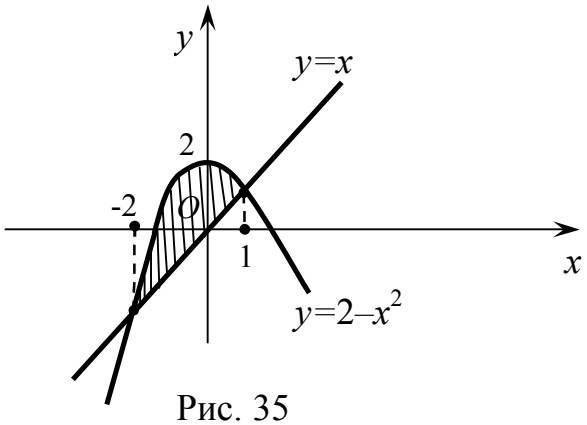


Рис. 35

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 2 - x^2, y = x.$

Решение. Изобразим данную фигуру (рис. 35).

Площадь заданной фигуры может быть найдена с помощью интеграла $S = \int_a^b \left[(2 - x^2) - x\right]dx$ (формула 3).

Найдём границы интегрирования, решив систему уравнений $y = 2 - x^2, y = x \Rightarrow x = -2, x = 1$, т.е. $a = -2,\ b = 1$. Итак, согласно формуле (3), имеем:

$$S_ф = \int_{-2}^{1} \left[2 - x^2 - x\right]dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2} = 4{,}5\,(\text{кв.ед.}).$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4x - x^2,\ y = 0$ и $x = 5$.

Решение. Парабола $y = 4x - x^2$ пересекает ось абсцисс в точках $x = 0$ и $x = 4$. Фигура, площадь которой требуется найти показана на рисунке 36 штриховкой. Пусть S_1 и S_2 – площади частей этой фигуры, соответствующих отрезкам $[0;4]$ и $[4;5]$, а S – искомая площадь; тогда $S = S_1 + S_2$.

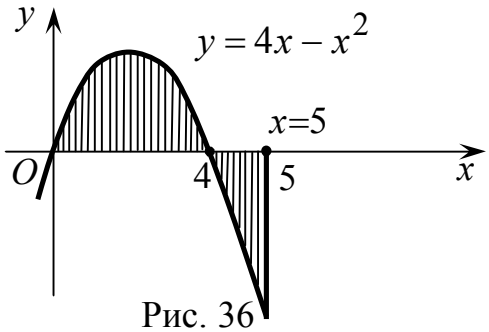


Рис. 36

Используя формулу (1), получим

$$S_1 = \int_0^4 \left(4x - x^2\right)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$ (кв. ед.), а по формуле (2) находим $S_2 = -\int_4^5 \left(4x - x^2\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big|_4^5 = \left(\frac{125}{3} - 50\right) - \left(\frac{64}{3} - 32\right) = \frac{7}{3}$ (кв. ед.).

Следовательно, $S = S_1 + S_2 = \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = 13$ (кв. ед.).

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t),\quad 0 \le t \le 2\pi$ и осью Ox (рис. 37).

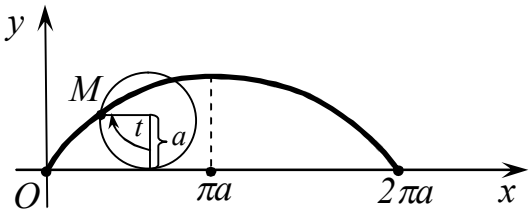


Рис. 37

Решение. По формуле (5) имеем

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Пример 4. Вычислить длину дуги параболы $y = 2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$.

Решение. Функция $y = 2\sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, ее производная $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ непрерывна на полуинтервале $(0;1]$ и $\lim\limits_{x\to 0} y'(x) = \infty$. Поэтому для длины данной дуги параболы по формуле (7) получаем несобствен-

ный интеграл $s=\int\limits_0^1\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$. Определение несобственных интегралов было рассмотрено в параграфе 6. Имеем $s=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx$.

Рассмотрим отдельно неопределенный интеграл:

$$\int\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx=\int\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}dx+\int\frac{dx}{2\sqrt{x^2+x}}=\sqrt{x^2+x}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|.$$ Тогда

$$s=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\sqrt{x^2+x}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|\right]\Bigg|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\sqrt{2}+0{,}5\ln\left(1{,}5+\sqrt{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon}-0{,}5\ln\left|\varepsilon+0{,}5+\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon}\right|\right]=\sqrt{2}+0{,}5\ln\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

Пример 5. Найти длину дуги полукубической параболы $x=\frac{t^2}{2}$, $y=\frac{t^3}{3}$, отсеченной прямой $x=1$ (рис. 38).

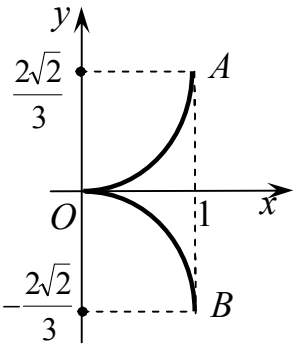


Рис. 38

Решение. Длина s дуги AOB равна удвоенной длине дуги AO. Значение параметра t, соответствующее точке A пересечения параболы с прямой, найдем из системы уравнений $x=\frac{t^2}{2}$, $x=1$. Получим $t_A=\sqrt{2}$. Аналогично $t_O=0$. Тогда

$$s=2\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{t^2+t^4}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{2}{3}\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$$

Пример 6. Вычислить площадь части поверхности параболоида $y^2+z^2=4x$, отсеченной плоскостью $x=1$.

Решение. Данная поверхность является поверхностью, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 4x$, $0\le x\le 1$. Тогда $y=2\sqrt{x}$, $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$ и по формуле (9) получаем:

$$S=2\pi\int\limits_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx=4\pi\int\limits_0^1\sqrt{x+1}dx=\frac{8}{3}\pi\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{8}{3}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Пример 7. Найти площадь поверхности**,** полученной вращением циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ вокруг оси Ox (см. рис. 37).

Решение. По формуле (10) имеем

$$S = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2 + [a(1-\cos t)]^2}\,dt = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{64}{3}\pi a^2$$

Пример 8. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4 - x, x = 0$.

Решение. Объём тела найдём, используя формулу (12):

$$x = 4 - y^2, x = 0 \Rightarrow 4 - y^2 = 0, y = \pm 2 \Rightarrow V_y = \pi \int\limits_c^d x^2 dy = \pi \int\limits_{-2}^{2} \left(4 - y^2\right)^2 dy =$$

$$= \pi \int\limits_{-2}^{2} \left(16 - 8y^2 + y^4\right) dy = \pi \left(16y - \frac{8y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_{-2}^{2} = 2\pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{512}{15}\pi \approx 107{,}23.$$

Задания для самостоятельной работы

7.11. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2 + 1, y = \frac{1}{x}, x = 0, x = 2$;

б) $y = 4x - 2x^2, y = 0, x = 3$;

в) $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{2}x$;

г) $y = 2\sin x, y = 0, x = 0, x = 2\pi$;

д) $y = (x+1)^2, y = 0, y = \frac{4}{x}, x = 2$;

е) $y = 3^x, xy = 3, y = 1$;

ж) $x = \cos t + \sin t, y = \cos t - \sin t, 0 \le t \le \pi$;

з) $x = \frac{t^2}{2} + 7, y = t^2 + 4, 2 \le t \le 3$.

7.12. Найти длины дуг кривых, заданных уравнениями:

а) $y = \arcsin e^{-x}, \quad 0 \le x \le 1$;

б) $y = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \le x \le 6$;

в) $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}, \quad 0 \le x \le 2$;

г) $y = 4 - x^2, \quad 0 \le x \le 2$;

д) $y = \ln\sin x, \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

е) $y = 1 - \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$;

ж) $x = \frac{1}{3}t^3 - t, y = t^2 + 2, 0 \le t \le 3$;

з) $x = 5\cos^2 t, y = 5\sin^2 t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

7.13. Найти площади поверхностей, образованных вращением вокруг оси Ox дуг кривых, заданных уравнениями:

а) $y = x^3, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$;

б) $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$;

в) $y = \sin 2x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;

г) $y = \frac{x^3}{3}, \quad -2 \le x \le 2$;

д) $y^2 = 9x, \quad 0 \le x \le 4$;

е) $x^2 = 4 + y, \quad -\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6}$;

ж) $x = \mathrm{e}^t \sin t,\ y = \mathrm{e}^t \cos t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$; з) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$

7.14. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных линиями (в заданиях а) – д) ось вращения Ox, в заданиях е) – з) ось вращения Oy):

а) $y = x^3,\ y = x$; б) $y = 2^x,\ y = 1,\ x = 2$;

в) $y = x^2,\ y = (x-2)^2,\ y = 0$; г) $y = \dfrac{3}{x},\ y = 1,\ x = 1,\ x = 3$;

д) $y = \sqrt{x},\ y = x - 2,\ y = 0$; е) $y = 3x^2,\ x = 0,\ y = 3$;

ж) $y = \sqrt{x},\ y = 3,\ x = 0$; з) $y = \dfrac{3}{x},\ y = 1,\ y = 3,\ x = 0$.

Ответы

7.11. а) $\dfrac{1}{3} + \ln 2$; б) $\dfrac{8}{3}$; в) $\dfrac{4}{3}$; г) 8; д) $\dfrac{8}{3} + 4\ln 2$; е) $\dfrac{2}{\ln 3} + 3\ln 3 - 3$; ж) π; з) $\dfrac{125}{4}$. **7.12**. а) $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$; б) $3\sqrt{37} - 0{,}5\ln\left(\sqrt{37} - 6\right)$; в) $\dfrac{e^2 - 1}{e}$; г) $\sqrt{17} - \dfrac{1}{4}\ln(\sqrt{17} - 4)$ д) $\dfrac{\ln 3}{2}$; е) $\dfrac{1}{2}\ln 3$; ж) 12; з) $5\sqrt{2}$. **7.13.** а) $\dfrac{61\pi}{1728}$; б) $2\sqrt{2}\pi + 2\pi\ln(\sqrt{2} + 1)$; в) $\sqrt{5}\pi + \dfrac{\pi}{2}\ln(2 + \sqrt{5})$; г) $\dfrac{\pi}{9}(17\sqrt{17} - 1)$; д) 49π; е) $\dfrac{65\pi\ln(5 - 2\sqrt{6})}{16} - \dfrac{75\pi\sqrt{6}}{8}$; ж) $\sqrt{2}\pi(e^{\pi} - 1)$. **7.14.** а) $\dfrac{8}{21}$;б) $\dfrac{15}{\ln 4} - 2$; в) $\dfrac{2\pi}{5}$; г) $6\pi - 2$; д) $\dfrac{44\pi}{3}$; е) 1,5; ж) $\dfrac{243\pi}{5}$; з) $6\pi - 2$.

7.7. Приложение определенного интеграла в экономике

Краткие теоретические сведения

Излишек потребителя и излишек производителя

Пусть спрос потребителя на некоторый товар задан **функций спроса** $p = D(x)$, которая представляет собой зависимость оптимальной для потребителя цены товара p от приобретаемого количества товара x. Предположим. Что потребитель потребляет x^* единиц товара по цене p^*, т.е. платит $p^* x^*$ рублей. Поскольку, согласно функции спроса, меньшее количество товара потребитель был готов покупать по более высокой цене, возникает излишек потребителя, равный площади фигуры N, изображенной на рисунке 39. **Излишек потребителя** равен сумме, которую надо было бы заплатить потребителю, чтобы заставить его полностью отказаться от приобретения данного товара.

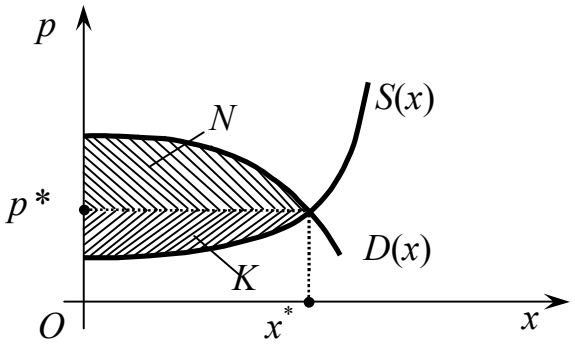


Рис. 39

Пусть **функция предложения** $S(x)$ показывает, какова должна быть цена товара p, чтобы побудить производителя поставить на рынок x единиц товара. Предположим, что производитель готов продать на рынке x^* единиц товара по цене p^*. Поскольку, согласно функции предложения, меньшее количество товара производитель был готов поставить по более низкой цене, возникает излишек производителя, равный площади фигуры K, изображенной на рис. 15. **Излишек производителя** равен разности между минимальной суммой, за которую он был бы готов продать x^* единиц товара, и той суммой, за которую он фактически продаёт это количество товара.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Пусть $MR(x)$ – предельный доход фирмы при объёме производства равном x. Дайте экономическую интерпретацию величины

$$\int_{75}^{80} MR(x)dx\,.$$

*Решение***.** Данная величина представляет собой прирост дохода при возрастании объёма производства с x=75 до x=80 единиц.

Пример 2. Фирма планирует увеличить ежедневный объем производства с 10 до 15 единиц. Её текущая функция предельных издержек производства имеет вид $MC_1(x) = x^2 - 20x + 108$. После покупки нового оборудования фирма может поменять функцию предельных издержек на $MC_2(x) = x^2 - 12x + 75$. Вычислите площадь между графиками этих функций предельных издержек от x=10 до x=15. Дайте экономическую интерпретацию полученной величины.

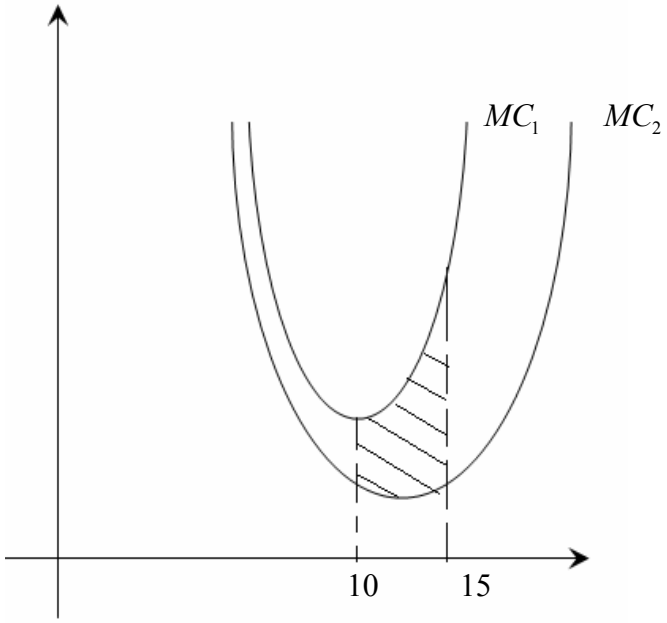


Рис. 40

*Решение***.** Графики функций $MC_1(x)$, $MC_2(x)$ представлены на рисунке 40. Искомая площадь S равна

$$S = \int_{10}^{15} \left[MC_1(x) - MC_2(x) \right] dx = \int_{10}^{15} \left[\left(x^2 - 20x + 108 \right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 12 + 75 \right) \right] dx =$$

$$= \int_{10}^{15} \left[\frac{1}{2}x^2 - 8x + 33 \right] dx = \left(\frac{1}{6}x^3 - 4x^2 + 33x \right) \Big|_{10}^{15} = 60\frac{5}{6}.$$

Эта величина представляет собой сумму, на которую будут снижены общие издержки производства в результате использования нового оборудования.

Пример 3. Найдите излишек потребителя в результате реализации 20 единиц товара, если функция спроса имеет вид $p = D(x) = 50 - 0{,}06x^2$.

*Решение***.** Так как продано 20 единиц товара, то цена реализации должна быть равна

$$p = 50 - 0{,}06(20)^2 = 26.$$

Тогда излишек потребителя равен

$$\int_0^{20} \left[\left(50 - 0{,}06x^2 \right) - 26 \right] dx = \int_0^{20} (24 - 0{,}06x^2) dx = (24x - 0{,}02x^3) \Big|_0^{20} = 320$$

Итак, излишек потребителя составляет 320 денежных единиц.

Пример 4. Пусть деньги поступают на банковский счет непрерывно, при этом итоговая сумма за год составляет 1000 рублей. Данный актив приносит 6 % годовых, начисляемых непрерывно в течение года. Определите сумму денег на счете через 5 лет ежегодных вложений при указанных условиях.

Решение. Разделим весь период вложения денег [0, 5] на дневные интервалы $\Delta t = \frac{1}{365}$ точками $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (здесь t_1=0, а t_n=5 – Δt). Так как итоговая сумма за год равна 1000 рублей, то в течение одного дневного интервала времени на счет поступает сумма 1000Δt. Если эта сумма поступила к моменту времени t_i, то на неё будут непрерывно начисляться проценты в течение оставшихся (5 – t_i) лет. Тогда результатом вложения одной суммы 1000Δt в момент времени t_i будет сумма

$$1000\Delta t e^{0,06(5-t_i)}.$$

Сложив результаты ежедневных вложений, получим итоговую сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} 1000\Delta t e^{0,06(5-t_i)}.$$

Нетрудно заметить, что это сумма Римана для функции на промежутке [0, 5]. Поскольку промежутки времени Δt могут быть сколь угодно малы (так как деньги поступают на счет непрерывно), то переходя к пределу $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sigma$, получим сумму денег на счете через 5 лет хранения при указанных условиях:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sigma = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^5 1000 e^{0,06(5-t)} dt = -\frac{1000}{0,06} e^{0,06(5-t)} \Big|_0^5 =$$

$$= -\frac{1000}{0,06}(1 - e^{0,3}) \approx 5831.$$

Таким образом, через 5 лет на счете будет лежать 5831 рубль.

Задания для самостоятельной работы

7.15. Пусть функция предельных издержек фабрики сумок при объёме производства x задана формулой $\frac{3}{32}x^2 - x + 200$ тысяч рублей (где x измеряется в единицах, равных 100 сумочкам).

а) Найдите общие издержки производства 6 дополнительных единиц, если 2 единицы товара уже произведены.

б) Дайте графическую иллюстрацию полученного в а) результата.

7.16. Пусть функция предельной прибыли фирмы при объёме производства x задана формулой 100+50x-3x^2.

а) Найдите дополнительную прибыль фирмы от производства 3 единиц товара, если 5 единиц уже произведены.

б) Дайте графическую иллюстрацию полученного в а) результата.

7.17. Пусть $MP(x)$ – предельная прибыль фирмы при объеме выпуска x. Дайте экономическую интерпретацию величины

$$\int_{44}^{48} MP(x)dx.$$

7.18. Пусть $MC(x)$ – предельные издержки фирмы при объеме выпуска x. Дайте экономическую интерпретацию величины

$$\int_0^{100} MC(x)dx.$$

7.19. Найдите излишек потребителя при заданных функции спроса $p = D(x)$ в объеме реализованной продукции x. Выполните графическую иллюстрацию.

а) $p = 3 - \frac{x}{10}$, $x = 20$;

б) $p = \frac{x^2}{200} - x + 50$, $x = 20$;

в) $p = \frac{500}{x+10} - 3, x = 40$;

г) $p = \sqrt{16 - 0,02x}$, $x = 350$.

7.20. Найдите излишек производителя при заданных функции предложения $p = S(x)$ и объеме реализованной продукции x. Выполните графическую иллюстрацию.

а) $p = 0,01x + 3$, $x = 200$;

б) $p = \frac{x^2}{10} + 1$, $x = 3$;

в) $p = \frac{x}{2} + 7$, $x = 10$;

г) $p = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $x = 36$.

7.21. Найдите излишки потребителя и производителя при заданных функциях спроса $p = D(x)$ и предложения $p = S(x)$. Выполните графическую иллюстрацию.

а) $D(x) = 12 - \frac{x}{50}$, $S(x) = \frac{x}{20} + 5$;

б) $D(x) = \sqrt{25 - 0,1x}$, $S(x) = \sqrt{0,1x + 9}$.

7.22. Фирма оценивает спрос на свою продукцию (в рублях) с помощью функции

$$D(x) = \frac{800000e^{-\frac{x}{5000}}}{x + 20000}.$$

Определите объём продаж, соответствующий цене продукта p=16 рублей. Вычислите излишек потребителя при полученном объёме продаж.

7.23. Луна-Парк продает в выходные дни в среднем 400 билетов по цене 75 рублей. Изучив потребительский спрос, руководство Парка выяснило, что понижение цены билета на каждые 5 рублей увеличивает число

посетителей за день на 35 человек. Найдите функцию спроса для Луна-Парка и вычислите излишек потребителя при цене билета p=60 рублей.

7.24. Пусть деньги поступают на банковский счет непрерывно, при этом итоговая сумма за год составляет 1000 рублей. Данный актив приносит 5% годовых, начисляемых непрерывно в течение года. Определите сумму денег на счете через 3 года ежегодных вложений при указанных условиях.

7.25. Пусть деньги поступают на банковский счет непрерывно, при этом итоговая сумма за год составляет 2000 рублей. Данный актив приносит 6 % годовых, начисляемых непрерывно в течение года. Определите сумму денег на счете через 2 года ежегодных вложений при указанных условиях.

7.26. Пусть деньги поступают на банковский счет непрерывно, при этом итоговая сумма за год составляет 16000 рублей. Данный актив приносит 8% годовых, начисляемых непрерывно в течение года. Определите сумму денег на счете через 4 года ежегодных вложений при указанных условиях.

7.27. Банк непрерывно начисляет проценты по ставке 10% годовых. Если деньги поступают на счет стабильно по 5000 рублей в год, сколько времени требуется, пока ценность инвестиций не достигнет 140000 рублей?

7.28. Банк непрерывно начисляет проценты по ставке 4% годовых. В каком объёме деньги должны непрерывно поступать на счет в течение каждого года, чтобы по истечении 10 лет накопить 100 тысяч рублей?

Ответы

7.15. а) 1185,75 тыс. руб. **7.19.** а) 20 руб.; б) 173,33 руб.; в) 404,72 руб.; г) 183,33 руб. **7.20.** а) 200 руб.; б) 2 руб.; в) 25 руб.; г) 36 руб. **7.21.** а) 10 руб., 250 руб.; б) 362,58 руб., 42,56 руб. **7.22.** 3727 ед.; 37753 руб. **7.23.** 18216 руб. **7.24.** 3236,68 руб. **7.25.** 4249,90 руб. **7.26.** 75426 руб. **7.27.** 13,35 лет. **7.28.** 8133 руб.

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 14 по теме «Неопределенный интеграл»

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\left(\dfrac{4x}{\sqrt{3-x^2}}+\dfrac{1}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}\right)dx$
2. $\int(4x+7)\cos 3x dx$
3. $\int\dfrac{x+1}{x\sqrt{x-1}}dx$
4. $\int\dfrac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$
5. $\int\sin 3x\cos 10x dx$

Контрольная работа № 15 по теме
«Определенный интеграл и его приложения»

1. Вычислить: а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{9-8x}}dx$, б) $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx$.

2. Оценить определенный интеграл $\int\limits_{1}^{8} \frac{\log_2 x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{4-x}$, $y=\sqrt{x}$, $y=0$.

ГЛАВА 8. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции двух переменных

Краткие теоретические сведения

Понятие функции нескольких переменных

Пусть каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из некоторой области $D(x, y)$ соответствует определённое число $z \in E \subset \mathbb{R}$. Тогда z называется функцией двух переменных x и y; x, y – независимыми переменными или аргументами. Совокупность всех точек, в которых определена функция двух переменных, называется *областью существования* или *областью определения* функции. Она изображается на координатной плоскости xOy, обозначается D, а множество всех значений функции – E.

Функция двух переменных обозначается символом: $z = f(x, y)$.

Функцией двух переменных также называется отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Геометрическим изображением функции двух переменных является некоторая поверхность в пространстве.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$. называется геометрическое место точек плоскости xOy, для которых данная функция имеет одно и то же значение: уравнение линии уровня есть $f(x, y) = c$..

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трёх и большего числа переменных. Величина y называется функцией переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, если каждой совокупности $(x_1, x_2, ...x_n)$ из некоторой области n-мерного пространства соответствует определённое значение y. Обозначается: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Так как совокупность значений независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ определяет точку n-мерного пространства $M(x_1, x_2, ...x_n)$, то всякую функцию нескольких переменных обычно рассматривают как функцию точек M пространства соответствующей размерности: $y = f(M)$.

Предел и непрерывность функции

Для функции двух (и большего числа) переменных вводятся понятия предела и непрерывности функции, аналогично случаю функции одной переменной.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число A называется

пределом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$, если $\forall^{\varepsilon>0}\exists^{\delta>0}\forall^{x,y}\, 0 < |x - x_0| < \delta, 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Обозначается: $A = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = \lim\limits_{M\to M_0} f(x, y)$.

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти область определения функции $z = \sqrt{xy}$.

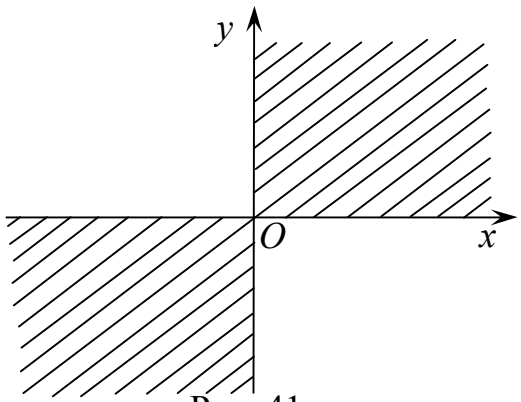


Рис. 41

Решение. Данная функция $z = \sqrt{xy}$ определена, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $xy \geq 0$. Это возможно в двух случаях: 1) $x \geq 0$, $y \geq 0$; 2) $x \leq 0$, $y \leq 0$. Первому условию удовлетворяют все точки, лежащие в первой четверти и на координатных осях, второму – точки, лежащие в третьей четверти и на координатных осях.

Следовательно, областью определения является совокупность точек, расположенных в первом и третьем координатных углах и на координатных осях (рис. 41).

Пример 2. Найти область определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$.

Решение. Функция $z = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$ определена, когда подкоренное выражение положительно, т. е. $16 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 16$. Последнему неравенству удовлетворяют точки, лежащие внутри круга радиуса $R = 4$ (граничные точки исключаются). Область определения функции – совокупность точек, лежащих внутри круга радиуса $R = 4$ с центром в начале координат (рис. 42).

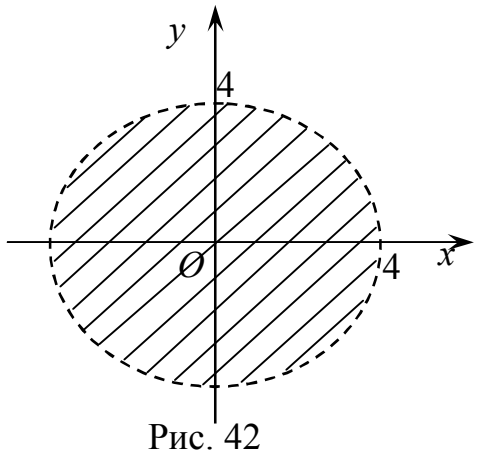


Рис. 42

Пример 3. Найти область определения функции $z = \ln(x + y)$.

Решение. Так как выражение под знаком логарифма должно быть положительно, то функция $z = \ln(x + y)$ определена при $x + y > 0$. Этому условию соответствуют точки, лежащие выше прямой $y = -x$ (точки прямой исключаются; рис. 43).

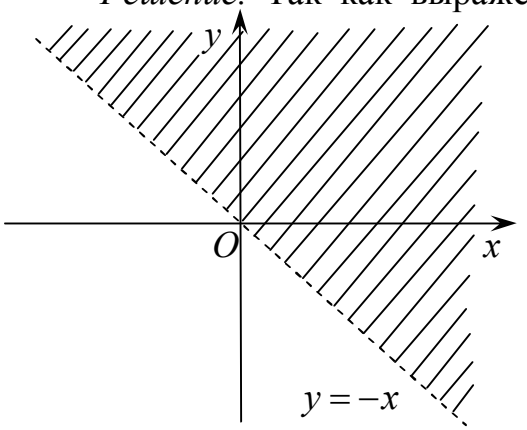


Рис. 43

Пример 4. Найти область определения функции $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 3)$.

Решение. Функция $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 3)$ определена при условии $-1 \le x^2 + y^2 - 3 \le 1$, которое равносильно условию $2 \le x^2 + y^2 \le 4$.

Граничными линиями области определения являются окружности $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, которые также принадлежат этой области.

Таким образом, область определения функции состоит из точек кольца, лежащих между окружностями $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, включая точки, лежащие на этих окружностях.

Пример 5. Построить линии уровня функции $z = f(x, y)$, соответствующие значениям $c = 1, 2, 3, 4, 5$, если: 1) $z = x + y$; 2) $z = x^2 + y^2$.

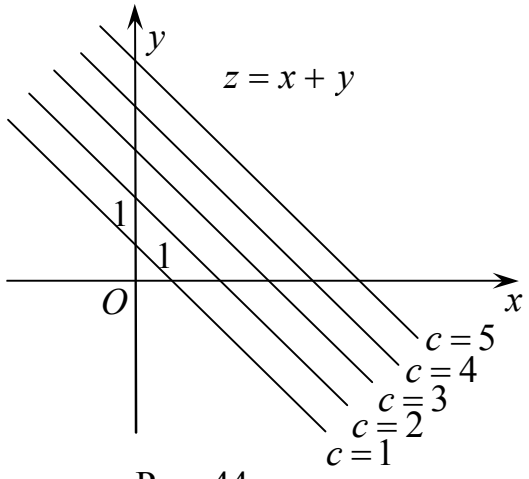


Рис. 44

Решение. 1) Полагая $f(x, y) = c$, где c принимает значения из множества $M = \{1,2,3,4,5\}$, получим уравнения соответствующих линий уровня: $x + y = c$. Построив эти линии в системе координат xOy, мы видим, что искомые линии уровня суть прямые, параллельные биссектрисе 2-го и 4-го координатных углов (рис. 44).

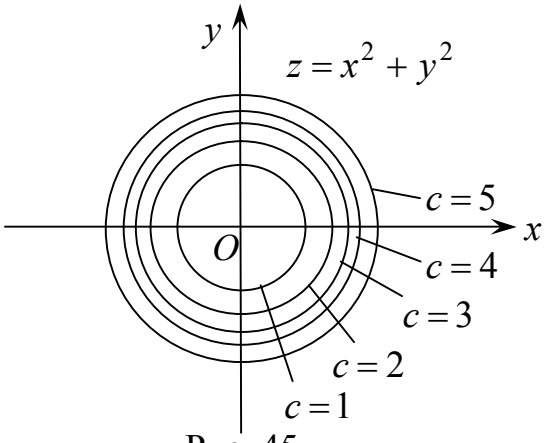


Рис. 45

2) Множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = c$ где $c \in M$, является окружностью радиуса $\sqrt{c}$. Поэтому искомое семейство линий уров-

ня состоит из концентрических окружностей (рис. 45).

Пример 6. Вычислить предел $A=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Решение. $A=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)=2$.

Функция $z=f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0\left(x_0;y_0\right)$, если она определена в этой точке и имеет предел, равный значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Функция непрерывная во всех точках некоторой области D называется непрерывной в данной области. Точки, в которых непрерывность нарушается, называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва $z=f(x,y)$ могут образовывать целые *линии разрыва*. Так, например, функция $z=\dfrac{2}{y-x}$ имеет линию разрыва $y=x$.

Пример 7. Исследовать на непрерывность функцию $z=\dfrac{5}{3x^2+y^2}$.

Решение. Функция $z=\dfrac{5}{3x^2+y^2}$ непрерывна в любой точке плоскости за исключением точки $M\left(0;0\right)$, в которой функция терпит бесконечный разрыв.

Задания для самостоятельной работы

8.1. Найти область определения функций:

а) $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{xy}$;

б) $z=\sqrt{x}+y$;

в) $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$;

г) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;

д) $z=\sqrt[4]{2-x^2+y}$;

е) $z=\ln\left(x^2+y^2-4\right)$;

ж) $z=\ln\left(3x+y\right)$;

з) $z=\dfrac{\arcsin\left(2x+y\right)}{\arccos\left(2x-y\right)}$.

Ответы

8.1. а) части полосы $-2 \le n \le 2$, расположенные в первой и третьей четвертях; б) полуплоскость, расположенная справа от оси ординат, включая ось; в) часть плоскости, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, включая сам эллипс; г) внутренняя часть квадрата, ограниченная прямыми $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$, включая его границы; д) часть плоскости, расположенные внутри параболы $y = x^2 - 2$, включая дугу параболы; е) вся плоскость, кроме круга $x^2 + y^2 = 4$ и его границы; ж) верхняя полуплоскость относительно прямой $y = -3x$, исключая точку, самой прямой; з) внутренняя часть ромба на плоскости, ограниченного прямыми $y = 1 - 2x$, $y = -1 - 2x$, $y = 2x - 1$, $y = 2x + 1$ (включая ребра ромба, кроме ребра, лежащего на прямой $y = 2x - 1$).

8.2. Частные производные. Полный дифференциал

Краткие теоретические сведения

Частные производные

Если переменной x дать некоторое приращение Δx, а y оставить постоянной, то функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое частным приращением функции z по переменной x:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично, если переменная y получит приращение Δy, а x оставить постоянной, то функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_y z$, называемое частным приращением функции z по переменной y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Частной производной функции двух переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции $z = f(x, y)$ по определению имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \text{ (частная производная по } x\text{)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \text{ (частная производная по } y\text{)}.$$

Аналогично определяются частные производные функции любого числа независимых переменных.

При нахождении частной производной пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая остальные переменные постоянными.

Дифференциал функции

Дифференциал функции $z = f(x, y)$, найденный при условии, что одна из независимых переменных изменяется, а вторая остаётся постоянной, называется *частным дифференциалом:* $d_x z = f_x'(x, y)dx$, $d_y z = f_y'(x, y)dy$, где $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ – произвольные приращения независимых переменных, называемых их дифференциалами.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ называется разность $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Главная часть приращения функции $z = f(x, y)$ линейно зависящая от приращений независимых переменных $\Delta x, \Delta y$ называется полным дифференциалом функции и обозначается – dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (1)$$

Для функций n переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ полный дифференциал определяется выражением

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n. \qquad (2)$$

Функция, имеющая полный дифференциал, называется *дифференцируемой.*

Полный дифференциал часто используется для приближенных вычислений, так как $\Delta z \approx dz$, т.е.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0). \qquad (3)$$

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Обозначаются:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Употребляются и другие обозначения:

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Если смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны, то результаты дифференцирования не зависят от порядка дифференцирования, т.е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Аналогично определяются частные производные более высокого порядка. Например, частные производные третьего порядка определяются формулами:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right);\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right);\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right);\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\ \text{и т.д.}$$

Также аналогично, частные производные третьего и высших порядков, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, равны, если они непрерывны. Например,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}.$$

Функция $z=f(x,y)$ имеет три различные частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};$$

четыре различных частных производных третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

и вообще $n+1$ различных частных производных n-го порядка.

Частные производные высших порядков находятся путем последовательного нахождения одной производной вслед за другой по правилам дифференцирования функции одной переменной.

Дифференциалы второго, третьего и более высоких порядков функции $z=f(x,y)$ определяются формулами $d^2z=d(dz)$, $d^3z=d(d^2z)$ и т.д. Они выражаются через частные производные следующим образом:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$$

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Вообще справедлива символическая формула

$$d^nz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z,$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти частные производные функции $z=x^2+3xy+2y^3$.

Решение. Считая y постоянной и дифференцируя z как функцию x, получаем частную производную по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2)'_x + (3xy)'_x + (2y^3)'_x = 2x + 3y + 0 = 2x + 3y.$$

Аналогично, считая x постоянной и дифференцируя z как функцию y, получаем частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2)'_y + (3xy)'_y + (2y^3)'_y = 0 + 3x + 6y^2 = 3\left(x + 2y^2\right).$$

Пример 2. Найти частные производные функции $z = \sqrt{x^2 + 5y^2}$.

Решение. По формулам дифференцирования находим частные производные:

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5y^2}} \cdot \left(x^2 + 5y^2\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5y^2}};$$

$$z'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5y^2}} \cdot \left(x^2 + 5y^2\right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5y^2}} \cdot 10y = \frac{5y}{\sqrt{x^2+5y^2}}.$$

Пример 3. Найти полный дифференциал функции $z = 6x^2 y$.

Решение. Полный дифференциал вычисляется по формуле (1), поэтому находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(6x^2 y\right)'_x = 12xy;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \left(6x^2 y\right)'_y = 6x^2, \text{ тогда}$$

$$dz = 12xydx + 6x^2 dy.$$

Пример 3. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{y}$.

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)'_x = \frac{y}{2\sqrt{x}(x+y^2)}$,

а $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)'_y = -\frac{\sqrt{x}}{x+y^2}$, то по формуле (10.1) получим $dz = \frac{y}{2\sqrt{x}(x+y^2)}dx - \frac{\sqrt{x}}{x+y^2}dy.$

Пример 4. Вычислить приближенно $(1{,}02)^{3{,}01}$

Решение. Рассмотрим функцию $z = x^y$. При $x_0 = 1, y_0 = 3$ имеем $z_0 = 1^3 = 1, \Delta x = x - x_0 = 1{,}02 - 1 = 0{,}02, \Delta y = y - y_0 = 3{,}01 - 3 = 0{,}01$. Найдем полный дифференциал функции $z = x^y$ в любой точке: $dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$. Вычислим его значение в точке $M_0(1;3)$ при данных приращениях $dz = 3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}06$. Тогда $z = (1{,}02)^{3{,}01} \approx z_0 + dz = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$.

Пример 5. Найти частные производные второго порядка функции $z=\frac{x^2}{3y-5}$.

Решение. Дифференцируя z по x, найдем $z'_x=\frac{1}{3y-5}\cdot 2x$; дифференцируя z'_x еще раз по x, найдем $(z'_x)'_x=z''_{xx}=\frac{2}{3y-5}$, а дифференцируя z'_x по y, найдем:

$$(z'_x)_y{}'=z''_{xy}=2x\cdot\left(\frac{1}{3y-5}\right)_y{}'=2x\cdot\left(-\frac{3}{(3y-5)^2}\right)=-\frac{6x}{(3y-5)^2}.$$

Дифференцируя z по y, а затем еще раз по y, найдем $z_y{}'=x^2\cdot\left(-\frac{3}{(3y-5)^2}\right)$; $(z'_y)_y{}'=z''_{yy}=x^2\cdot(-3)\cdot((3y-5)^{-2})_y{}'=x^2\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot$

$\cdot(3y-5)^{-3}\cdot 3=\frac{18x^2}{(3y-5)^3}$.

Получили три разные частные производные второго порядка:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{3y-5}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{6x}{(3y-5)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{18x^2}{(3y-5)^3}$.

Пример 6. Найти частные производные второго порядка функции $z=e^x\ln y+\sin y\ln x$.

Решение. Сначала находим частные производные первого порядка, а затем искомые частные производные второго порядка:

$z'_x=e^x\ln y+\sin y\cdot\frac{1}{x}$; $z'_y=e^x\cdot\frac{1}{y}+\cos y\ln x$; $z''_{xx}=e^x\ln y+\sin y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$;

$z''_{xy}=e^x\cdot\frac{1}{y}+\cos y\cdot\frac{1}{x}$; $z''_{yy}=e^x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+(-\sin y)\cdot\ln x$.

Пример 7. Проверить, что функция $z=e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

Решение. Найдем частные производные первого и второго порядка, содержащиеся в данном уравнении:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_x{}'=\frac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}};\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_y{}'=x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)_y{}'=\left(\frac{1}{y}\right)_y{}'\cdot e^{\frac{x}{y}}+\frac{1}{y}\cdot\left(e^{\frac{x}{y}}\right)_y{}'=-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Подставляем их в данное уравнение

$$\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}-\left(-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)+y\left(-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y^3}e^{\frac{x}{y}}\right)=0,$$

преобразуем и получим $0=0$, т.е. верное равенство.

Пример 8. Если $z=e^{xy}$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$.

Решение. Последовательно дифференцируя, находим z'_x, затем z''_{xx} и $\left(z''_{xx}\right)'_y$: $z'_x=e^{xy}\cdot(xy)'_x=ye^{xy}$; $z''_{xx}=y^2e^{xy}$; $\left(z''_{xx}\right)'_y=\left(y^2e^{xy}\right)'_y=2ye^{xy}+y^3e^{xy}$.

Получили $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\left(2+y^2\right)ye^{xy}$.

Задания для самостоятельной работы

8.2. Найти полные дифференциалы функций:

а) $z=\frac{x\arcsin y}{y}$;

б) $z=x^2+y^2$;

в) $z=e^{\sin^2\left(x^2+y^2\right)}$;

г) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{x}}$;

д) $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

е) $z=\sin\left(\frac{x}{y}\right)$;

ж) $z=\ln\operatorname{tg}\frac{x+y}{x-y}$;

з) $z=\frac{x\arcsin y}{y}$.

8.3. Вычислить указанные выражения приближенно, заменяя приращение функции дифференциалом:

а) $\sqrt{12+(2.02)^2}$;

б) $(0{,}97)^{1{,}05}$;

в) $\ln\left(0{,}09^2+0{,}99^3\right)$;

г) $\cos 29^\circ\operatorname{ctg}46^\circ$;

д) $(1{,}02)^{4{,}05}$;

е) $\frac{10}{(4{,}98)^3-(5{,}03)^2}$;

ж) $\sqrt{5e^{0{,}02}+(2{,}03)^2}$;

з) $\left(2-\sqrt{0{,}97}\right)^{3{,}02}$.

8.4. Найти частные производные первых и вторых порядков функций:

а) $z=e^{x-y}(2x-1)$;

б) $z=\sin x\cos y$;

в) $z=x+y+\frac{xy}{x-y}$;

г) $z=\ln\sqrt{x+y^2}$;

д) $z=\ln\left(x+e^{xy}\right)$;

е) $z=\frac{x^2}{1-2y}$;

ж) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{x}$;

з) $z=x^{\sqrt{y}}$.

8.5. Проверить указанные равенства для заданной функции $z = f(x;y)$:

а) $z = \dfrac{x^2}{y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

б) $z = \ln(x - 2y), \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

в) $z = e^x \cos y, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

г) $z = x^y, y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\dfrac{\partial z}{\partial x}$;

д) $z = e^{-\cos(ax+y)}, a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

е) $z = \dfrac{x^2}{1-y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

ж) $z = tg^3(2x - 3y), 3\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$;

з) $z = x\ln\dfrac{y}{x}, x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

Ответы

8.2. а) $dz = \dfrac{\arcsin y}{y}dx + x\dfrac{y - \sqrt{1-y^2}\cdot\arcsin y}{y^2\sqrt{1-y^2}}dy$; б) $dz = 2xdx + 2ydy$;

в) $dz = 2e^{\sin^2(x^2+y^2)}\sin(2x^2 + 2y^2)(xdx + ydy)$; г) $dz = \dfrac{1}{x+y^2}\left(-\dfrac{y}{\sqrt{x}}dx + \sqrt{x}dx\right)$;

д) $dz = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(y^2dx - xydy)$; е) $dz = \dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\cdot(dx - \dfrac{x}{y}dy)$;

ж) $dz = \dfrac{4(-ydx + xdy)}{(x-y)2\cdot\sin\dfrac{2(x+y)}{x-y}}$; з) $dz = \dfrac{\arcsin y}{y}dx + x\cdot\dfrac{y - \sqrt{1-y^2}\cdot\arcsin y}{y^2\sqrt{1-y^2}}dy$.

8.3. а) 4,01; б) 0,97; в) –0,03; г) 0,845; д) 1,08; е) 0,1018; ж) 3,0366; з) 1,045.

8.4. а) $z''_{x^2} = e^{x-y}(2x+3)$, $z''_{y^2} = e^{x-y}(2x-1)$, $z''_{xy} = -e^{x-y}(2x+1)$; б) $z''_{x^2} = -\sin x\cos y$, $z''_{y^2} = -\sin x\cos y$, $z''_{xy} = -\sin x\cos y$; в) $z''_{x^2} = \dfrac{2y^2}{(x-y)^3}$, $z''_{x^2} = \dfrac{2y^2}{(x-y)^3}$, $z''_{xy} = -\dfrac{2y^2}{(x-y)^3}$; г) $z''_{x^2} = \dfrac{1}{2(x+y^2)^2}$, $z''_{y^2} = \dfrac{x-y^2}{2(x+y^2)^2}$, $z''_{xy} = -\dfrac{y}{(x+y^2)^2}$; д) $z''_{x^2} = \dfrac{ye^{xy}(xy-2)-1}{(x+e^x)^2}$, $z''_{y^2} = \dfrac{x^3e^{xy}}{(x+e^{xy})^2}$, $z''_{xy} = \dfrac{e^{xy}(e^{xy}+x^2y)}{(x+e^{xy})^2}$; е) $z''_{x^2} = \dfrac{2}{1-2y}$, $z''_{y^2} = \dfrac{8x^2}{(1-2y)^3}$, $z''_{xy} = \dfrac{4x}{(1-2y)^2}$; ж) $z''_{x^2} = \dfrac{2y(2x+y)}{(x^2+(x+y)^2)^2}$, $z''_{y^2} = -\dfrac{2x(2x+y)}{(x^2+(x+y)^2)^2}$, $z''_{xy} = \dfrac{y^2-2x^2}{(x^2+(x+y)^2)^2}$; з) $z''_{x^2} = \sqrt{y}(\sqrt{y}-1)x^{\sqrt{y}-2}$, $z''_{y^2} = \dfrac{\sqrt{y}\ln x(\sqrt{y}\ln x - 1)}{4y\sqrt{y}}$, $z''_{xy} = \dfrac{x^{\sqrt{y}-1}}{2}\cdot(\dfrac{1}{\sqrt{y}} + \ln x)$

8.3. Дифференцирование сложных и неявных функций

Краткие теоретические сведения

Дифференцирование сложных функций

Если $z = f(x,y)$, а $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$, т.е. z есть сложная функция u и v, то частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (1)$$

Если для функции $z = f(x,y)$ два аргумента x и y являются функциями одного аргумента t, т.е. $z = z(x(t), y(t))$, то производная вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \qquad (2)$$

Дифференцирование неявных функций

Функция $z(x,y)$ двух переменных называется *неявной*, если она задана уравнением

$$F(x,y,z) = 0,$$

не разрешенным относительно z.

Производные неявной функции находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \qquad (3)$$

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \operatorname{tg}(2x^4 - y^3)$, где $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$.

Решение. Здесь z есть сложная функция одной независимой переменной t. Найдем производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\operatorname{tg}\left(2x^4 - y^3\right)\right)_x' = \frac{8x^3}{\cos^2(2x^4 - y^3)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\operatorname{tg}\left(2x^4 - y^3\right)\right)_y' = -\frac{3y^2}{\cos^2\left(2x^4 - y^3\right)}, \ \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}, \ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Пользуясь формулой (2), получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{8x^3}{\cos^2\left(2x^4 - y^3\right)} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) - \frac{3y^2}{\cos^2\left(2x^4 - y^3\right)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{\cos^2\left(2x^4 - y^3\right)} \cdot \left(\frac{8x^3}{t^2} + \frac{3y^2}{2\sqrt{t}}\right).$$

Пример 2. Если $z = x^2 y - y^2 x$, где $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, то найти $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

Решение. Здесь z сложная функция двух переменных u и v. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 y - y^2 x\right)_x' = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y - y^2 x\right)_y' = x^2 - 2xy,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u\cos v)_u' = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (u\cos v)_v' = -u\sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = (u\sin v)_u' = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = (u\sin v)_v' = u\cos v.$$

По общим формулам (1) запишем:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(2xy - y^2\right)\cdot\cos v + \left(x^2 - 2xy\right)\cdot\sin v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(2xy - y^2\right)\cdot(-u\sin v) + \left(x^2 - 2xy\right)u\cos v.$$

Пример 3. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \frac{x^3}{y}$, где $x = u - 3v$; $y = 2u + v$.

Решение. Найдем частные производные данных функций:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^3}{y^2}; \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -3; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1.$$

По общим формулам (1) запишем:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{3x^2}{y}\cdot 1 + \left(-\frac{x^3}{y^2}\right)\cdot 2 = \frac{x^2}{y}\left(3 - \frac{2x}{y}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{3x^2}{y}\cdot(-3) + \left(-\frac{x^3}{y^2}\right)\cdot 1 = -\frac{x^2}{y}\left(9 + \frac{x}{y}\right).$$

Пример 4. Дана функция $z = \ln\left(e^x + e^{2y}\right)$. Найти 1) $\frac{\partial z}{\partial x}$; 2) $\frac{dz}{dx}$, если $y = \sin 3x$.

Решение. 1) Найдем частную производную по x, считая y – константой, получим $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(e^x + e^{2y}\right)\right)_x' = \frac{e^x}{e^x + e^{2y}}$.

2) Для функции $z = \ln\left(e^x + e^{2y}\right)$, найдем полную производную по формуле $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$. Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^{2y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2e^{2y}}{e^x + e^{2y}}$ и $\frac{dy}{dx} = 3\cos 3x$, то получим $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^{2y}} + \frac{2e^{2y}}{e^x + e^{2y}}\cdot 3\cos 3x$.

Пример 5. Найти частные производные от функции $z(x, y)$ заданной неявно $\ln(x^2 + yz^2) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2xz = 0$.

Решение. В данном случае $F(x,y,z)=\ln(x^2+yz^2)-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+2xz$. Находим сначала частные производные функции $F(x,y,z)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+yz^2}+\frac{y}{x^2+y^2}+2z;\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{z^2}{x^2+yz^2}-\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2yz}{x^2+yz^2}+2x.$$

По формулам (3) получим после преобразования:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x(x^2+y^2)+y(x^2+yz^2)+2z(x^2+y^2)(x^2+yz^2)}{(x^2+y^2)(2yz+2x(x^2+yz^2))};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(x^2+yz^2)-z^2(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)(yz+x(x^2+yz^2))}.$$

Пример 6. Проверить, что функция $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, где $x=u+v;$ $y=u-v,$ удовлетворяет соотношению:

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

Решение. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x\cdot(u+v)'_u+\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_y\cdot(u-v)'_u=\left(\frac{x}{y}\right)'_x\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}+\left(\frac{x}{y}\right)'_y\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}+\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}=\frac{y-x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x\cdot(u+v)'_v+\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_y\cdot(u-v)'_v=$$

$$=\left(\frac{x}{y}\right)'_x\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}+\left(\frac{x}{y}\right)'_y\cdot\frac{-1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}+\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}=\frac{y+x}{x^2+y^2}.$$

Теперь составим выражение:

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{y-x}{x^2+y^2}+\frac{y+x}{x^2+y^2}=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{2(u-v)}{(u+v)^2+(u-v)^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2},$$

что и требовалось доказать.

Пример 7. Показать, что функция $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

Решение. Данную функцию перепишем так:

$F(x,y,z) = 2\sin(x+2y-3z) - x - 2y + 3z.$

Найдем частные производные F'_x, F'_y, F'_z и подставив их в формулу (3), получим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2\cos(x+2y-3z)-1}{2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2\cos(x+2y-3z)\cdot 2-2}{2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3}$.

Составим сумму частных производных, упростим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-2\cos(x+2y-3z)}{-6\cos(x+2y-3z)+3}+\frac{2-4\cos(x+2y-3z)}{-6\cos(x+2y-3z)+3} = \frac{3-6\cos(x+2y-3z)}{-6\cos(x+2y-3z)+3} = 1,$$

что и требовалось получить.

Задания для самостоятельной работы

8.6. Найти $\dfrac{dz}{dt}$ в заданиях а–д, а в заданиях е–з найти $\dfrac{dz}{du}$ и $\dfrac{dz}{dv}$.

а) $z = \dfrac{y}{x},\ x = e^t, y = 1 - e^{2t}$;

б) $z = x^2 y^3,\ x = t, y = t^2$;

в) $z = x^2 + xy^2,\ x = e^{2t}, y = \sin t$;

г) $z = e^{2x^2+y^2},\ x = 3\cos t, y = 3\sin t$;

д) $z = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{y},\ x = \mathrm{tg}^2 t, y = \mathrm{ctg}^2 t$;

е) $z = \dfrac{x^2}{y},\ x = u - 2v, y = v + 2u$;

ж) $z = x^2 y^2,\ x = u + v, y = \dfrac{u}{v}$;

з) $z = x^2 + y^2,\ x = u + v, y = u - v$.

Ответы

8.6. а) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1+e^{2t}}{e^t}$; б) $\dfrac{dz}{dt} = 8t^8$; в) $\dfrac{dz}{dt} = e^{2t}\ (4e^{2t} + 2\sin^2 t + \sin 2t)$; г) $\dfrac{dz}{dt} = -9\,e^{9(\cos^2 t+1)}\cdot\sin 2t$; д) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{4}{\sin^2 t}$; е) $\dfrac{dz}{du} = \dfrac{2(U-2V)}{V+2U}\left(1-\dfrac{U-2V}{V+2U}\right)$, $\dfrac{dz}{dv} = \dfrac{2(U-2V)}{V+2U}\left(4+\dfrac{U-2V}{V+2U}\right)$; ж) $\dfrac{dz}{du} = \dfrac{2U(U\pm V)(2U+V)}{V^2}$, $\dfrac{dz}{dv} = -\dfrac{2(U+V)U^3}{V^2}$; з) $\dfrac{dz}{du} = 4U$, $\dfrac{dz}{dv} = 4V$.

8.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная в данном направлении. Градиент функции

Краткие теоретические сведения

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, то *уравнение касательной плоскости* в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ к данной поверхности:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (1)$$

Каноническое уравнение нормали, проведённой через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ поверхности:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (2)$$

В случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявном виде $F(x,y,z)=0$, то *уравнение касательной плоскости* в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \qquad (3)$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \qquad (4)$$

Производная в данном направлении. Градиент функции

Производной функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x;y)$ в направлении вектора $\vec{l}=\overrightarrow{MN}$ называется предел $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\lim\limits_{|MN|\to 0}\dfrac{f(N)-f(M)}{|MN|}$.

Если функция $f(x,y)$ дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \qquad (5)$$

где α – угол, образованный вектором $\vec{l}$ с осью Ox, β – с осью Oy, а $\cos\alpha,\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$: $\cos\alpha=\dfrac{x_l}{|l|},\cos\beta=\dfrac{y_l}{|l|}$.

Градиентом функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x;y)$ называется вектор с началом в точке M, имеющим своими координатами частные производные функции z:

$$grad\,z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}. \qquad (6)$$

Направление вектора $grad\,z$ в каждой точке M совпадает с направлением нормали к линии уровня, проходящей через эту точку.

Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке. Производная $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное $\left(\dfrac{\partial z}{\partial l}\right)_{наиб}=|grad\,z|=\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1;1;2)$.

Решение. Так как поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, то для записи уравнения касательной пользуемся формулой (12.1): $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$; $f'_x(1;1) = 2$, $f'_y(1;1) = 2$, тогда получаем

$2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0$ или $2x + 2y - z + 2 = 0$.

Уравнение нормали по формуле (12.2) пишем в виде

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Пример 2. Найти уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке $M_0(1;2;-1)$.

Решение. Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(1;2;-1)$ $F'_x(x_0,y_0,z_0) = 3x^2 + yz = 1,$ $F'_y(x_0,y_0,z_0) = 3y^2 + xz = 11,$ $F'_z(x_0,y_0,z_0) = 3z^2 + xy = 5$. Подставляем полученные результаты и координаты точки M_0 в формулы (3) и (4), получаем: $1(x-1) + 11(y-2) + 5(z+1) = 0 \Rightarrow x + 11y + 5z - 18 = 0$ – уравнение касательной плоскости. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$ – уравнение нормали.

Пример 3. Найти производную функции $z = \ln(e^x + e^{2y})$ в точке $M\left(1;\frac{1}{2}\right)$ в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$ при условии, что $N\left(3;-\frac{3}{2}\right)$.

Решение. Найдем частные производные функции и их значения в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^{2y}};\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = \frac{1}{2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2e^{2y}}{e^x + e^{2y}};\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 1.$$

Для вектора $\overrightarrow{MN} = (2,-2)$ найдем направляющие косинусы, для этого вычислим длину вектора $\overrightarrow{MN}$: $\left|\overrightarrow{MN}\right| = 2\sqrt{2}$, тогда $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

По формуле (5) получим производную по направлению вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ в точке M: $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 4. Найти производную функции $z = x^2 y$ в точке $M(1;1)$ по направлению вектора, где $N(2;3)$. Построить линию уровня $f(x,y)$ и $grad\, z$ в точке M.

Решение. Найдем частные производные данной функции и их значения в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 1.$$

Для вектора $\overrightarrow{MN} = (1;2)$: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

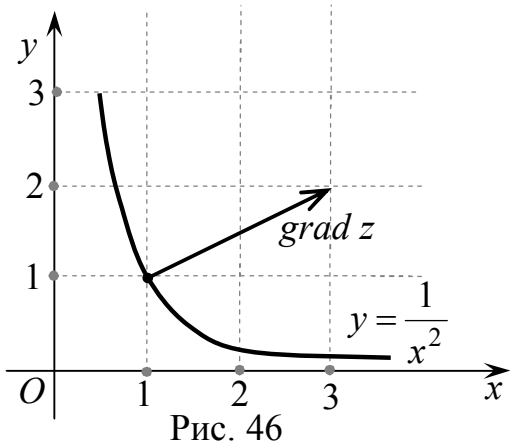


Рис. 46

Подставляя в формулу (5), получим производную по направлению вектора $\overrightarrow{MN} = \vec{l}$ в точке M: $\frac{\partial z}{\partial l} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 1\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Запишем по формуле (6) $(grad\, z)_M = 2\vec{i} + \vec{j}$. Построим линию уровня, проходящую через точку M: $x^2 y = 1$, или $y = \frac{1}{x^2}$ и $grad\, z$ точке M (рис. 46).

Задания для самостоятельной работы

8.7. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в точке M_0:

а) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $M_0(1;2;2)$;

б) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, $M_0(2;3;2)$;

в) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M_0(1;0;0)$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 = 26$, $M_0(3;4;1)$;

д) $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$, $M_0(1;1;2)$

е) $z = x^2 + 2xy + y^2 - x + 2y$, $M_0(1;1;1)$;

ж) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $M_0(3;4;-7)$;

з) $z = \sin\frac{x}{y}$, $M_0(\pi;1;0)$.

8.8. Для функции $z = f(x,y)$ найти градиент в точке A и производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$:

а) $z = x^2 + xy + y^2$, $A(1;1)$, $\bar{a} = \{2;-1\}$;

б) $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $A(2;1)$, $\bar{a} = \{3;-4\}$;

в) $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$, $A(1;1)$, $\bar{a} = \{2;-1\}$;

г) $z = \ln(x^2 xy^2)$, $A(1;2)$, $\bar{a} = \{3;-4\}$;

д) $z=\operatorname{arctg}(xy),\ A(2;3),\ \bar{a}=\{4;3\}$; е) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y^2},\ A(3;1),\ \bar{a}=\{1;-1\}$;

ж) $z=\frac{3x}{y^2},\ A(3;4),\ \bar{a}=\{-3;-4\}$ з) $z=\frac{x}{y^2},\ A(3;4),\ \bar{a}=\{-3;-4\}$.

Ответы

8.7. а) $\frac{1}{2}x+y+z-4\frac{1}{2}=0$, $2-2x=2-y=2-z$; б) $x+\frac{2}{3}y-z-2=0$, $\frac{x-2}{1}=\frac{3(y-3)}{2}=\frac{z-2}{-1}$; в) $2x-z-2=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{z}{-1}$; г) $3x+4y+z-26=0$, $\frac{x-3}{6}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-1}{2}$; д) $2x-y+6z-15=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{6}$; е) $3x+6y-z-8=0$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-2}{-1}$; ж) $17x+11y+5z-60=0$, $\frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z-7}{5}$; з) $x-y\pi+z=0$, $\frac{x-\pi}{-1}=\frac{y-1}{\pi}=\frac{z}{-1}$. **8.8.** а) $\left(\overrightarrow{gradz}\right)_A=3\vec{i}+3\vec{j}$, $\frac{dz}{d\vec{a}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$; б) $\left(\overrightarrow{gradz}\right)_A=11\vec{i}+8\vec{j}$, $\frac{dz}{d\vec{a}}=\frac{1}{5}$; в) $\left(\overrightarrow{gradz}\right)_A=\frac{10}{9}\vec{i}+\frac{8}{9}\vec{j}$, $\frac{dz}{d\vec{a}}=\frac{4}{3\sqrt{5}}$; д) $\left(\overrightarrow{gradz}\right)_A=\frac{3}{37}\vec{i}+\frac{2}{37}\vec{j}$, $\frac{dz}{d\vec{a}}=\frac{18}{185}$; е) $\left(\overrightarrow{gradz}\right)_A=\frac{1}{10}\vec{i}+\frac{6}{10}\vec{j}$, $\frac{dz}{d\vec{a}}=\frac{7}{10\sqrt{2}}$; ж) $\left(\overrightarrow{gradz}\right)_A=\frac{3}{16}\vec{i}+\frac{9}{32}\vec{j}$, $\frac{dz}{d\vec{a}}=\frac{90}{80}$.

8.5. Экстремум функции двух переменных. Условный экстремум. Наибольшее, наименьшее значения функции

Краткие теоретические сведения

Экстремум функции двух переменных. Условный экстремум

Максимумом (минимумом) функции $z=f(x,y)$ называется такое ее значение $f(x_0,y_0)$, которое больше (меньше) всех других значений, принимаемых ею в точках, достаточно близких к точке $M_0(x_0;y_0)$.

Максимум или минимум функции называется ее *экстремум.* Точка, в которой достигается экстремум, называется *точкой экстремума.*

Теорема 1. *(необходимое условие экстремума).* Если точка $M_0(x_0;y_0)$ является точкой экстремума функции $z=f(x,y)$, то $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$ или хотя бы одна из этих производных не существует.

Точки, для которых эти условия выполнены, называются стационарными. Точки экстремума всегда являются стационарными, но стационарная точка может и не быть точкой экстремума. Чтобы стационарная точка была точкой экстремума должны выполняться достаточные условия экс-

тремума. Введём обозначения: $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Теорема 2. *(достаточное условие экстремума).*

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные третьего порядка включительно в некоторой области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то $M_0(x_0; y_0)$ – точка экстремума: при $A < 0$ (или $C < 0$) – точка максимума, при $A > 0$ (или $C > 0$) – точка минимума;

2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;

3) если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии или отсутствии экстремума функции остается открытым (требуется дальнейшее исследование функции).

Экстремум функции $f(x, y)$, найденный при условии $\varphi(x, y) = 0$ называется *условным.* Уравнение $\varphi(x, y) = 0$ называется уравнением связи.

Если из уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ найти $y = g(x)$ и подставить в функцию $z = f(x, y)$ то задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремума функции одной переменной $z = f(x, y(x))$.

Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на обычный экстремум так называемой *функции Лагранжа* $u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где λ – неопределенный постоянный множитель.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \\ \phi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы трех уравнений можно найти неизвестные x, y и λ.

Наибольшее и наименьшее значения функции

Дифференцируемая функция в ограниченной замкнутой области D достигает своего наибольшего (наименьшего) значения либо в стационарной точке лежащей внутри области D, либо на границе этой области. Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области D необходимо найти все стационарные, критические точки, лежащие внутри данной области и на её границе, вычислить значения функции в этих точках, а также во всех остальных точках границы, а затем путём сравнения полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее из них.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 + 9xy$.

Решение. Находим частные производные первого и второго порядка:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 9y; \quad f'_y(x,y) = 3y^2 + 9x;$$
$$f''_{xx}(x,y) = 6x; \quad f''_{xy}(x,y) = 9; \quad f''_{yy}(x,y) = 6y.$$

Приравнивая к нулю первые производные, получим систему уравнений для определения стационарных точек:

$$\begin{cases} 3x^2 + 9y = 0, \\ 3y^2 + 9x = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим две стационарные точки $M_1(0;0)$, $M_2(-3;-3)$.

Вычисляем значения частных производных второго порядка в этих точках:

$$A_1 = f''_{xx}(0,0) = 0, \ B_1 = f''_{xy}(0,0) = 9, \ C_1 = f''_{yy}(0,0) = 0,$$
$$A_2 = f''_{xx}(-3,-3) = -18, \ B_2 = f''_{xy}(-3,-3) = 9, \ C_2 = f''_{yy}(-3,-3) = -18.$$

Затем находим определители:

$$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 0 \cdot 0 - 9^2 = -81;$$
$$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = (-18) \cdot (-18) - 9^2 = 243.$$

В силу достаточных условий заключаем, что в точке M_1 нет экстремума, так как $\Delta_1 < 0$, а в точке M_2 функция имеет максимум, так как $\Delta_2 > 0$ и $A_2 < 0$, причем $\max f(x,y) = f(-3,-3) = 27$.

Пример 2. Найти экстремум функции $f(x,y) = x^3 - xy + 2y$ при условии $x + y - 3 = 0$.

Решение. Из условия выразим y и подставим в формулу, задающую функцию: $y = 3 - x$, а потому

$$F(x) = f(x,3-x) = x^3 - x(3-x) + 2(3-x) = x^3 + x^2 - 5x + 6.$$

Мы получили функцию одного переменного. Функция $F(x)$ определена при всех x. Приравнивая к нулю производную, получаем:

$F'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -\frac{5}{3}$. Для найденных значений x найдем соответствующие им значения y: при $x = 1$ $y = 2$; при $x = -\frac{5}{3}$ $y = \frac{14}{3}$. $F''(x) = 6x + 2$ при $x = 1, F''(x) = 8 > 0$ точка $M(1;2)$ будет точкой минимума исходной функции $f(x,y)$, а точка $N\left(-\frac{5}{3};\frac{14}{3}\right)$ – точкой максимума, т.к. при $x = -\frac{5}{3}$, $F''(x) = -8 < 0$.

Соответственно, $f_{\min} = f(1;2) = 1 - 2 + 4 = 3$,

$$f_{\max} = f\left(-\frac{5}{3};\frac{14}{3}\right) = -\frac{125}{27} - \frac{-5\cdot 4}{3\cdot 3} + 2\cdot\frac{14}{3} = \frac{337}{27}.$$

Пример 3. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию Лагранжа $u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$. Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda$. Из системы уравнений (необходимые условия экстремума)

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

находим $\lambda = -\frac{5}{12}$, $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{6}$. Нетрудно видеть, что в точке $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$ функция $z = xy$ достигает наибольшего значения $z_{\max} = \frac{25}{24}$.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области, ограниченной линиями $x = 0, y = 0, x + y = -3$.

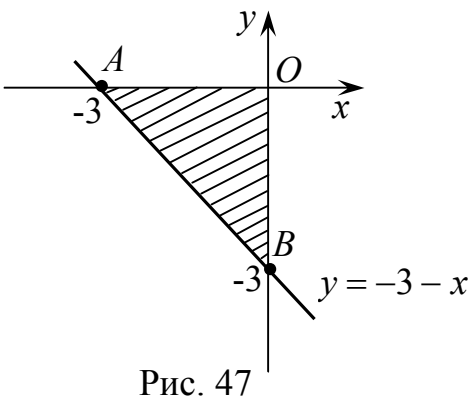


Рис. 47

Решение. Находим стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1.$$

$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$ $y = -1, x = -1; M_1(-1;-1)$ – стационарная точка, $z_1 = -1$.

Исследуем данную функцию на границе области, которая представляет собой треугольник AOB (рис. 47).

На прямой OB: $x = 0 \Rightarrow z = y^2 + y$ и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на $y \in [-3;0]$, $z' = 2y + 1$, $z' = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$, $z'' = 2 > 0$, следовательно $M_2\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ – точка min, в которой $z_2 = -\frac{1}{4}$.

На концах отрезка OB: $z_B(0;-3) = z_3 = 6$, $z_A(0;0) = z_4 = 0$.

Аналогично, на прямой AO: $y=0 \Rightarrow z=x^2+x, z'=2x+1,$ $z'=0, x=-\frac{1}{2}, z''=2>0 \Rightarrow M_3\left(-\frac{1}{2};0\right)$ – точка min, в которой $z_5=-\frac{1}{4}$. В точке A: $z_A(-3;0)=z_6=6$.

На прямой $[AB]$, которая задается равенством $x+y=-3$, имеем, исключив y из z в соответствии с уравнением $y=-x-3, z=3x^2+9x+6, z'=6x+9=0, x=-\frac{3}{2} \Rightarrow M_4\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$, в которой $z\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)=z_7=-\frac{3}{4}$. На концах $[AB]$ значения функции уже найдены.

Сравнивая все полученные значения функции z, заключаем, что $z=6$ – наибольшее значение функции и достигается в точках $A(-3;0), B(0;-3)$; $z=-1$ – наименьшее, в стационарной точке $M_1(-1;-1)$.

Задания для самостоятельной работы

8.9. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $z=x^2+y^2+xy-3x-6y$;

б) $z=xy^2(1-x-y)$;

в) $z=e^{\frac{x}{y}}\left(x+y^2\right)$;

г) $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$;

д) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$;

е) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$;

ж) $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$;

з) $z=1+6x-x^2-xy-y^2$.

8.10. Исследовать на условный экстремум следующие функции:

а) $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, при $x+y=2$;

б) $z=x-y$, при $x^2+y^2=1$;

в) $z=xy^2$, при $x+2y=4$;

г) $z=xy$, при $2x+3y-5=0$;

д) $z=x^2+y^2$, при $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$;

е) $z=3x^2-2y^2$, при $y=x-1$;

ж) $z=\frac{x-y-4}{\sqrt{2}}$, при $x^2+y^2=1$;

з) $z=\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}$, при $2x+5y=100$.

8.11. Найти наибольшие и наименьшие значения функций, заданных в замкнутой области D:

а) $z=xy+x+y$, $D: x=1, x=2, y=3, y=2$;

б) $z=x^2+2xy-4x+8y$, $D: 0\le x\le 2, -1\le y\le 1$;

в) $z=x^2+3y^2+x-y$, $D: x=1, y=1, x+y=1$;

г) $z=x-2y+5$, $D: x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1$;

д) $z=x^2+y^2-6x+4y+2$, $D: 0\le x\le 4, -3\le y\le 2$;

е) $z=2x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2-4y$, $D: x\ge 0, y\le 2, y\ge 2x$;

ж) $z=\frac{1}{2}x^2-xy$, $D: y\ge 2x^2, y\le 8$;

з) $z=5x^2-3xy+y^2$, $D: -1\le x\le 1, -1\le y\le 1$.

Ответы

8.9. а) максимум (0;3); б) максимум $(\frac{1}{4};\frac{1}{2})$; в) экстремумов нет; г) экстремумов нет; д) минимум (0;0); е) минимум (0;0); ж) экстремумов нет; з) максимум (4; –2). **8.10**.а) максимум (1;1); б) максимум $(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$; минимум $(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}})$; в) минимум (4;0) ; максимум $(1\frac{1}{3};1\frac{1}{3})$; г) максимум $(1\frac{1}{4};\frac{5}{6})$; д) минимум $(1\frac{11}{25};1\frac{23}{25})$ е) минимум (–2; –3) ж) максимум $(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}})$, минимум $(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}})$; з) максимум (30;8). **8.11.** а) наибольшее z = 11, наименьшее z = 5; б) наибольшее z = 8, наименьшее z = –17; в) наибольшее z = 4, наименьшее z = 1; г) наибольшее z = 6, наименьшее z = 3; д) наибольшее z = 14, наименьшее z = –11; е) наибольшее z = 0, наименьшее z = –10; ж) наибольшее z = 18, наименьшее z = –14; з) наибольшее z = 9, наименьшее z = 0.

8.6. Подбор эмпирической формулы по методу наименьших квадратов

Краткие теоретические сведения

Пусть существует некоторая зависимость между переменными величинами x и y, представленная таблично:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Требуется найти по данным наблюдений аналитическое выражение y от x или x от y. То есть эмпирическую формулу $\hat{y}=f(x)$ или $\hat{x}=f(y)$. При нахождении этой формулы не требуется, чтобы значения $\hat{y}_i$ совпадали с y_i. Это осуществляется в два этапа.

1. Выяснение общего вида формулы.
2. Определение параметров формулы.

Для определения общего вида формулы в декартовой системе координат отмечаются точки $M_i(x_i;y_i)$. И определяют, вдоль какой линии они располагаются. Зависимость может быть линейной (вдоль прямой), квадратичной (вдоль параболы), гиперболической, логарифмической, показательной.

Для определения параметров формулы удобно пользоваться методом наименьших квадратов.

Сущность этого метода заключается в том, что сумма квадратов отклонений эмпирических значений от теоретических была минимальной:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2 \to \min .$$

1. Пусть зависимость между переменными предполагается линейной: $\hat{y} = ax + b$. Тогда $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$. Найдём минимум этой функции. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} .$$

Упрощая систему, получим:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) называется нормальной системой метода наименьших квадратов при выравнивании по прямой. Решая систему (1) найдём параметры a и b.

2. Пусть зависимость между переменными предполагается квадратической: $\hat{y} = ax^2 + bx + c$. Тогда $S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2$.

Найдём минимум функции. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)x_i^2 = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)x_i = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^2, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) называется нормальной системой метода наименьших квадратов при выравнивании по параболе. Решая систему (2) найдём параметры a, b и c.

Рассмотрим на примере. Дана зависимость переменных.

x	–1	0	1	2	3	4
y	0	2	3	3,5	3	4,5

Требуется подобрать зависимость y от x.

Зависимость между x и y будет линейной. Найдем значения параметров a и b из системы (1). Для удобства расчетов строим таблицу:

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-1	0	1	0
2	0	2	0	0
3	1	3	1	3
4	2	3,5	4	7
5	3	3	9	9
6	4	4,5	16	18
Σ	9	16	31	37

Первый столбец обозначает номер по порядку записи точек (координат) из суммы столбцов при x_i, y_i, x_i^2, $x_i y_i$ составляются коэффициенты системы (1) для определения параметров a и b прямой $y = ax + b$. Система имеет вид:

$$\begin{cases} 31a + 9b = 37, \\ 9a + 6b = 16. \end{cases}$$

Решая систему, получим, $a = 0{,}74$ и $b = 1{,}55$, а уравнение прямой имеет вид: $y = 0{,}74x + 1{,}55$.

8.7. Приложение дифференциального исчисления функций нескольких переменных в экономике

Краткие теоретические сведения

Описание предпочтений потребителя важно для анализа потребительского выбора, полезность – это способ описания предпочтений. **Функция полезности** $U = U(x,y)$ задает численное значение полезности потребителя U от приобретения x единиц первого блага и y единиц второго блага. При этом более предпочитаемым наборам (x,y) соответствуют большие значения полезности.

Производственной функцией $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется зависимость результата производственной деятельности – выпуска продукции y от обусловивших его факторов – затрат ресурсов $x_1, x_2, ..., x_n$. Производственная функция может быть задана как в натуральных, так и в денежных единицах. В последнем случае она представляет доход от использования ресурсов.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Пусть некоторый индивид является потребителем только двух благ – A и B. Потребитель с бюджетом 360 ден. ед. при заданных ценах полностью израсходует бюджет, если купит либо 8 ед. блага A и 10 ед. блага B, либо 10 ед. блага A и 5 ед. блага B. Какое количество благ A и B следует купить данному потребителю для максимизации своей функции полезности $U = Q_A^{0,25} Q_B^{0,5}$?

Решение. Найдем цены благ, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 8p_A + 10p_B = 360, \\ 10p_A + 5p_B = 360; \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_A = 30, \\ p_B = 12. \end{cases}$$

Бюджетное уравнение для данного потребителя имеет вид:

$$30Q_A + 12Q_B = 360.$$

Необходимо найти максимум функции $U(Q_A, Q_B) = Q_A^{0,25} Q_B^{0,5}$ при условии бюджетного ограничения $30Q_A + 12Q_B = 360$. Применим метод Лагранжа.

$$L(Q_A, \lambda) = Q_A^{0,25} Q_B^{0,5} + \lambda(30Q_A + 12Q_B - 360),$$

$$\begin{cases} L'_{Q_A} = 0,25Q_A^{-0,75} Q_B^{0,5} - 30\lambda = 0, \\ L'_{Q_B} = 0,5Q_A^{0,25} Q_B^{-0,5} - 12\lambda = 0, \\ 30Q_A + 12Q_B = 360; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_A = 4, \\ Q_B = 20. \end{cases}$$

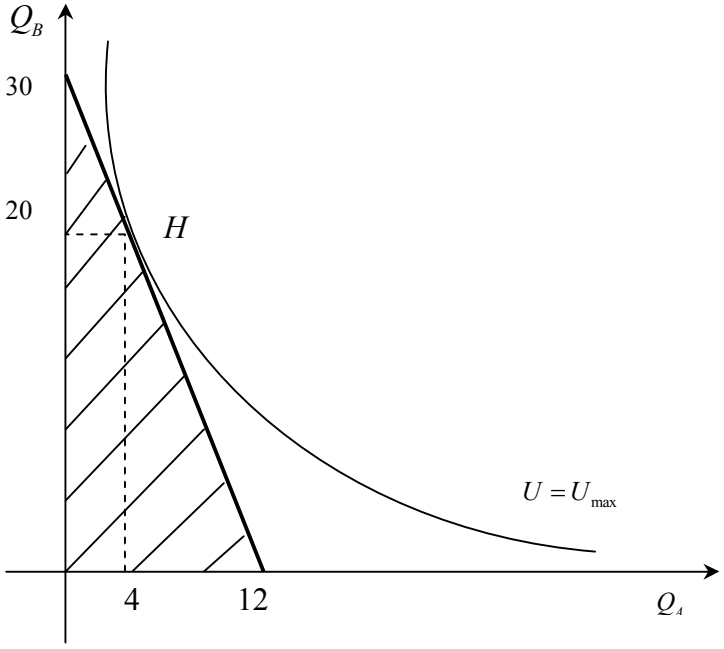


Рис. 48

Точка оптимального выбора потребителя $H(Q_A, Q_B)$, позволяющая ему получить максимальную полезность $U = U_{\max} = U(4,20) = 6{,}32$ в условиях бюджетного ограничения, изображена на рисунке 48.

Ответ: потребителю следует купить 4 ед. блага *A* и 20 ед. блага *B*.

Пример 2. Монополист продаёт свою продукцию в двух странах и может менять объёмы продаж по своему усмотрению. Пусть *x* – объём продаж в первой стране, y – объём продаж во второй стране. Как показали маркетинговые исследования, для полной реализации своей продукции монополист должен установить следующие цены: $p_1 = 97 - \frac{x}{10}$ – в первой стране, $p_2 = 83 - \frac{y}{20}$ – во второй стране. Издержки производства монополиста составляют 20000 + 3(*x* + *y*). Найдите объём выпуска монополиста, который позволит ему получить наибольшую прибыль.

Решение. Функция прибыли монополиста будет иметь вид

$$P(x,y) = R(x,y) - C(x,y) = (p_1 x + p_2 y) - C(x) =$$

$$= \left(97 - \frac{x}{10}\right)x + \left(83 - \frac{y}{20}\right)y - \left[20000 + 3\left(x + y\right)\right] =$$

$$= 94x - \frac{x^2}{10} + 80y - \frac{y^2}{20} - 20000.$$

Найдем максимум функции *P*(*x*).

$$\begin{cases} P'_x = 94 - \frac{x}{5} = 0, \\ P'_y = 80 - \frac{y}{10} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 470, \\ y = 800. \end{cases}$$

$$P''_{x^2}(470,800) = -1/5, P''_{y^2}(470,800) = -1/10, P''_{xy}(470,800) = 0.$$

Так как $\Delta(470,800) = P''_{x^2}P''_{y^2} - \left(P''_{xy}\right)^2 > 0$ и $P''_{x^2}(470,800) < 0$, то в точке (470,800) функция прибыли достигает максимального значения. Таким образом, объём выпуска монополиста, который позволит ему получить наибольшую прибыль, равен $x + y = 470 + 800 = 1270$ единиц продукта.

Задания для самостоятельной работы

8.12. Известна функция полезности потребителя: $U = Q_A^{0,5}Q_B^{0,25}$ и его бюджет $M = 120$ ден. ед. Потребитель обнаружил, что при сложившихся ценах он может купить либо набор $Q_A = 28$; $Q_B = 4$, либо набор $Q_A = 26$; $Q_B = 8$ и еще различные сочетания обоих благ. Сколько единиц каждого из благ следует купить этому потребителю для максимизации полезности ?

8.13. Максим является потребителем орехов и ягод. Его функция полезности имеет вид $U(x,y) = 4\sqrt{x} + y$, где x(кг) – количество потребляемых орехов, y (кг)– количество потребляемых ягод. Цены на орехи и ягоды равны соответственно p_x=200 рублей, p_y=100 рублей, а доход Максима равен 2400 рублей за неделю. Определите оптимальный для Максима выбор продуктов на наделю методом подстановки и методом Лагранжа.

8.14. При бюджете 3300 рублей предпочтения индивида относительно услуг телефонной связи (T) и всех прочих благ, представленных оставшимися после оплаты телефонных услуг деньгами (M), отображается функцией $U = T^{0,1}M^{0,9}$. Телефонный узел предлагает два варианта оплаты его услуг: 1) тариф $p_{T,0} = 4$ за час связи; 2) тариф $p_{T,1} = 2$ за час связи плюс ежемесячная абонентская плата A рублей. Цена денег $p_M = 1$. При какой величине абонентской платы оба варианта оплаты телефонной связи будут для индивида равнозначны?

8.15. Известны функция полезности индивида $U = (Q_A - 4)^{0,5}Q_B^{0,25}$, его бюджет $M = 120$ и цены благ $p_A = 3$; $p_B = 1$. Сколько денег нужно доплатить индивиду в случае повышения цены блага B до $P_B = 8$, чтобы его благосостояние (общая полезность) не изменилось?

8.16. Предпочтения индивида относительно двух благ и свободного времени отображается функцией $U = (Q_A - 2)^{0,5}(Q_B - 3)^{0,25}F^{0,2}$, где F – свободное время, равное разности между календарным временем суток 24 часа и рабочим временем: $F = 24 - L$. Определите объемы спроса индивида на каждое благо и его объем предложения труда при цене труда $w = 10$ и ценах благ $P_A = 8$; $P_B = 5$.

8.17. Функция полезности Робинзона $U=(Q-5)^{0,6}(20-L)^{0,3}$, где Q – количество потребляемого продукта, L – количество часов затрачиваемого на производство продукта труда. Технология производства продукта отображается функцией $Q=10L^{0,75}$. Сколько времени Робинзон будет трудиться для удовлетворения своей потребности в продукте?

8.18. Пусть производственная функция фирмы имеет вид $f(x,y)=60x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$, где x – количество затраченного труда, y – количество затраченного капитала для производства $f(x,y)$ единиц некоторого продукта. Цены на труд и капитал соответственно равны 100 и 200 рублей. Фирма намерена вложить в производство 30000 рублей. Сколько единиц труда и капитала потребуется фирме для производства максимального объёма продукта?

8.19. Производственная функция равна $f(x,y)=30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго – 10. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 ден. ед. В этих условиях найдите оптимальные для производителя значения объёмов (x,y) используемых ресурсов.

8.20. Фирма «Сдоба» выпекает пирожки и плюшки, которые реализует по ценам равным соответственно 10 и 9 рублей за штуку. Издержки производства x пирожков и y плюшек равны $C(x)=400+2x+3y+0,01(3x^2+xy+3y^2)$. Определите объёмы выпуска пирожков и плюшек, которые позволят фирме в условиях отсутствия конкурентов получить наибольшую прибыль.

8.21. Фирма «Эликсир» производит и реализует морс и лимонад по ценам соответственно равным 30 и 20 рублей за литр. Доход от реализации x литров морса и y литров лимонада равен $R(x,y)=98x+112y-0,04xy-0,1x^2-0,2y^2$. Определите объёмы выпуска морса и лимонада, которые позволят фирме в условиях отсутствия конкурентов получить наибольшую прибыль.

8.22. Фермер выращивает в теплице огурцы, используя два вида ресурсов – воду x ($м^3$) и электроэнергию y (кВт·ч). Цены ресурсов равны соответственно 10 и 4 рубля. Производственная функция фермера имеет вид $f(x)=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$. Сколько ресурсов достаточно использовать фермеру в режиме экономии, чтобы вырастить 1000 огурцов?

8.23. В результате внедрения новой технологии по содержанию теплиц производственная функция фермера из задачи №11 приобрела вид $f(x)=x+\ln y$. Сколько теперь ресурсов понадобится фермеру, чтобы вырастить 1000 огурцов, если он старается минимизировать издержки?

Ответы

8.12. Q_A = 20; Q_B = 20.**8.13**. x = 1 кг, y = 22 кг. **8.14**. A = 221 руб. **8.15.** Бюджет нужно увеличить на 108 ден. ед. **8.16**. Q_A = 15,75; Q_B = 14; L = 19,6. **8.17**. L = 12,38 ч. **8.18**. x = 225; y = 37,5. **8.19.** 72,24. **8.20**. x = 120, y = 80. **8.21.** x = 300 л, y = 200 л. **8.22.** x = 928, y = 1160. **8.23**. x = 999, y = 2.5.

8.8. Двойные интегралы

Краткие теоретические сведения

Понятие двойного интеграла

Пусть функция f определена в некоторой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}_2$. Разобьем область D произвольным образом на части α_i $(i = 1,...,n)$, каждая из которых имеет площадь σ_i $(i = 1,...,n)$. Выберем в каждой части произвольным образом точку $(\xi_i;\eta_i) \in d_i$, $i = 1,...,n$, и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\sigma_i \qquad (1)$$

Сумма (1) называется интегральной суммой для функции $z = f(x,y)$ в области D, соответствующей данному разбиению этой области на части и данному выбору точек в этих частях. Обозначим через λ наибольший из диаметров частей d_i (диаметром плоского множества называется точная верхняя граница множества расстояний между двумя произвольными точками множества D).

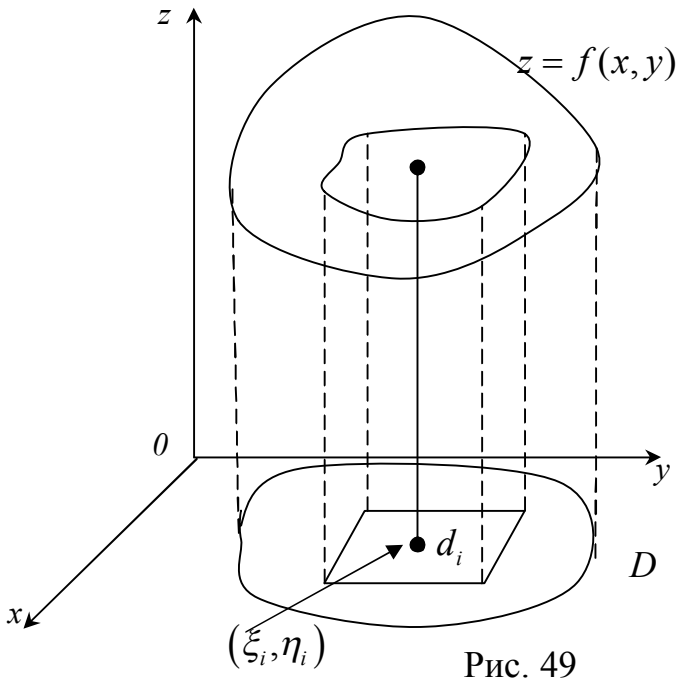


Рис. 49

Определение. Если существует конечный предел I суммы (1) при $\lambda \to 0\,(n \to +\infty)$, не зависящий ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек $(\xi_i;\eta_i)$ в частях разбиения, то этот предел называется двойным интегралом от функции $z = f(x,y)$ по области D и обозначается

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy\,.$$

Итак,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to+\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\sigma_i = I \qquad (2)$$

При этом функция $f(x;y)$ называется *интегрируемой* в области D, D *– областью интегрирования*, $f(x,y)dxdy$ *– подынтегральным выражением*.

Геометрический смысл двойного интеграла (2) есть объем прямого цилиндрического тела, построенного на области D, как на основании, и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y) \geq 0$ (рис. 49). Если $f(x,y) < 0$, то объем равен $V = -\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Теорема. Если функция $z = f(x,y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она интегрируема в области D.

Основные свойства двойных интегралов

1. Если функция $z = f(x,y)$ интегрируема в области D и эта область разбита на 2 части D_1 и D_2, то функция интегрируема в каждой из областей D_1 и D_2, причем $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$.

2. Если функция $z = f(x,y)$ интегрируема в области D и $C \in \mathbb{R}$, то $\iint\limits_D Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

3. Если функции $z = f(x,y)$ и $z = g(x,y)$ интегрируемы в области D, то $\iint\limits_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.

4. Если $f(x,y) = 1$ в области D, то двойной интеграл есть площадь области D: $\iint\limits_D 1dxdy = S_D$.

5. Если функции $z = f(x,y)$ и $z = g(x,y)$ интегрируемы в области D и всюду $f(x,y) \leq g(x,y)$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.

Вычисление двойных интегралов

Теорема. Если для функции $z = f(x,y)$, определенной в области D, существует двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и при– каждом фиксированном $x \in [a;b]$ (рис. 50) – простой интеграл $I = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dxdy$, то существует также *повторный интеграл* $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ и выполняется равенство:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (3)$$

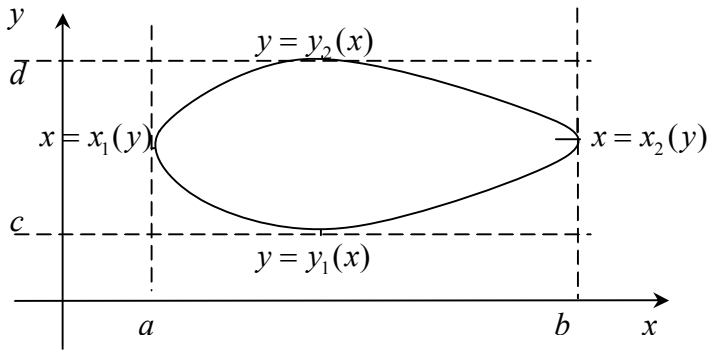


Рис. 50

Формула (3) симметрична относительно x и y, т.е. при аналогичных условиях можно утверждать, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (4)$$

Замена переменных в двойных интегралах

Теорема. Если функции $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D и функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ имеют непрерывные частные производные в области D' и осуществляют взаимно-однозначное отображение D' в D, то имеет место формула:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot |I(u,v)|dudv, \quad (5)$$

где $I(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & y'_u(u,v) \\ x'_v(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix}$ – *якобиан* функций $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ по переменным u, v.

В частном случае перехода к полярным координатам $\begin{cases} x = r\cos\varphi = x(r,\varphi), \\ y = r\sin\varphi = y(r,\varphi) \end{cases}$, якобиан будет равен $I(r,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$ и формула (5) примет вид

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot rdrd\varphi.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Записать двойной интеграл в виде повторного двумя способами, если область $D=\left\{(x,y)\middle| y\ge x, y\ge \frac{1}{2}, y\le \sqrt[3]{x}\right\}$.

Решение. Построим на плоскости xOy область D (рис. 51).

1) Возьмем сначала постоянные пределы по переменной y. Ими будут числа $\frac{1}{2}$ и 1. Для каждого значения $y\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ x принимает значения от y^3 до y. Получим

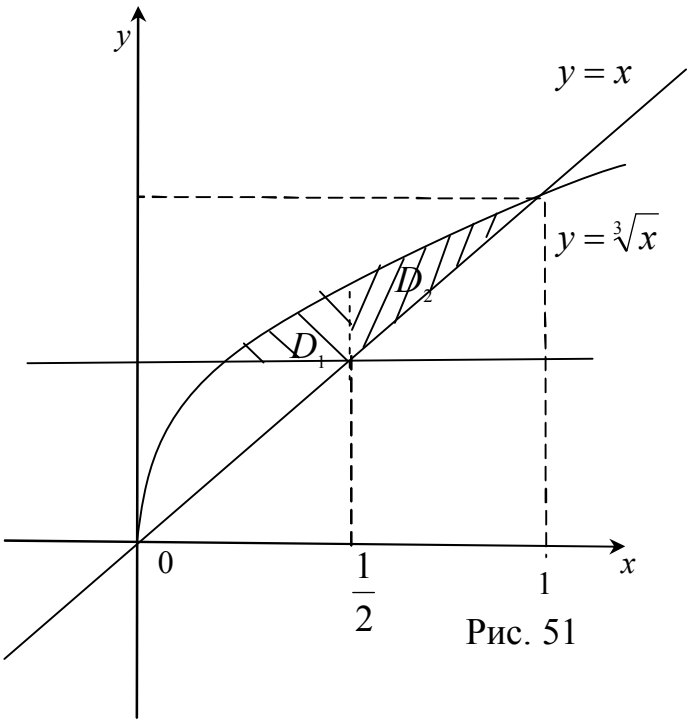


Рис. 51

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int\limits_{y^3}^{y}f(x,y)dx.$$

2) Если постоянные пределы брать по x, то область D необходимо разбить на 2 части D_1 и D_2. Для области D_1 постоянными пределами по x будут числа $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{2}$. Для каждого $x\in\left[\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right]$ y принимает значения от $\frac{1}{2}$ до $\sqrt[3]{x}$.

Получим $\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}}dx\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt[3]{x}}f(x,y)dy$.

Для области D_2 постоянными пределами по x будут числа $\frac{1}{2}$ и 1. Для каждого $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ y принимает значения от x до $\sqrt[3]{x}$. Получим

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int\limits_{x}^{\sqrt[3]{x}}f(x,y)dy.$$

Используя свойство 1, окончательно имеем:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=$$

$$= \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)dy.$$

Пример 2. В повторном интеграле $I = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x,y)dy$ изменить порядок интегрирования.

Решение. 1) Восстановим область интегрирования D по известным пределам данного повторного интеграла. Так как внутренний интеграл взят по y, то следовательно пределы внутреннего интеграла получены из уравнений:

$y = 1 - x$ –уравнение прямой,

$y = -\sqrt{1-x^2}$ – уравнение нижней дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$.

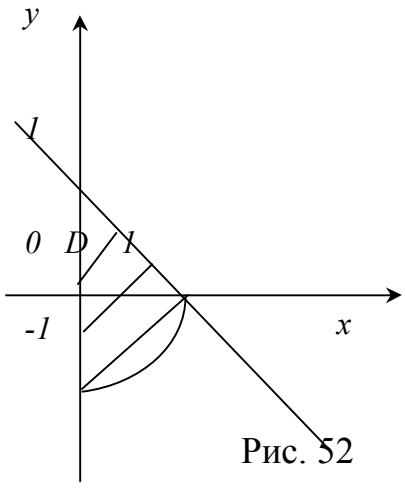


Рис. 52

Изобразим эти линии на чертеже (рис. 52). Так как дано, что абсцисса x точек области интегрирования D меняется в пределах от 0 до 1, то можем заключить, что искомой областью D является фигура, ограниченная линиями $x = 0,\ y = -\sqrt{1-x^2},\quad y = 1 - x$.

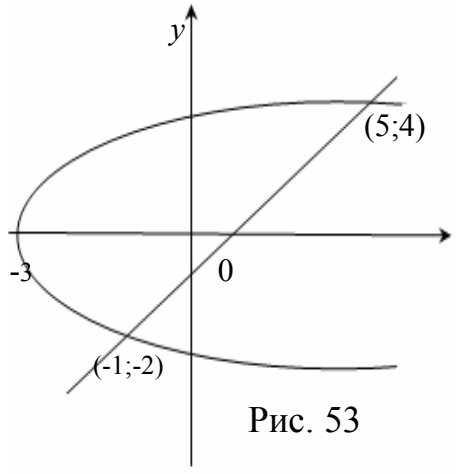


Рис. 53

2) Расставим теперь внешние пределы интегрирования по y, а внутренние по x, запишем:

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1-y} f(x,y)dx.$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл: а) $I = \iint_D xydxdy$, где D ограничена прямой $y = x - 1$ и параболой $y^2 = 2x + 6$; б) $I = \iint_D (x+y)dxdy$, где

$D = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \geq 16, x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0\right\}$.

Решение. а) Изобразим область D на чертеже (рис. 53). Для вычисления интеграла удобнее использовать формулу (4) (так как формула (3) приведет к сумме двух повторных интегралов). Уточним точки пересечения прямой и параболы: $\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y = 2x + 6. \end{cases}$ Получим точки $(-1;-2)$ и $(5;4)$.

Теперь, расставляя внешние пределы интегрирования по y, а внутренние по x, получаем:

$$I=\int_{-2}^{4}dy\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1}xydx=\int_{-2}^{4}\left(\frac{x^2}{2}\cdot y\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1}dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}y\left[\left(y+1\right)^2-\left(\frac{1}{2}y^2-3\right)^2\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4}+4y^3+2y^2-8y\right)dy=\frac{1}{2}\left(-\frac{y^6}{24}+y^4+\frac{2y^3}{3}-4y^2\right)\Bigg|_{-2}^{4}=36.$$

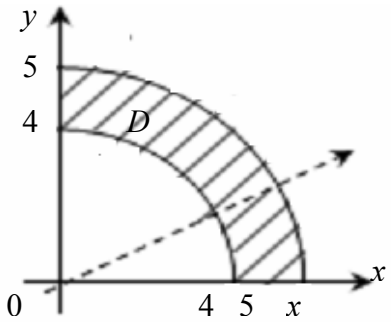


Рис. 54

б) Изобразим область D на чертеже (рис. 54). Перейдем к полярным координатам $\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$. Криволинейные участки границы области задаются уравнениями:

$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=16 \text{ или } r=4,$$

$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=25 \text{ или } r=5,$$

а прямолинейные участки уравнениями

$$r\sin\varphi=0 \text{ или } \varphi=0,$$

$$r\cos\varphi=0 \text{ или } \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Итак, угол φ меняется в постоянных пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а радиус $r-$ от 4 до 5. Имея в виду, что при данном преобразовании якобиан $I(r,\varphi)=r$, по формуле (5) получим:

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{4}^{5}r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{4}^{5}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=$$

$$=\left(\frac{5^3}{3}-\frac{4^3}{3}\right)\Bigg|_{4}^{5}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=\frac{61}{3}\left(\sin\varphi-\cos\varphi\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{61}{3}(1-(-1))=\frac{122}{3}=40\frac{2}{3}.$$

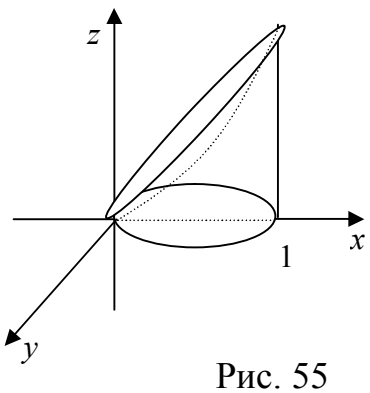


Рис. 55

Пример 4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2x$, $z=x^2+y^2$, $z=0$.

Решение: Данное тело изображено на рисунке 55. В его основании лежит круг D, ограниченный окружностью $x^2+y^2=2x$ или

$(x-1)^2+y^2=1$, т.е. $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+y^2\le 1\right\}$. Перейдем к полярным координатам $\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$. Тогда $D=\left\{(r,\varphi)\middle|-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\varphi\right\}$.

Объем равен:

$$V=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^2\cdot rdr=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\left(1+\cos 4\varphi\right)\right)^2d\varphi=$$

$$\left[\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{2}\ \text{(куб. ед.)}.$$

Задания для самостоятельной работы

8.24. Вычислить повторные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2(x^2+y)\,dy$;

б) $\int\limits_0^{\frac{3}{2}}dx\int\limits_0^1 fdy$;

в) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{x\sqrt{3}}\frac{x\,dy}{x^2+y^2}$;

г) $\int\limits_3^4 dy\int\limits_1^2 fdx$;

д) $\int\limits_1^3 dy\int\limits_2^5\frac{dx}{(x+2y)^2}$;

е) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{x\sqrt{3}} fdy$;

ж) $\int\limits_0^{\grave{a}} dy\int\limits_{y-a}^{2y}xydx$;

з) $\int\limits_0^{\grave{a}} dx\int\limits_{\frac{x}{a}}^{x}\frac{xdy}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

8.25. Изменить порядок интегрирования:

а) $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0}f\,dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0}f\,dx$;

б) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0}f\,dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0}f\,dx$;

в) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y f\,dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}}dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}}f\,dx$;

г) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\ dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f\ dx$;

д) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\ dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f\ dy$;

е) $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f\ dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_0^{\arccos y} f\ dx$;

ж) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_0^{\sqrt{2+y}} f\ dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_0^{\sqrt{-y}} f\ dx$;

з) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f\ dx$.

8.26. Вычислить:

а) $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy$,

D: $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$;

б) $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$,

D: $x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$;

в) $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dxdy$,

D: $x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$;

г) $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$

D: $x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$;

д) $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/8}dxdy$,

D: $x=0,\ y=2,\ y=\dfrac{x}{2}$;

е) $\iint\limits_D ye^{xy/4}dxdy$,

D: $y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=4,\ x=8$;

ж) $\iint\limits_D y\cos xy\ dxdy$,

D: $y=\pi/2,\ y=\pi,\ x=1,\ x=2$;

з) $\iint\limits_D y^2 \sin\dfrac{xy}{2}\ dxdy$,

D: $x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\dfrac{x}{2}$.

8.27. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

а) $y=16\sqrt{2x},\ y=\sqrt{2x},\ z=0,$
$x+z=2$;

б) $y=5\sqrt{x},\ y=5x/3,\ z=0,$
$z=5+5\sqrt{x}/3$;

в) $x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,$
$z=15x$;

г) $x+y=2,\ y=\sqrt{x},\ z=12y,\ z=0$;

д) $x=20\sqrt{2y},\ x=5\sqrt{2y},\ z=0,$
$z+y=1/2$;

е) $x=5\sqrt{y}/2,\ x=5y/6,\ z=0,$
$z=\dfrac{5}{6}\left(3+\sqrt{y}\right)$;

ж) $x^2+y^2=2,\ x=\sqrt{y},\ x=0,$ $z=0,\ z=30y;$

з) $x+y=2,\ x=\sqrt{y},\ z=12x/5,$ $z=0.$

Ответы

8.24. а) $2\frac{2}{3}$; б) $4\frac{3}{8}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\ln\frac{25}{24}$; д) $\frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$; е) 6; ж) $\frac{11}{24}a^4$; з) $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{a}$. **8.25.** а) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_0^{\frac{8}{3}} dy\int\limits_{2y-2}^{\sqrt{y^2+4}} f(x,y)dx$; в) $\int\limits_1^3 dy\int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x,y)dx$; г) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)dy$; д) $\int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{y} f(x,y)dx$; е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx\int\limits_{\sin x}^{\cos x} f(x,y)dy$; ж) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2-2}^{x^2} f(x,y)dy$; з) $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{x^2}^{e^{-x}} f(x,y)dy$. **8.26.** а) $\frac{137}{90}$; б) 2; в) 4; г) 1; д) 16 $(\frac{1}{e}-1)$; е) 6; ж) – 2; з) π. **8.27.** а) 1; б) $24\pi-18\sqrt{3}$; в) 36; г) 5; д) $21\frac{1}{3}-\ln 4$; е) 36; ж) $26-\ln 27$; з) $\sqrt{2}-1$.

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 16 по теме «Нахождение производных и дифференциалов. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Градиент и производная по направлению»

1. Найти область определения функций $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

2. Найти частные производные второго порядка:

а) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; б) $z=x^y$.

3. Найти полные дифференциалы второго порядка функции

$z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

4. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ в точке M(1,2,-1).

5. Проверить указанные равенства для заданной функции $z=f(x,y)$:

$z=\frac{y^2}{\sqrt{xy}},\ x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

6. Вычислить указанное выражение приближенно: $0{,}97^3+1{,}99^4$

Контрольная работа № 17 по теме «Приложение дифференциального исчисления функций нескольких переменных»

1. Найти экстремумы функции

$$z = x^3 + \frac{1}{3}y^2 - 2xy + 6x - 5y - 1.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x, y)$ в области G, ограниченной линиями:

$$z = x^2 - xy + y^2 - 4x\ ,$$
$$G: \quad x = 0,\ y = 0,\ 2x + 3y - 12 = 0.$$

Контрольная работа № 10 по теме «Вычисление двойных интегралов»

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$.

3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(8xy + 9x^2y^2\right) dxdy$, где $D: x = 1,$ $y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}$.

4. Вычислить двойной интеграл $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \left(x^2 + y^2\right) e^{x^2+y^2} dy$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2$.

ГЛАВА 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Краткие теоретические сведения

При изучении интегралов перед нами стояла задача: найти y, если

$$y' = f(x),$$

или $dy = f(x)dx$. Решение, как известно, имеет вид:

$$y = \int f(x)dx$$

и сводится, таким образом, к вычислению неопределенного интеграла.

Однако на практике значительно чаще встречается более сложная задача: найти функцию y, если известно, что она удовлетворяет данному уравнению вида:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

Определение. Уравнения, связывающие независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные до некоторого порядка n включительно, называются *дифференциальными уравнениями (ДУ).*

Если уравнение (1) удается разрешить относительно наивысшей производной, то получаем уравнение в нормальной форме:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right) \qquad (2)$$

В дифференциальном уравнении, таким образом, неизвестной является функция, входящая в уравнение под знаком производных (или дифференциалов) того или иного порядка. Порядок наивысшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого *дифференциального уравнения.*

Определение. Решением ДУ (1) или (2) называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество (при этом производные функции $y = \varphi(x)$ предполагаются существующими). Процесс нахождения решения ДУ называется *интегрированием дифференциального уравнения*, а график решения $y = \varphi(x)$ ДУ на плоскости *Oxy – интегральной кривой.*

Если искомая функция зависит от одной переменной, то ДУ называют *обыкновенным*; в противном же случае – ДУ *в частных производных.*

Если при решении ДУ получаем функцию в неявном виде $\Phi(x,\ y) = 0$, то она называется *интегралом* данного ДУ.

Вопрос о существовании и единственности решения ДУ (2) разрешает следующая теорема Коши.

Теорема Коши. Если правая часть уравнения (2) является непрерывной функцией в окрестности значений

$$x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)} \tag{3}$$

то уравнение (2) имеет решение $y = \varphi(x)$ в некотором интервале $(a;b)$, содержащем x_0, такое, что:

$$y_0 = \varphi(x_0),\ y_0' = \varphi'(x_0), ...,\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0). \tag{4}$$

Если же в указанной окрестности непрерывны еще и частные производные этой функции по аргументам $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то решение $y = \varphi(x)$ – единственное.

Числа из совокупности (3) называются *начальными данными*, а равенства (4) – *начальными условиями*.

Задача Коши для ДУ *n*-го порядка формулируется следующим образом: *найти решение* $y = \varphi(x)$ *ДУ* (1) *или* (2), *удовлетворяющее начальным данным* (1.3), *т.е. такое решение, чтобы выполнялись начальные условия* (4).

ДУ (1) или (2) имеет бесчисленное множество решений, для этого множества решений вводится понятие *общего решения*.

Определение. Общим решением ДУ (1) или (2) называется функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n)$ или $y = \varphi(x, C_i)$, где $C_i, (i = 1,2,...,n)$ – произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям:

1) данная функция является решением ДУ (1) или (2) при любых значениях C_i;

2) для любых начальных данных (3), при которых ДУ имеет решения, можно указать значения постоянных $C_i = C_{i_0}$ такие, что

$$y_0 = \varphi(x_0, C_{1_0}),\ y_0' = \varphi'(x_0, C_{1_0}, C_{2_0}), ..., y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_{1_0}, C_{2_0}, ..., C_{n-1}).$$

Решение или интеграл, полученные из общего решения или общего интеграла при фиксированных значениях произвольных постоянных C_i, называется соответственно частным решением или частным интегралом дифференциального уравнения.

Определение. Порядком ДУ называется наивысший порядок производной функции, входящей в состав ДУ. Уравнение (1) является уравнением n–го порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае можно записать в виде:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{5}$$

Это уравнение связывает независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную y'. Если уравнение (5) можно разрешить относительно y', то его записывают в виде:

$$y' = f(x, y) \tag{6}$$

и называют ДУ первого порядка, разрешенным относительно производной.

Иногда ДУ первого порядка можно записать в дифференциальной форме:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{7}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – известные функции. Уравнение (7) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т.е. любую из них можно рассматривать как функцию другой.

Задача Коши для ДУ первого порядка имеет следующую формулировку: *найти решение* $y = \varphi(x)$ *(интеграл* $\Phi(x,y) = 0$*) дифференциального уравнения* (5) *или* (6), *удовлетворяющее начальному условию:*

$$y_0 = \varphi(x_0) \ \left(\Phi(x_0, y_0) = 0\right). \tag{8}$$

С геометрической точки зрения это означает, что среди всех интегральных линий данного уравнении необходимо найти ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0;\ y_0)$.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении (6) функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку $M_0(x_0; y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (8), т.е. через точку $M_0(x_0; y_0)$ проходит единственная интегральная кривая данного уравнения.

Геометрический смысл ДУ первого порядка состоит в следующем. Уравнение (6) устанавливает связь (зависимость) между координатами точки $M(x;y)$, принадлежащей области D, и угловым коэффициентом $y' = \operatorname{tg}\alpha$ касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, ДУ $y' = f(x,y)$ дает совокупность направлений (*поле направлений*) на плоскости *Oxy* (рис. 56).

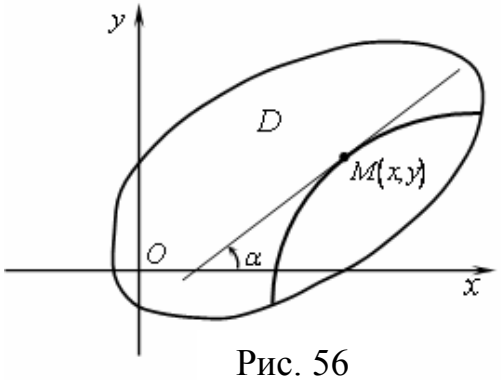


Рис. 56

Кривая, во всех точках которой направление одинаково, называется *изоклиной*. Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых. Уравнение изоклины можно получить, если положить $y' = C$, т.е. $f(x,y) = C$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Является ли функция $y = x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$, где C – произвольная постоянная, решением ДУ $x^2y' + (1-2x)y = x^2$?

Решение. Подставив в данное уравнение саму функцию и ее производную $y' = 2x - Ce^{\frac{1}{x}}(1-2x)$, после преобразования полученного выражения, получим тождество:

$x^2\left(2x - Ce^{\frac{1}{x}}(1-2x)\right) + (1-2x)x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right) = 2x^3 - Cx^2e^{\frac{1}{x}}(1-2x) + Cx^2e^{\frac{1}{x}}(1-2x) +$

$+x^2 - 2x^3 = x^2$.

Следовательно, данная функция является решением уравнения.

Пример 2. Доказать, что функция $\ln\left(x^2 + y^4\right) = \ln\left(Cy^2\right)$, заданная в неявном виде, является интегралом ДУ $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^4}$.

Решение. Действительно, согласно правилу дифференцирования неявной функции $F(x, y) = 0$, имеем:

$\dfrac{2x + 4y^3y'}{x^2 + y^4} = \dfrac{2yy'}{y^2} \Rightarrow \left(x + 2y^3y'\right)y = y'\left(x^2 + y^4\right) \Rightarrow xy = y'\left(x^2 + y^4\right) - 2y^4y' \Rightarrow$

$xy = y'\left(x^2 - y^4\right) \Rightarrow y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^4}$. Подставляя полученное выражение в данное ДУ, получаем равенство: $\dfrac{xy}{x^2 - y^4} = \dfrac{xy}{x^2 - y^4}$.

Пример 3. Составить дифференциальные уравнения семейства линий:

$$\ln\frac{x}{y} = 1 + Cy. \qquad (*)$$

Решение. Для того, чтобы составить ДУ для данного семейства, заданного уравнением в неявном виде, находим производную:

$$\frac{1}{x} - \frac{y'}{y} = Cy' \Rightarrow y - xy' = Cxyy'.$$

Исключаем теперь произвольную постоянную C из уравнения (*), для этого выразим C из последнего равенства и подставим в уравнение (*):

$$C = \frac{y - xy'}{xyy'} = \frac{1}{xy'} - \frac{1}{y} \Rightarrow \ln\frac{x}{y} = 1 + y\left(\frac{1}{xy'} - \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \ln\frac{x}{y} = 1 + \frac{y}{xy'} - \frac{y}{y} \Rightarrow \ln\frac{x}{y} = \frac{y}{xy'}.$$

Окончательно получим:

$$y'x\ln\frac{x}{y} - y = 0.$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение данного семейства окружностей.

Пример 4. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, зависящего от двух параметров C_1 и C_2:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}. \qquad (**)$$

Решение. Так как в данном уравнении две произвольных постоянных C_1 и C_2, то для их нахождения надо иметь два уравнения. Для этого продифференцируем уравнение (**) два раза:

$$\begin{cases} y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} \\ y'' = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Решая полученную систему относительно C_1 и C_2, получим:

$$C_1 = \frac{1}{6} e^{-2x} \left(y' + y'' \right), \quad C_2 = \frac{1}{3} e^{x} \left(y'' - 2y' \right).$$

Подставив найденные значения C_1 и C_2 в уравнение (**), получим после преобразований:

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение двупараметрического семейства кривых (**).

Пример 5. С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

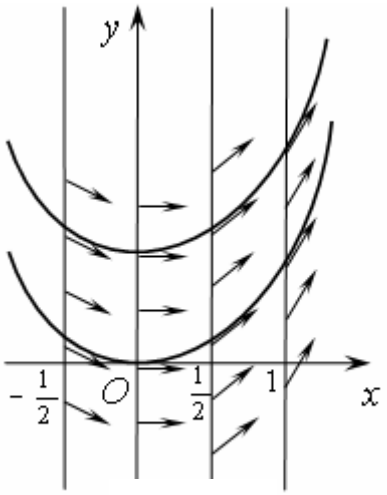


Рис. 57

Решение. Уравнение изоклин этого ДУ будет $2x = C$, т.е. изоклинами здесь будут прямые, параллельные оси Oy $\left(x = \frac{C}{2} \right)$. В точках прямых проведем отрезки, образующие с осью Ox один и тот же угол α, тангенс которого равен C.

Так, при $C = 0$ имеем $x = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$;

при $C = 1$ уравнение изоклины $x = \frac{1}{2}$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = 1$ и $\alpha = 45°$;

при $C = -1: x = -\frac{1}{2}, \operatorname{tg}\alpha = -1, \alpha = -45°$;

при $C = 2: x = 1, \operatorname{tg}\alpha = 2, \alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°$ и т.д.

Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклоненных к оси Ox под определенным углом (рис. 57), по их направлениям строим линии. Они представляют собой семейство парабол.

Задания для самостоятельной работы

9.1. Проверить, являются ли указанные функции решениями уравнений:

а) $y=\sqrt{x^2+C}$, $yy'=x$;

б) $y=e^{\arcsin Cx}$, $xy'=y\,\mathrm{tg}\ln y$;

в) $y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$, $y'-y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$;

г) $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; $y''+6y'+13y=0$;

д) $y=C_1x+C_2x^2$, $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2y}{x^2}=0$;

е) $y=\frac{1}{Ce^{-x^2}+1-x^2}$, $y'-2xy=3x^3y^2$;

ж) $y=C_1\ln x-\frac{x^2}{4}+C_2$, $x(y''+1)+y'=0$;

з) $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-\frac{1}{4}\left(x^2+x\right)e^x$, $y''-4y'+3y=xe^x$;

9.2. Проверить, являются ли функции, заданные неявно, интегралами уравнений:

а) $\arcsin\frac{y}{x}=C-x$, $xy'-y+x\sqrt{x^2-y^2}=0$;

б) $x^2\ln y+2y(x+1)=C$, $\left(y+x\ln y\right)dx+\left(\frac{x^2}{2y}+x+1\right)dy=0$;

в) $x^2+y^2-2Cx=0$, $y^2-x^2=2xyy'$;

г) $x^2+2xy=C$, $(x+y)dx+xdy=0$;

д) $x\sqrt{1+y^2}=Cy$, $xy'-y=y^3$;

е) $x+\frac{1}{x}=Cy^2$, $y^2=y'(2xy+3)$;

ж) $y=x+Ce^y$, $(x-y+1)y'=1$;

з) $x^2y=Ce^{2y}$, $xy'+2y=2xyy'$.

9.3. Составить дифференциальные уравнения семейств линий:

а) $y=Ce^{3x}$;

б) $y=2(\sin x-1)+Ce^{-\sin x}$;

в) $\ln\frac{x}{y}=5+Cy^2$;

г) $y=\left(2\sin\frac{x}{2}+C\right)\mathrm{tg}\frac{x}{2}$;

д) $2y^3=3Cx^2$;

е) $y=Ce^{x^2+x}$;

ж) $y=\sin Cx$;

з) $y=2\sqrt{2-x^3}+C$.

9.4. Составить дифференциальное уравнение семейств кривых, зависящих от двух параметров C_1 и C_2:

а) $y=C_1x+C_2x^2$;

б) $y=C_1x+C_2\ln x$;

в) $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$;

г) $y=-C_1\cos x+C_2$;

д) $y=C_1e^{5x}+C_2e^{-5x}$;

е) $y=e^{3x}\left(C_1+C_2x\right)$;

ж) $y=C_1\ln(x^2+1)+C_2$;

з) $y=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$.

Ответы

9.3. а) $y' - 3y = 0$; б) $y' - y\cos x = 2\left(\cos x + \sin x - 1\right)$; в) $y'\left(\ln\frac{x^2}{y^2} - 9\right) - \frac{y}{x} = 0$; г) $y' = \frac{y}{\sin x} + \sin\frac{x}{2}$; д) $3y' \cdot x = 2y$; е) $y' = y(2x + 1)$; ж) $y' = \arcsin y \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; з) $y' + \frac{3x^2}{\sqrt{2 - x^2}} = 0$. **9.4.** а) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$; б) $x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = 0$; в) $y'' + 4y = 0$; г) $y'' - y'\operatorname{ctg} x = 0$; д) $y'' - 25y = 0$; е) $y'' - 4y' + 9y = 0$; ж) $y''(x^2 + 1)x - y'(1 - x^2) = 0$; з) $y'' - 2y' - 2y = 0$.

.

9.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Краткие теоретические сведения

Определение. Если ДУ можно привести к виду:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ – некоторые известные функции, то оно называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Это уравнение можно переписать в виде:

$$f(x)dx = -g(y)dy \tag{1*}$$

и рассматривать как равенство двух дифференциалов.

Каждая часть уравнения с разделенными переменными представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной.

Его общим интегралом будет:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C, \tag{2}$$

где C – произвольная постоянная.

Рассмотри более общий вид уравнения *с разделяющимися переменными*:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0. \tag{3}$$

ДУ (3) можно переписать в другой форме:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y). \tag{4}$$

Особенность ДУ (3) в том, что коэффициенты при dx и dy представляют собой произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, другая – только от y.

ДУ вида (3) легко сводится к уравнению (1) почленным делением его на $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$.

После деления получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\cdot dy=0.$$

Последнее равенство интегрируется согласно формуле (2):

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\cdot dy=C.$$

Уравнение (2.4.) также сводится к уравнению с разделенными переменными, для этого достаточно обе его части умножить на dx и поделить на $f_2(y)\neq 0$. В результате получим:

$$f_1(x)dx-\frac{dy}{f_2(y)}=0,\ \int f_1(x)dx-\int\frac{dy}{f_2(y)}=C\ -$$

общий интеграл.

Замечание. При проведении почленного деления ДУ (3) на $Q_1(y)P_2(x)$, а в уравнении (2.4) – на $f_2(y)$, можно потерять те решения, которые обращают это произведение $Q_1(y)P_2(x)$ и функцию $f_2(y)$ в 0. Поэтому необходимо найти решения уравнений $Q_1(y)P_2(x)=0$ и $f_2(y)=0$, которые могут оказаться дополнительными решениями

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Решить ДУ с разделяющимися переменными:

$$\left(4y-x^2y\right)dy-\left(4x-xy^2\right)dx=0.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде:

$$\left(4y-x^2y\right)dy=\left(4x-xy^2\right)dx.$$

В каждой части равенства вынесем за скобки одинаковые множители:

$$y\left(4-x^2\right)dy=x\left(4-y^2\right)dx.$$

Разделим левую и правую части уравнения на произведение $\left(4-x^2\right)\left(4-y^2\right)$. Тогда получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{ydy}{4-y^2}=\frac{xdx}{4-x^2}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int\frac{ydy}{4-y^2}=\int\frac{xdx}{4-x^2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\ln\left|4-y^2\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|+C.$$

Для удобства записи положим $C=-\frac{1}{2}\ln C_1$, где $C_1>0$, тогда

$$\ln\left|4-y^2\right|=\ln\left|4-x^2\right|+\ln C_1,\ C_1>0.$$

Потенцируя, получим:

$$\left|4-y^2\right| = C_1\left|4-x^2\right|,\ C_1 > 0.$$

Освобождаемся от знака модуля:

$$4-y^2 = \pm C_1\left(4-x^2\right),\ \text{или}\ 4-y^2 = \overline{C}\left(4-x^2\right),\ \overline{C} \neq 0 -$$

общий интеграл ДУ.

Найдем особые решения, если они имеются. Для этого решим уравнение:

$$\left(4-x^2\right)\left(4-y^2\right) = 0.$$

Получаем, что $x = \pm 2,\ y = \pm 2$. Функции $y = \pm 2$ ($dy = 0$) удовлетворяют данному уравнению. Рассмотрим соотношение $x = \pm 2$. Из него находим, что $dx = 0$. Подставляем эти значения в уравнение, получаем тождество $0 = 0$. Значит, $x = \pm 2$ также является решением данного уравнения.

Пример 2. Решить ДУ с разделяющимися переменными:

$$y' e^{-x} = x - 1.$$

Решение. Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, запишем данное уравнение в дифференциальной форме (см. формулу 1.7.):

$$e^{-x} dy - \left(x-1\right) dx = 0.$$

Для удобства решения перепишем его в виде:

$$e^{-x} dy = \left(x-1\right) dx.$$

Разделим переменные:

$$dy = \frac{\left(x-1\right)}{e^{-x}} dx \Rightarrow dy = \left(x-1\right) e^{x} dx,$$

тем самым мы свели уравнение к виду (2.1.*).

Проинтегрируем последнее уравнение, применяя в правом интеграле формулу интегрирования по частям:

$$\int dy = \int \left(x-1\right) e^{x} dx + C \Rightarrow y = e^{x}(x-2) + C.$$

Получили общее решение исходного уравнения. Так как $e^{-x} \neq 0\ \forall^{x}$, то особых решений нет.

Иногда для разделения переменных надо сначала сделать замену переменных.

Пример 3. Решить уравнение:

$$y' = \left(x+y\right)^2.$$

Решение. Сделаем замену переменных, введя новую искомую функцию $z = x + y$, где z – функция переменной x, т.е. $z = z(x)$. Дифференцируя это равенство, получим:

$$z' = 1 + y'.$$

Тогда уравнение примет следующий вид:

$$z' = z^2 + 1 \text{ или } \frac{dz}{z^2+1} = dx,$$

откуда

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx + C \Rightarrow \operatorname{arctg} z = x + C.$$

Особых решений нет, так как $z^2 + 1 \neq 0$.

После обратной замены получаем:

$$\operatorname{arctg}(x+y) = x + C \ -$$

общий интеграл.

Пример 4. Найти частное решение (интеграл) уравнения

$$\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x}\right)y' - y = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(4) = 1$.

Решение. Применим первые два пункта алгоритма решения ДУ с разделяющимися переменными, получим:

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{y} + 1\right)dy = ydx.$$

Разделим левую и правую части уравнение на $y\sqrt{x}$. Получаем уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{\left(\sqrt{y}+1\right)dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Проинтегрируем последнее равенство:

$$\int \frac{\left(\sqrt{y}+1\right)dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + C \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} + \int \frac{dy}{y} = 2\sqrt{x} + C \Rightarrow 2\sqrt{y} + \ln|y| = 2\sqrt{x} + C.$$

Получили общий интеграл исходного ДУ.

Использовав начальное условие, определим значение произвольной постоянной, т.е. подставим в общий интеграл ДУ значения $x = 4,\ y = 1$:

$$2\sqrt{1} + \ln 1 = 2\sqrt{4} + C \Rightarrow 2 = 4 + C \Rightarrow C = -2.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$2\sqrt{y} + \ln|y| = 2\sqrt{x} - 2 \text{ или } 1 + \ln\sqrt{y} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Задания для самостоятельной работы

9.5. Решить ДУ с разделяющимися переменными:

а) $4x^3 ydx + 2\sqrt{5 - x^4}dy = 0;$

б) $y\left(1 + \ln y\right) + xy' = 0;$

в) $e^{1-x^2}dy - x\left(y^2 - 1\right)dx = 0;$

г) $\left(3xy^2 + 12x\right)dx + \left(6y - 3x^2 y\right)dy = 0;$

д) $e^{x+y}dx + ydy = 0;$

е) $6xdx - ydy = yx^2 dy - 3xy^2 dx;$

ж) $xy\left(1+x^2\right)y'=1+y^2$; з) $y-xy'=1+x^2y'$.

9.6. Найти решение задачи Коши для указанных ДУ:

а) $3e^x \operatorname{tg} y dx-\left(1+e^x\right)\dfrac{dy}{\cos^2 y}=0,$ $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg} y}{\sin^2 x}dx+\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 y}dy=0,$ $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$;

в) $\left(1+e^{2x}\right)y^2dy=e^xdx,\ y(0)=0$;

г) $y'=e^{x+y}+e^{x-y},\ y(0)=0$;

д) $\left(1+x^2\right)y^3dx-\left(y^2-1\right)x^3dy=0,$ $y(1)=-1$;

е) $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dx+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{y}\right)dy=0,$ $y(0)=0$;

ж) $x^2\left(2yy'-1\right)=1,\ y(1)=0$;

з) $(x+xy)dy+(y-xy)dx=0,\ y(1)=1$.

Ответы

9.5. а) $y = C\ e^{\sqrt{5-x^4}}$, $C\in\mathbb{R}$; б) $y = e^{\frac{C-x}{x}}$, $C\in\mathbb{R}$; в) $\ln\left|\dfrac{y-1}{y+1}\right|=e^{x^2+1}+C,\ C\in\mathbb{R}$; г) $y^2=C(x^2-2)-4, C\in\mathbb{R}$; д) $y+1 = e^{x+y}+C\,e^y$, $C\in\mathbb{R}$; е) $y^2+2 = C\,(x^2+1)^3$, $C\in\mathbb{R}$; ж) $y^2+1=\dfrac{Cx^2}{x^2+1}, C\in\mathbb{R}$; з) $y=\dfrac{Cx}{x+1}, C\in\mathbb{R}$. **9.6.** а) $(1+e^x)^3 = 8\operatorname{tg} y$; б) $\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 y}=4$; в) $y^3=3arctge^x-\dfrac{3}{4}\pi$; г) $arctge^y=e^x+\dfrac{\pi}{4}-1$; д) $\dfrac{x}{y}=-e^{\frac{1}{2y^2}+\frac{1}{2x^2}-1}$; е) $y-x+2\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)+2\ln\dfrac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{x}+1}=0$; ж) $y^2 = x - \dfrac{1}{x}$; з) $xy = e^{x-y}$.

9.3. Однородные дифференциальные уравнения

Краткие теоретические сведения

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся однородные ДУ первого порядка.

Определение. Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией n-го порядка* (измерения) относительно аргументов x и y, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель t вся функция умножается на t^n, т.е. равенство

$$f\left(tx,ty\right)=t^n f\left(x,y\right)$$

справедливо для любого $t\in\mathbb{R}$, при котором функция $f\left(tx,ty\right)$ определена, $n=const$.

Например, функция $f\left(x,y\right)=x^3-5xy^2$ есть однородная функция третьего порядка, так как

$$f\left(tx,\ ty\right)=\left(tx\right)^3-5\left(tx\right)\left(ty\right)^2=t^3x^3-5t^3xy^2=t^3\left(x^3-5xy^2\right)=t^3f\left(x,y\right).$$

Функция $f(x,y)$ будет *однородной нулевого порядка,* если $n=0$, т.е. выполняется равенство

$$f\left(tx,ty\right)=t^0f\left(x,y\right)=f\left(x,y\right). \tag{1}$$

Определение. Дифференциальное уравнение, которое можно привести к виду:

$$y'=\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right) \tag{2}$$

называется *однородным*, если функция $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Так как функция $f(x,y)$ –однородная нулевого порядка, то уравнение можно записать в виде $y'=f(tx,ty)$.

Положив $t=\frac{1}{x}$, получаем:

$$y'=f\left(\frac{x}{x},\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Выполнив замену переменной $y=zx$, откуда $y'=z'x+z$, приведем уравнение к виду $z'x+z=\varphi(z)$ или $x\frac{dz}{dx}=\varphi(z)-z$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим $\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\frac{dx}{x}$. Получив его общее решение $z=\Phi(x,C)$, необходимо сделать обратную замену $z=\frac{y}{x}$.

Рассмотри ДУ вида

$$P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0. \tag{3}$$

Оно будет однородным в том и только том случае, если $P\left(x,y\right)$ и $Q\left(x,y\right)$ – однородные функции одного и того же порядка, т.е.

$$P\left(tx,ty\right)=t^nP\left(x,y\right)\ \text{и}\ Q\left(tx,ty\right)=t^nQ\left(x,y\right).$$

Замечание. Уравнение вида $y'=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$, где a,b,c,a_1,b_1,c_1 – числа, приводится к однородному. Для этого вводятся новые переменные u и v, полагая $x=u+\alpha,\ y=v+\beta$, где α и β – числа, которые подбираются так, чтобы уравнение стало однородным.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти все решения ДУ

$$\left(xy - x^2\right)y' = y^2.$$

Решение. Запишем данное ДУ в форме (2)

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

Проверим функцию $f\left(x,y\right) = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$ на однородность нулевого порядка:

$$f\left(tx,ty\right) = \frac{\left(ty\right)^2}{txty - \left(tx\right)^2} = \frac{t^2y^2}{t^2xy - t^2x^2} = \frac{t^2y^2}{t^2\left(xy - x^2\right)} = \frac{y^2}{xy - x^2} = f\left(x,y\right).$$

Из проверки видно, что данное уравнение действительно является однородным. Сделаем замену $y = zx$, $y' = z'x + z$. Тогда:

$$z'x + z = \frac{\left(zx\right)^2}{zx^2 - x^2} \Rightarrow z'x + z = \frac{z^2x^2}{zx^2 - x^2} \Rightarrow z'x + z = \frac{z^2x^2}{zx^2 - x^2} \Rightarrow z'x + z = \frac{z^2x^2}{x^2\left(z-1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'x + z = \frac{z^2}{z-1} \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{z-1} - z \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - z^2 + z}{z-1} \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z}{z-1}.$$

Получившееся после преобразований ДУ – есть ДУ с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные, последовательно находим:

$$\frac{z-1}{z}dz = \frac{dx}{x},$$

$$\int dz - \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x} + C_1 \Rightarrow z - \ln\left|z\right| = \ln\left|x\right| + C_1 \Rightarrow z = \ln\left|C_1zx\right|, C_1 \neq 0 \Rightarrow C_1zx = e^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow zx = \frac{1}{C_1}e^z \Rightarrow zx = Ce^z.$$

Сделаем обратную замену, т.е. в последнее выражение вместо z подставим значение $\dfrac{y}{x}$. Получим общий интеграл:

$$\frac{y}{x}x = Ce^{\frac{y}{x}} \Rightarrow y = Ce^{\frac{y}{x}}.$$

При разделении переменных могли потерять особые решения. Найдем их, если они имеются. Для этого решим уравнение $zx = 0$. Непосредственно видно, что $x = 0$ не является решением Если $z = 0$, то $y = 0$. С помощью подстановки можно убедиться, что $y = 0$ – является решением данного ДУ.

Следовательно, к общему интегралу необходимо добавить решение $y=0$.

Пример 2. Решить уравнение $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$.

Решение. Приведем данное уравнение к виду (3)

$$xdy-\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)dx=0.$$

Так как функции x и $\sqrt{x^2+y^2}+y$ – однородные первого порядка, то данное уравнение – однородное. Сделаем замену $y=zx$, $y'=z'x+z$. Тогда

$$x\left(z'x+z\right)=\sqrt{x^2+z^2x^2}+zx\Rightarrow x\left(z'x+z\right)=x\left(\sqrt{1+z^2}+z\right),$$

предполагая, что $x\neq 0$, сокращаем обе части равенства на x. Далее имеем:

$$z'x=\sqrt{1+z^2}\Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\sqrt{1+z^2}\ .$$

Разделяем переменные, интегрируем и находим общий интеграл ДУ:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\int\frac{dx}{x}+C\Rightarrow\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|=\ln|Cx|,\ C\neq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z+\sqrt{1+z^2}=Cx.$$

После обратной замены получаем:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=Cx\Rightarrow\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=Cx\Rightarrow y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=Cx^2-\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Особое решение только одно $x=0$, так как $\sqrt{x^2+z^2}\neq 0$.

Пример 3. Найти частное решение ДУ

$$y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x},$$

удовлетворяющее начальному условию $y(1)=1$.

Решение. Легко видеть, что функция $f(x,y)=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ – однородная нулевого порядка. Сделаем замену $\frac{y}{x}=z$, $y'=z'x+z$. Тогда

$$z'x+z=z\ln z\Rightarrow z'x=z\ln z-z\Rightarrow z'x=z\left(\ln z-1\right).$$

Разделяем переменные

$$\frac{dz}{z\left(\ln z-1\right)}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем последнее равенство, получаем:

$$\int\frac{dz}{z\left(\ln z-1\right)}=\int\frac{dx}{x}+C\Rightarrow\ln|\ln z-1|=\ln|Cx|,\ C\neq 0\Rightarrow\ln z-1=Cx\Rightarrow z=e^{Cx+1}.$$

Подставляя вместо z его значение, получим общее решение:

$$y = xe^{Cx+1}.$$

Использовав начальное условие $y(1)=1$, определим значение С:

$$1 = 1\cdot e^{C+1} \Rightarrow 1 = e^{C}\cdot e \Rightarrow e^{C} = e^{-1} \Rightarrow C = -1.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = xe^{1-x}.$$

Пример 4. Найти общий интеграл ДУ

$$y' = \frac{y+2}{2x+y-4}.$$

Решение. Положив $x = u+\alpha,\ y = v+\beta$, получаем:

$$dx = du,\ dy = dv;$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{v+\beta+2}{2u+2\alpha+v+\beta-4} = \frac{v+(\beta+2)}{2u+v+(2\alpha+\beta-4)}.$$

Подберем α и β так, чтобы уравнение стало однородным, т.е.

$$\begin{cases} \beta+2=0, \\ 2\alpha+\beta-4=0. \end{cases}$$

Находим, что $\alpha = 3,\ \beta = -2$. Заданное уравнение принимает вид:

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{2u+v}$$

и будет являться однородным.

Решая это однородное уравнение подстановкой $v = zu$, получаем уравнение:

$$u\frac{dz}{du} = -\frac{z(1+z)}{2+z}$$

решением которого является:

$$\frac{z^2}{1+z} = \frac{C}{u},\ C \neq 0.$$

Подставляя значение $z = \frac{v}{u}$, получаем: $\frac{v^2}{u+v} = C$.

Так как $x = u+3,\ y = v-2$, т.е. $u = x-3,\ v = y+2$, имеем:

$$\frac{(y+2)^2}{x+y-1} = C.$$

Задания для самостоятельной работы

9.7. Решить однородные ДУ:

а) $2x^2dy=\left(x^2+y^2\right)dx$;

б) $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$;

в) $y'=\dfrac{y^2+4xy+2x^2}{x^2}$;

г) $y'=\dfrac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$;

д) $y+x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=xy'$;

е) $xy'=y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$;

ж) $\left(\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0$;

з) $\left(x^2+y^2\right)dx=2xydy$.

9.8. Решить ДУ, приводящиеся к однородным:

а) $y'=\dfrac{2x+y-3}{2x-2}$;

б) $y'=\dfrac{x+4y-5}{6x-y-5}$;

в) $\left(x-2\right)y'-\left(x+y-4\right)=0$;

г) $\left(2x+y-4\right)y'=y+2$;

д) $x+5y-6-\left(7x-y-6\right)y'=0$;

е) $5\left(y+1\right)dx-\left(4x+3y-1\right)dy=0$;

ж) $\left(3x+3\right)dy=\left(3y-2x+1\right)dx$;

з) $\left(2x+3y-5\right)dx=\left(5x-5\right)dy$.

9.9. Найти частные решения (интегралы) уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а) $xy'=x\sin\dfrac{y}{x}+y,\ y\left(2\right)=\pi$;

б) $xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x},\ y\left(1\right)=\dfrac{\pi}{2}$;

в) $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2},\ y\left(1\right)=0$;

г) $xy'=y\left(1+\ln y-\ln x\right),\ y\left(1\right)=e^2$;

д) $\left(x^4+6x^2y^2+y^4\right)dx+$
$+4xy\left(x^2+y^2\right)dy=0,\ y\left(1\right)=0$;

е) $y'=\dfrac{2x+3y}{x+4y},\ y\left(1\right)=1$;

ж) $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y,\ y\left(1\right)=0$;

з) $y'=4+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2},\ y\left(1\right)=2$.

Ответы

9.7. а) $\dfrac{2x}{x-y}=\ln Cx$; б) $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$; в) $\dfrac{y+x}{y+2x}=Cx$;

г) $arctg\dfrac{y}{x}=\ln\left[Cx\left(\dfrac{y^2}{x^2}+1\right)^3\right]$; д) $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$; е) $\ln\dfrac{y}{x}=Cx$; ж) $\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\ln Cy=0$;

з) $x=C(x^2-y^2)$. **9.8.** а) $y=\dfrac{2}{3}\left(x-1\right)\left(1-C\left(x-1\right)^{-\frac{3}{2}}\right)+1=\dfrac{2C}{3\sqrt{x-1}}+1$;

б) $\dfrac{x-1}{x-y}=\ln\left[C\left(y-x\right)\right]$; в) $y=(x-2)\ln\left[C\left(x-2\right)\right]+2$; г) $\dfrac{\left(y+2\right)^3}{\left(y+x-1\right)\left(x-3\right)^2}=C$;

д) $\dfrac{6(x-1)}{x-y}=\ln[C(y-x)]$; е) $\dfrac{(y+1)^8}{(x-3y-4)^{10}}=C$; ж) $\dfrac{y+1}{x+1}+\dfrac{2}{3}\ln(x+1)=C$;

з) $y(x-1)\cdot\left[1-C(x-1)^{-\frac{2}{5}}\right]+1$. **9.9.** а) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2x}=\dfrac{x}{2}$; б) $\sin\dfrac{y}{x}=x$; в) $y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$;

г) $\ln\dfrac{y}{x}=x$; д) $5y^4+10x^2y^2+x^4=\dfrac{1}{x}$; е) $(x-y)^5\cdot(2y+x)=0$; ж) $e^y=xe^{x-1}$;

з) $arctg\dfrac{y}{2x}=2\ln x+\dfrac{\pi}{4}$.

9.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Я. Бернулли

Краткие теоретические сведения

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$y'+p(x)y=q(x), \qquad (1)$$

линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y' (а также любое уравнение, с помощью алгебраических преобразований приводящееся к виду 1), называется *неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. Функции $p(x)\neq 0$ и $q(x)\neq 0$ будем полагать непрерывными в некоторой области, например на отрезке $[a;\ b]$, для того, чтобы выполнялись условия теоремы Коши существования и единственности решения (см. теорему из п. 1.1.).

В случае, когда $q(x)=0$, уравнение (1) называют *однородным линейным дифференциальным уравнением*.

Особенность ДУ (1) состоит в том, что искомая функция y и ее производной y' входят в уравнение первой степени, не перемножаясь между собой.

Рассмотрим два метода интегрирования ДУ (1) – метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Эйлера

Умножаем обе части уравнения на функцию $e^{\int p(x)dx}$ (*интегрирующий множитель*):

$$y'e^{\int p(x)dx}+p(x)ye^{\int p(x)dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Следовательно, $\left(ye^{\int p(x)dx}\right)'=q(x)e^{\int p(x)dx}$. Значит,

$$y=\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Метод И. Бернулли

Введем две неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$. Решение уравнения (1) найдем в виде произведения этих двух функций, т.е. с помощью подстановки $y = u(x) \cdot v(x)$ (подстановки Бернулли). Тогда $y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$. Подставляя выражения y и y' в уравнение (1), получаем: $u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x)$ или

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + p(x) \cdot v\right) = q(x). \qquad (2)$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. уравнение (4.2) превратилось в уравнение

$$u' \cdot v = q(x). \qquad (3)$$

Для этого необходимо решить ДУ с разделяющимися переменными: $v' + p(x) \cdot v = 0$. А именно:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x) \cdot v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x) \cdot dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x) \cdot dx + \ln|C|.$$

Так как $v(x)$ может быть выбрана достаточно произвольно (поскольку только произведение $u \cdot v$ должно удовлетворять исходному уравнению 1), можно принять $C = 1$. Отсюда:

$$v = e^{-\int p(x) \cdot dx}.$$

Подставляя найденную функцию $v(x)$ в уравнение (3), получаем:

$$u' \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = q(x).$$

После решения полученного ДУ с разделяющимися переменными находим функцию $u(x)$:

$$u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} dx + C.$$

Возвращаясь к переменной y, получаем общее решение исходного ДУ (1):

$$y = u \cdot v = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx}.$$

Таким образом, интегрирование уравнения (4.1) сводится нахождению двух функций: $v(x)$ – решение уравнения $v' + p(x) \cdot v = 0$, и $u(x)$ – решение уравнения $u' \cdot v = q(x)$, т.е. к интегрированию двух уравнений с разделяющимися переменными.

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Решим линейное однородное ДУ, о котором говорилось выше, т.е.

$$y' + p(x)y = 0.$$

Данное уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными, поэтому

$$\ln|y| = -\int p(x)\cdot dx + \ln|C_1|,$$

т.е. $\left|\frac{y}{C_1}\right| = e^{-\int p(x)\cdot dx} \Rightarrow y = \pm C_1 e^{-\int p(x)\cdot dx} \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)\cdot dx}$, $C = \pm C_1$.

Метод вариации произвольной постоянной состоит в следующем: постоянную C в полученном решении заменяют функцией $C(x)$, т.е. $C = C(x)$. Решение уравнения (4.1) ищем в виде:

$$y = C(x)\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx}. \qquad (4)$$

Подставляем решение (4.4) в исходное уравнение (1). Для удобства вычислений найдем отдельно производную y':

$$y' = C'(x)\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx} + C(x)e^{-\int p(x)\cdot dx}\left(-p(x)\right).$$

После подстановки получаем:

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx} - p(x)\cdot C(x)e^{-\int p(x)\cdot dx} + p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx} = q(x).$$

Второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются, и уравнение принимает вид:

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx} = q(x).$$

Следовательно,

$$dC(x) = q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot dx.$$

Интегрируя, находим:

$$C(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot dx + C.$$

Подставляя выражение $C(x)$ в равенство (4.4), получим общее решение ДУ (1):

$$y = \left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot dx + C\right)\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx}. \qquad (5)$$

Естественно, та же формула была получена методом Бернулли.
Общее решение уравнения (1) всегда можно записать в виде (5).

Замечание. Уравнение вида

$$\left(x\cdot p(y) + q(y)\right)\cdot y' = \varphi(y) \qquad (6)$$

можно свести к линейному, если x считать функцией, а y – аргументом: $x = x(y)$. Тогда, используя равенство $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, получаем

$$x\cdot p(y) + q(y) = x'\varphi(y) \Rightarrow x'\varphi(y) - x\cdot p(y) = q(y), \text{ т.е. } x' - \frac{p(y)}{\varphi(y)}\cdot x = \frac{q(y)}{\varphi(y)}$$

или

$$x' - P(y)\cdot x = Q(y), \qquad (7)$$

где $P(y)=\dfrac{p(y)}{\varphi(y)}$ и $Q(y)=\dfrac{q(y)}{\varphi(y)}$, линейное относительно x уравнение.

Его общее решение имеет вид:

$$x=\left(\int Q(y)\cdot e^{\int P(y)\cdot dy}\cdot dy+C\right)\cdot e^{-\int P(y)\cdot dy}.$$

Уравнение Я. Бернулли

Дифференциальное уравнение

$$y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^n, \qquad (8)$$

где $n\in\mathbb{R}, n\neq 0, n\neq 1$, а также любое уравнение, с помощью алгебраических преобразований приводящееся к уравнению (7), называется *уравнением Бернулли*.

При $n=0$ ДУ (7) – линейное, а при $n=1$ – с разделяющимися переменными. В общем случае оно сводится к линейному с помощью подстановки $z=y^{1-n}$.

Решив его одним из описанных выше методов, найдем $z=z(x,C)$, а затем и $y=z^{\frac{1}{1-n}}$.

Уравнение Бернулли можно решать методом Бернулли в виде

$$y=u(x)\cdot v(x),$$

т.е. не сводя его к линейному ДУ.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти общий интеграл линейного неоднородного ДУ

$$y'-2y=e^{2x}.$$

Решение. Решим уравнение методом Бернулли, т.е. будем искать решение ДУ в виде $y=u(x)\cdot v(x)$. Здесь $p(x)=-2, q(x)=e^{2x}$.

Сделаем подстановку Бернулли:

$$u'\cdot v+u\cdot v'-2u\cdot v=e^{2x},\ u'\cdot v+u\left(\cdot v'-2v\right)=e^{2x}.$$

Решим уравнение $v'-2v=0$, найдем его частное решение.

Разделяем переменные $v'=2v\Rightarrow\dfrac{dv}{dx}=2v\Rightarrow\dfrac{dv}{v}=2x\Rightarrow\ln|v|=2x+\ln|C|$.

Полагая $C=1$, выбираем частное решение $v=e^{2x}$. Далее находим общее решение уравнения $u'\cdot v=e^{2x}$, где $v=e^{2x}$. Имеем:

$$u'\cdot e^{2x}=e^{2x}\Rightarrow\frac{du}{dx}=1\Rightarrow du=dx\Rightarrow u=x+C.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y=uv=\left(x+C\right)e^{2x}.$$

Пример 2. Решить задачу Коши для ДУ

$$1-2xyy'=y^3y',\ y\left(\frac{3}{2}\right)=0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\left(2xy+y^3\right)y'=1.$$

Полученное уравнение есть уравнение вида (4.6). Сведем его к уравнению (4.6*), считая $x=x(y)$ и $y'_x=\frac{1}{x'_y}$:

$$\left(2xy+y^3\right)\cdot\frac{1}{x'}=1\Rightarrow 2xy+y^3=x'\Rightarrow x'-2xy=y^3\ -$$

линейное относительно x.

Используем метод Лагранжа. Решим линейное однородное ДУ:

$$x'-2xy=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=2xy\Rightarrow\frac{dx}{x}=2ydy\Rightarrow\ln|x|=y^2+\ln|C|\Rightarrow x=Ce^{y^2}.$$

Заменяем произвольную постоянную C функцией $C(y)$, решение ищем в виде:

$$x=C\left(y\right)e^{y^2}.$$

Находим производную: $x'=C'\left(y\right)e^{y^2}+2C\left(y\right)ye^{y^2}$. Подставляем x и x' в исходное уравнение, получаем:

$$C'\left(y\right)e^{y^2}+2C\left(y\right)ye^{y^2}-2C(y)ye^{y^2}=y^3\Rightarrow C'\left(y\right)e^{y^2}=y^3.$$

Находим $C(y)$:

$$C'\left(y\right)e^{y^2}=y^3\Rightarrow C'\left(y\right)=y^3e^{-y^2}\Rightarrow C\left(y\right)=\int y^3e^{-y^2}dy.$$

Решим интеграл $\int y^3e^{-y^2}dy=\int y^2e^{-y^2}ydy=\begin{bmatrix}-y^2=t,\\ ydy=-\frac{1}{2}dt\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\int e^t tdt$.

Последний интеграл решается методом интегрирования по частям, получаем:

$$C(y)=-\frac{1}{2}e^t\left(t-1\right)=\frac{1}{2}e^{-y^2}\left(y^2+1\right)+C.$$

Таким образом, общим решением данного уравнения является

$$x=e^{y^2}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{-y^2}\left(y^2+1\right)+C\right)\Rightarrow x=\frac{1}{2}e^{-y^2}\cdot e^{y^2}\cdot\left(y^2+1\right)+Ce^{y^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\cdot\left(y^2+1\right)+Ce^{y^2}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=1$. Подставляем в полученное общее решение $x=\frac{3}{2}$, $y=0$, имеем:

$$\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(0^2+1\right)+Ce^{0^2}\Rightarrow C=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\Rightarrow C=1.$$

Искомое частное решение имеет вид:

$$x=\frac{1}{2}\cdot\left(y^2+1\right)+e^{y^2}.$$

Пример 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$2xyy'-y^2+x=0.$$

Поделим обе части уравнения на $2xy$ $(x\neq 0, y\neq 0)$, получим:

$$y'-\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}=0\Rightarrow y'-\frac{y}{2x}=-\frac{1}{2}y^{-1}\ -$$

это уравнение Бернулли $(n=-1)$. Поделим на y^{-1} и сделаем замену $z=y^{1-(-1)}\Rightarrow z=y^2\Rightarrow z'=2yy'$, получаем:

$$yy'-\frac{y^2}{2x}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{z'}{2}-\frac{z}{2x}=-\frac{1}{2}\Rightarrow z'-\frac{z}{x}=-1.$$

Общее решение последнего линейного ДУ имеет вид (по формуле 4.5):

$$z=\left(-\int e^{-\int\frac{dx}{x}}\cdot dx+C\right)\cdot e^{\int\frac{dx}{x}},$$

т.е. $z=\left(-\int e^{-\ln|x|}\cdot dx+C\right)\cdot e^{\ln|x|}=\left(-\int\frac{dx}{x}+C\right)\cdot x=\left(-\ln|x|+\ln|C_1|\right)\cdot x=x\cdot\ln\left|\frac{C_1}{x}\right|$.

Сделаем обратную замену, получим $y^2=x\cdot\ln\left|\frac{C}{x}\right|$ – общее решение исходного ДУ.

Пример 4. Решить задачу Коши для ДУ

$$\left(2x^2y\ln y-x\right)y'=y,\ y(1)=1$$

Решение. Заменим $y'_x=\frac{1}{x'_y}$, получаем:

$$\left(2x^2y\ln y-x\right)\frac{1}{x'}=y\Rightarrow 2x^2y\ln y-x=x'y\Rightarrow x'y+x=2x^2y\ln y.$$

Обе части полученного уравнения поделим на $y\neq 0$:

$$x'+\frac{x}{y}=2x^2\ln y\ -$$

это есть уравнение Бернулли относительно переменной x.

Решим его методом Бернулли, т.е. с помощью подстановки $x = u(y) \cdot v(y)$, $x' = u'(y) \cdot v(y) + u(y) \cdot v'(y)$. Получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{y} = 2u^2 \cdot v^2 \cdot \ln y \Rightarrow u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \frac{v}{y} \right) = 2u^2 \cdot v^2 \cdot \ln y .$$

Решим уравнение $v' + \frac{v}{y} = 0$ (найдем частное решение). Разделяем переменные, а затем интегрируем:

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{v}{y} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{y}\right| \Rightarrow v = \frac{1}{y}.$$

Найдем общее решение уравнения, где $v = \frac{1}{y}$:

$$u' \cdot y = 2u^2 \ln y \Rightarrow y\frac{du}{dy} = 2u^2 \ln y \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{2\ln y \cdot dy}{y} \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = 2\int \frac{\ln y \cdot dy}{y} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{u} = \ln^2 y + C \Rightarrow u = -\frac{1}{\ln^2 y + C}.$$

Следовательно, общее решение исходного ДУ примет вид:

$$x = uv = -\frac{1}{y\left(\ln^2 y + C\right)}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$1 = -\frac{1}{1 \cdot \left(\ln^2 1 + C\right)} \Rightarrow 1 = -\frac{1}{C} \Rightarrow C = -1.$$

Получаем частное решение:

$$x = -\frac{1}{y\left(\ln^2 y - 1\right)}.$$

Задания для самостоятельной работы

9.10. Решить линейные неоднородные ДУ:

а) $xy' - y = x^3$;

б) $x^2 y' = 2xy + 3$;

в) $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$;

г) $y' = 2x\left(x^2 + y\right)$;

д) $\left(1 + x^2\right)y' + y = \operatorname{arctg} x$;

е) $x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x$;

ж) $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$;

з) $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x$.

9.11. Решить линейные неоднородные ДУ относительно переменной x:

а) $y'\left(x+y^2\right)=y$; б) $\left(y^4+2x\right)y'=y$;

в) $x+x^2y'=xyy'$; г) $\left(xy+\sqrt{y}\right)dy+y^2dx=0$;

д) $\left(x\cos^2 y-y^2\right)y'=y\cos^2 y$; е) $2\left(\cos^2 y\cdot\cos 2y-x\right)y'=\sin 2y$;

ж) $2y^2dx+\left(x+e^{\frac{1}{y}}\right)dy=0$; з) $\left(2xy+3\right)dy-y^2dx=0$.

9.12. Решить уравнения Я. Бернулли:

а) $y'-\frac{y}{x-1}=\frac{y^2}{x-1}$; б) $2xy'-3y=-\left(5x^2+3\right)y^3$;

в) $4y'+x^3y=\left(x^3+8\right)e^{-2x}y^2$; г) $xy'+y=y^2\ln x$;

д) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$; е) $2\left(xy+\frac{dy}{dx}\right)=\left(x-1\right)e^x y^2$;

ж) $xy'-y=-y^2(\ln x+2)\ln x$; з) $2y'-3y\cos x=-e^{-3x}\left(2+3\cos x\right)y^{-2}$.

9.13. Решить задачу Коши для указанных ДУ:

а) $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\cos x,\ y(0)=1$; б) $\left(104y^3-x\right)y'=4y,\ y(1)=1$;

в) $y'+xy=\left(1+x\right)e^{-x}y^2,\ y(0)=1$; г) $3y'+2xy=2xe^{-2x^2}\cdot y^{-2},\ y(0)=-1$;

д) $2\left(4y^2+4y-x\right)y'=1,\ y(0)=0$; е) $y'-\frac{y}{x}=-2\frac{\ln x}{x},\ y(1)=1$;

ж) $y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{2x^2}{1+x^2},\ y(0)=\frac{2}{3}$; з) $y'-3x^2y=\frac{1}{3}x^2\left(1+x^3\right),\ y(0)=0$.

Ответы

9.10. а) $y = x\ (\frac{x^2}{2}+C)$; б) $y=Cx^2-\frac{1}{x}$; в) $y=\frac{\frac{2}{3}\cdot x^2+C}{e^{x^2}}$; г) $y=Ce^x-x-1$;

д) $y=arctgx-1+Ce^{-arctgx}$; е) $y=x(C-\cos x)$; ж) $y=\ln x\cdot\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$;

з) $y=\arcsin x-1+Ce^{-arctgx}$. **9. 11.** а) $x=y(\ln y+C)$;б) $x=\frac{y^4}{2}+Cy^2$; в) $x=y-1+Ce^{-y}$;

г) $x=\frac{C}{y}-\frac{2}{\sqrt{y}}$; д) $x=(C-tgy)y$; е) $x=\cos^2 y+\frac{C}{tgy}$; ж) $x=e^{\frac{1}{y}}+Ce^{\frac{1}{2y}}$; з) $x=Cy^2-\frac{1}{y}$.

9.12. б) $y=\pm\sqrt{\dfrac{4x^3}{5x^4+4x^3+4C}}$; в) $y=\dfrac{1}{e^{-2x}+Ce^{\frac{x^4}{16}}}$; г) $y=\dfrac{1}{\ln x+1+Cx}$;

д) $y=\left(tgx+\dfrac{\ln(\cos x)}{x}+\dfrac{C}{x}\right)^2$; е) $y=\dfrac{1}{\frac{1}{2}e^x+Ce^{\frac{x^2}{2}}}$; ж) $y=\dfrac{1}{\ln^2 x+\dfrac{C}{x}}$; з) $y=\sqrt[3]{e^{-3x}+Ce^{\frac{9}{2}\sin x}}$.

9.13. а) $y=\dfrac{1}{2}(1+e^{-\sin x})$; б) $x = 8y^3 - 7y^{-\frac{1}{4}}$; в) $y = e^x$; г) $y=-e^{-\frac{2}{3}x^2}$; д) $x=4y^2$;

е) $y=2\ln x+2-x$; ж) $y=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; з) $y=-\dfrac{1}{9}x^3+\dfrac{8}{9}-\dfrac{8}{9}e^{x^3}$.

9.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Краткие теоретические сведения

Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Уравнение вида:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y).$$

В этом случае ДУ (1) можно записать в виде $du(x,y)=0$, а его общий интеграл имеет вид:

$$u(x,y)=C. \qquad (2)$$

Искомая функция $u(x,y)$ должна удовлетворять требованиям

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y). \qquad (3)$$

Теорема. Для того чтобы левая часть уравнения (1), где функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные производные $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в области D, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \qquad (4)$$

Таким образом, при решении ДУ вида (1) сначала проверяют выполнение условия (4). Затем, используя равенства (3), находят функцию $u(x,y)$. Решение записывают в виде (2).

Также общий интеграл уравнения (1) можно найти с помощью одной из следующих формул:

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C, \quad (5)$$

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C, \quad (6)$$

где $M_0(x_0; y_0) \in D$.

Интегрирующий множитель

Если условие (4) не выполняются, то ДУ (5.1) не является уравнением в полных дифференциалах.

Такое уравнение иногда можно свести к ДУ в полных дифференциалах умножением его на некоторую функцию $\mu(x, y)$, которая называется *интегрирующим множителем*.

Если у данного уравнения существует интегрирующий множитель, зависящий только от x, то он находится по формуле:

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx},$$

где отношение $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ должно являться функцией только от x. Аналогично, интегрирующий множитель, зависящий только от y, определяется по формуле:

$$\mu = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dy},$$

где отношение $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ должно являться функцией только от y (отсутствие в этих отношениях в первом случае y, а во втором x является признаком существования интегрирующего множителя рассматриваемого вида).

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения в полных дифференциалах

$$\left(y + e^x \sin y\right)dx + \left(x + e^x \cos y\right)dy = 0.$$

Решение. Здесь $P(x, y) = y + e^x \sin y, \quad Q(x, y) = x + e^x \cos y$. Так как $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1 + e^x \cos y$ и $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 1 + e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, то вы-

ражение $\left(y+e^x\sin y\right)dx+\left(x+e^x\cos y\right)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$. При этом $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывные функции. Тогда 1) $\frac{\partial u}{\partial x}=1+e^x\sin y$ и 2) $\frac{\partial u}{\partial y}=1+e^x\cos y$.

Найдем функцию $u(x,y)$, интегрируя по x левую и правую части равенства 1, получим:

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)=\int\left(1+e^x\sin y\right)dx+C(y)=x+e^x\sin y+C(y).$$

Чтобы найти $C(y)$, продифференцируем последнее выражение по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+e^x\cos y+C'(y).$$

Учитывая равенство 2, запишем уравнение

$$x+e^x\cos y=x+e^x\cos y+C'(y),$$

откуда находим:

$$C'(y)=0\Rightarrow\frac{dC}{dy}=0\Rightarrow C(y)=C_1.$$

Подставляя найденное $C(y)$ в выражение для функции $u(x,y)$, получаем:

$$u(x,y)=x+e^x\sin y+C_1.$$

Таким образом, общий интеграл уравнения имеет вид:

$$x+e^x\sin y+C_1=C_2\Rightarrow x+e^x\sin y=C,\ C=C_2-C_1.$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения $ydx-xdy+\ln xdx=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=-3$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде:

$$\left(\ln x+y\right)dx-xdy=0.$$

Имеем:

$$P(x,y)=y+\ln x,\ Q(x,y)=-x,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-1\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Значит, данное уравнение не является ДУ в полных дифференциалах. Используем интегрирующий множитель. Запишем отношение

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{1-(-1)}{-x}=-\frac{2}{x}.$$

Поэтому данное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x. Найдем этот интегрирующий множитель:

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx} = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}.$$

Умножим исходное уравнение на $\frac{1}{x^2}$, получим уравнение:

$$\frac{\ln x + y}{x^2}dx - \frac{x}{x^2}dy = 0 \Rightarrow \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0,$$

которое, как нетрудно убедиться, уже является ДУ в полных дифференциалах. Действительно, имеем $P_1(x,y) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{y}{x^2}, Q_1(x,y) = -\frac{1}{x}$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{1}{x^2}, \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

Следовательно, левая часть полученного уравнения имеет вид $du(x,y)$. Таким образом, 1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{y}{x^2}$ и 2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x}$.

Интегрируя первое из этих равенств по x, находим:

$$u = \int \frac{\ln x}{x^2}dx + y\int \frac{dx}{x^2} + C(y) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - \frac{y}{x} + C(y).$$

При вычислении интеграла $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ использовали метод интегрирования по частям:

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \begin{bmatrix} \ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ \frac{dx}{x^2} = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Найдем производную по y от полученной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x} + C'(y).$$

Применяем равенство 2, получаем:

$$-\frac{1}{x} + C'(y) = -\frac{1}{x} \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C_1.$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид:

$$-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - \frac{y}{x} = C.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, т.е. подставим в общий интеграл $y = -3, x = 1$, получим:

$$-\frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{3}{1} = C \Rightarrow C = 2.$$

Получаем частное решение

$$-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-\frac{y}{x}=2.$$

Задания для самостоятельной работы

9.14. Найти общий интеграл ДУ:

а) $3x^2e^y dx+\left(x^3e^y-1\right)dy=0$;

б) $ye^x dx+\left(e^x+y\right)dy=0$;

в) $\left(xy+\sin y\right)dx+\left(0,5x^2+x\cos y\right)dy=0$;

г) $\left(\ln y-5y^2\sin 5x\right)dx+\left(\frac{x}{y}+2y\cos 5x\right)dy=0$;

д) $\left(2xye^{x^2}+\ln y\right)dx+\left(e^{x^2}+\frac{x}{y}\right)dy=0$;

е) $\left[\sin 2x-2\cos\left(x+y\right)\right]dx-2\cos\left(x+y\right)dy=0$;

ж) $\left(2xy+\arcsin x\right)dx+\left(\operatorname{arctg} y+x^2+1\right)dy=0$;

з) $\left(y^2+\frac{y}{\cos^2 x}\right)dx+\left(2xy+\operatorname{tg} x\right)dy=0$.

9.15. Найти общий интеграл ДУ, используя интегрирующий множитель:

а) $\left(x^2\cos x-y\right)dx+xdy=0$;

б) $ydx-\left(x+y^2\right)dy=0$;

в) $y\sqrt{1-y^2}dx+\left(x\sqrt{1-y^2}+y\right)dy=0$;

г) $\left(xy-x^2\right)y'+y^2-3xy-2x^2=0$;

д) $xy'+\left(\sin y-3x^2\cos y\right)\cdot\cos y=0$;

е) $\left(\ln y+2x-1\right)y'=2y$;

ж) $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0$;

з) $2xydx+\left(y^2-3x^2\right)dy=0$.

9.16. Решить задачу Коши для данных ДУ:

а) $\frac{x}{x^2+y^2}dx+\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dy=0,\ y\left(0\right)=1$;

б) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0,\ y(1) = 1;$

в) $3x^2e^y + \left(x^3e^y - 1\right)y' = 0,\ y(0) = 1;$

г) $\frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2} = 0,\ y(1) = 0;$

д) $e^{-y}dx + \left(2y - xe^{-y}\right)dy = 0,\ y(-3) = 0;$

е) $xdx + ydy = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2},\ y(1) = 1;$

ж) $x + ye^x + \left(y + e^x\right)y' = 0,\ y(0) = 4;$

з) $x^2 - y + \left(x^2y^2 + x\right)y' = 0,\ y(5) = 0.$

9.17. Решить ДУ различных типов, найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям там, где необходимо:

а) $\sqrt{x^2 - 4x + 8}y' - \sqrt{16 - y^2} = 0;$

б) $\left(y^3 + \cos x\right)dx + \left(3xy^2 + e^y\right)dy = 0;$

в) $\left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0;$

г) $y' - 3x^2y = \frac{x^2\left(1 + x^3\right)}{3},\ y(0) = 0;$

д) $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y;$

е) $3y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 10\frac{y}{x} + 10;$

ж) $\left(x\cos^2 y - y^2\right)y' = y\cos^2 y,\ y(\pi) = \frac{\pi}{4};$

з) $y' - (2x + 2)\sqrt{1 - y^2} = 0,\ y(0) = 1.$

Ответы

9.14. а) $x^3e^y - y = C$; б) $ye^x + \frac{y^2}{2} = C$; в) $\frac{1}{2}x^2y + x\sin y = C$; г) $\frac{x}{y} + 2y\cos 5x = C$; д) $ye^{x^2} + x\ln y = C$; е) $\frac{1}{2}\cos 2x + 2\sin(x + y) = C$; ж) $x^2y + x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + y\operatorname{arctg} y - -\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + y = C$; з) $.xy^2 + y\operatorname{tg} x = C.$

9.15. а) $\sin x + \frac{y}{x} = C$; б) $\frac{x}{y} - y = C$; в) $xy - \sqrt{1 - y^2} = C$; г) $\frac{x^2y^2}{2} - x^3y - \frac{x^4}{2} = C$; д) $x\operatorname{tg} y - x^3 = C$; е) $\frac{2x}{y} + \frac{\ln y}{y} = C$; ж) $x - \frac{y^2}{x} = C$; з) $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$

9.16. а) $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-y+1=0$; б) $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$; в) $x^3e^y-y+1=0$;

г) $\ln(x+y)-\frac{y}{x+y}=C$; д) $xe^{-y}+y^2+3=0$; е) $x^2+y^2-\ln(x^2+y^2)=2-\ln 2$;

ж) $\frac{x^2}{2}+ye^x+\frac{y^2}{2}=12$; з) $x+\frac{y}{x}+\frac{y^3}{3}=5$. **9.17.** а) $y=4\sin\ln\left|C\left(x-2+\sqrt{(x-2)^2+4}\right)\right|$;

б) $xy^3+\sin x+e^y=C$; в) $x^3+\sin\frac{2x}{y}=C$; г) $y=\frac{1}{9}\left(2e^{x^3}-x^3-2\right)$;

д) $y+\sqrt{2x^2+y^2}=Cxe^{4x}$; е) $\frac{2}{\sqrt{315}}arctg\frac{\frac{2y}{x}+7}{\sqrt{315}}=\ln\left(C\cdot\sqrt[3]{x}\right)$; ж) $x+ytgy-5y=0$;

з) $y=\cos(x^2+2x)$.

9.6. Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков, допускающие понижение порядка

Краткие теоретические сведения

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является *метод понижения порядка*.

Рассмотрим некоторые типы уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка.

1. Пусть дано уравнение второго порядка:

$$y''=f(x). \qquad (1)$$

Порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования данного уравнения.

Так как $y''=\left(y'\right)'=\frac{dy'}{dx}$, то уравнение (1) можно записать в виде $dy'=f(x)dx$. Тогда $y'=\int f(x)dx=\varphi_1(x)+C_1$. Далее, интегрируя полученное уравнение по x, находим: $y=\int\left(\varphi_1(x)+C_1\right)dx=\varphi_2(x)+C_1x+C_2$ – общее решение данного уравнения.

Аналогично поступают в случае, если уравнение задается в виде:

$$y^{(n)}=f(x). \qquad (1^*)$$

Общее решение находят методом *n*-кратного интегрирования:

$$y=\varphi_n(x)+C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+C_n.$$

2. Рассмотрим уравнение:

$$y''=f(x,y'), \qquad (2)$$

явно не содержащее искомую функцию y.

Сделаем замену $y' = z(x)$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$ и уравнение (2) принимает вид $z' = f(x, z)$. Пусть $z = \varphi(x, C_1)$ – общее решение полученного ДУ первого порядка. Заменяем функцию $z = y'$, получаем ДУ $y' = \varphi(x, C_1)$. Для отыскания y достаточно проинтегрировать последнее ДУ, тогда общее решение ДУ (2) будет иметь вид $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$.

ДУ *n*-го порядка вида:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (2^*)$$

которое не содержит явно искомой функции сводится к уравнению $(n-k)$-го порядка с помощью подстановки $y^{(k)} = z(x)$, учитывая, что $y^{(k+1)} = z', ..., y^{(n)} = z^{(n-k)}$. Получаем уравнение:

$$F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$$

Если удастся отыскать общее решение последнего уравнения в виде $z = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$, получим дифференциальное уравнение

$$z = y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

вида (1*), решение которого находят *k*-кратным интегрированием.

3. Рассмотрим ДУ второго порядка, явно не содержащее независимую переменную x:

$$y'' = f(y, y'). \qquad (3)$$

В этом случае порядок можно понизить с помощью новой функции $z = z(y)$, зависящую от переменной y, полагая $y' = z$. Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z,$$

так как $z = z(y(x))$. Таким образом, $y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$, тогда уравнение (3) запишется в виде $\frac{dz}{dy} z = f(y, z)$. Пусть $z = \varphi(y, C_1)$ – общее решение этого ДУ первого порядка. Заменяя функцию $z(y)$ на y', получаем $y' = \varphi(y, C_1)$ – ДУ с разделяющимися переменными. Интегрируя его, получаем общий интеграл уравнения (3):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

При решении уравнения

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (3^*)$$

поступаем аналогично. Его порядок всегда можно понизить на единицу с помощью подстановки $y' = z$, где $z = z(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим $y'' = \dfrac{dz}{dy} \cdot z$, затем

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(z \cdot z'_y\right) = \frac{d}{dy}\left(z \cdot z'_y\right) \cdot \frac{dy}{dx} = z\left(\left(z'\right)^2 + z \cdot z''_{yy}\right) \text{ и т.д.}$$

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Решить уравнение $y^{IV} = \cos 2x + x^2$.

Решение. Это уравнение вида (6.1*). Последовательно интегрируя четыре раза данное уравнение, получим:

$$y''' = \int \cos 2x dx + \int x^2 dx = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}x^3 + C_1,$$

$$y'' = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \frac{1}{3}\int x^3 dx + C_1 \int dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{12}x^4 + C_1 x + C_2,$$

$$y' = -\frac{1}{4}\int \cos 2x dx + \frac{1}{12}\int x^4 dx + C_1 \int x dx + C_2 \int dx = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{60}x^5 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$y' = -\frac{1}{8}\int \sin 2x dx + \frac{1}{60}\int x^5 dx + \frac{C_1}{2}\int x^2 dx + C_2 \int x dx + C_3 \int dx = \frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{360}x^6 +$$

$$+ \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4.$$

Пример 2. Решить ДУ $y'' + \dfrac{1}{x-1}y' = 0$.

Решение. Данное уравнение есть неполное ДУ второго порядка, в нем явно отсутствует y.

Подстановкой $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$ сводим его к уравнению первого порядка $z' + \dfrac{1}{x-1}z = 0$ – ДУ с разделяющимися переменными.

$$z' = -\frac{1}{x-1}z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x-1} \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x-1} \Rightarrow \ln|z| = \ln\left|\frac{C_1}{x-1}\right| \Rightarrow z = \frac{C_1}{x-1}.$$

Так как $y' = z(x)$, получаем еще одно ДУ первого порядка $y' = \dfrac{C_1}{x-1}$.

Интегрируем получившееся ДУ:

$$\int dy = \int \frac{C_1}{x-1}dx \Rightarrow y = C_1 \ln|x-1| + C_2.$$

Пример 3. Найти общее решение ДУ третьего порядка

$$y''' \operatorname{ctg} x + y'' = 3.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением 2-го типа (2), где $n=3, k=2$. Вводим новую функцию $y''=z$ и получаем из исходного уравнения линейное уравнение $z'\operatorname{ctg}x+z=3$, которое записываем в виде

$$z'+z\operatorname{tg}x=3\operatorname{tg}x.$$

Для его решения воспользуемся формулой (5) из п. 9.4, получаем:

$$z=\left(3\int \operatorname{tg}x\cdot e^{\int \operatorname{tg}x\cdot dx}\cdot dx+C_1\right)\cdot=\left(3\int \operatorname{tg}x\cdot e^{-\ln|\cos x|}\cdot dx+C_1\right)\cdot e^{\ln|\cos x|}=$$

$$=\left(3\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot dx+C_1\right)\cdot\cos x=\left(\frac{3}{\cos x}+C_1\right)\cos x=3+C_1\cos x.$$

Так как $y''=z$, то приходим к новому ДУ, решение которого находится с помощью двукратного интегрирования:

$$y''=3+C_1\cos x\Rightarrow y'=3x+C_1\int\cos x dx=3x+C_1\sin x+C_2\Rightarrow$$

$$y=\frac{3}{2}x^2-C_1\cos x+C_2x+C_3.$$

Пример 4. Найти частное решение ДУ $y\cdot y''-\left(y'\right)^2=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1, y'(0)=2$.

Решение. Данное ДУ относится к 3-му типу, в нем явно отсутствует переменная x.

Воспользуемся подстановкой $y'=z$, где $z=z(y)$, тогда $y''=z'\cdot z$:

$$y\cdot z'\cdot z-z^2=0\Rightarrow z\left(y\cdot z'-z\right)=0.$$

1) $z=0, y'=0, y=C$. Если $y(0)=1$, то $C=1\Rightarrow y=1$.

2) $y\cdot z'-z=0\Rightarrow y\dfrac{dz}{dy}=z\Rightarrow\dfrac{dz}{z}=\dfrac{dy}{y}\Rightarrow z=C_1y$.

Учитывая, что $y'=z$, получаем $y'=C_1y$ – уравнение первого порядка

$$y'=C_1y\Rightarrow\frac{dy}{dx}=C_1y\Rightarrow\frac{dy}{y}=C_1dx\Rightarrow\ln|y|=C_1x+\ln|C_2|\Rightarrow y=C_2e^{C_1x}$$ –

общее решение. Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1, y'(0)=2$. Найдем y': $y=C_1C_2e^{C_1x}$. Подставим в выражения для y' и y' значения $x=0, y=1, y'=2$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}C_2e^{C_1\cdot 0}=1,\\ C_1\cdot C_2e^{C_1\cdot 0}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=1,\\ C_1\cdot C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=1,\\ C_1=2.\end{cases}$$

Следовательно, данное уравнение имеет два частных решения:

$$y=e^{2x}\ \text{и}\ y=1.$$

Пример 5. Найти общее решение ДУ третьего порядка

$$y'''=\frac{\left(y''\right)^2}{y'}.$$

Решение. Имеем уравнение вида (6.3*). Введем новую функцию $y' = z$, где $z = z(y)$. Тогда

$$y'' = z' \cdot z \Rightarrow y''' = z'' \cdot y' \cdot z + z' \cdot z' \cdot y' = z'' \cdot z^2 + (z')^2 \cdot z = z \cdot \left(z'' \cdot z + (z')^2 \right).$$

После подстановки получаем уравнение:

$$z \cdot \left(z'' \cdot z + (z')^2 \right) - \frac{(z')^2 \cdot z^2}{z} = 0 .$$

Преобразуем получившееся уравнение:

$$z'' \cdot z^2 + (z')^2 \cdot z - (z')^2 \cdot z = 0,$$

$$z'' \cdot z^2 = 0 .$$

1) $z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$.

2) $z'' = 0 \Rightarrow z' = C_1 \Rightarrow z = C_1 y + C_2$. Сделаем обратную замену $y' = z$, получаем:

$$y' = C_1 y + C_2 \Rightarrow \frac{dy}{C_1 y + C_2} = dx \Rightarrow \frac{1}{C_1} \ln \left| C_1 y + C_2 \right| = x + C_3 .$$

Задания для самостоятельной работы

9.18. Найти общее решение ДУ:

а) $y^{IV} = \cos^2 x$;

б) $y''' = x + \cos 5x$;

в) $y''' = x \sin x$;

г) $y'' = \frac{\ln x}{x^2}$;

д) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$;

е) $y''' = x^2 \cos x$;

ж) $y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$;

з) $y^{IV} = \sin^2 x$.

9.19. Найти общее решение ДУ:

а) $\left(1 - x^2\right) y'' - xy' = 2$;

б) $\left(1 + x^2\right) y'' + 1 + (y')^2 = 0$;

в) $y'' = -\frac{x}{y'}$;

г) $xy'' + y' = 0$;

д) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$;

е) $\left(1 + x^2\right) y'' + 2xy' = x^3$;

ж) $xy'' = x^2 e^x + y'$;

з) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

9.20. Найти общее решение ДУ:

а) $yy'' = y^2 y' + (y')^2$;

б) $yy'' - y'(1 + y') = 0$;

в) $y'' + \frac{2(y')^2}{1 - y} = 0$;

г) $yy'' = (y')^2$;

д) $y'' tgy = 2(y')^2$;

е) $y''(2y + 3) - (y')^2 = 0$.

9.21. Решить задачу Коши:

а) $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x(x-1),\ y(2)=1,\ y'(2)=-1;$

б) $1+(y')^2=2yy'',\ y(1)=1,\ y'(1)=1;$

в) $2(y')^2=(y-1)y'',\ y(0)=0,\ y'(0)=1;$

г) $y^3y''+1=0, y(1)=1,\ y'(1)=0;$

д) $2y(y')^3+y''=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=-3;$

е) $(y''x-y')y'=x^3,\ y(1)=1,\ y'(1)=0;$

ж) $y'''=2(y''-1)ctgx,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\ y''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3;$

з) $xy'''-y''=x^2+1,\ y(-1)=0,\ y'(-1)=1,\ y''(-1)=0.$

Ответы

9.18. а) $y=\dfrac{x^4}{48}+\dfrac{1}{32}\cos 2x+\dfrac{C_1x^3}{6}+\dfrac{C_2x^2}{2}+C_3x+C_4;$

б) $y=\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{1}{125}\cos 5x+\dfrac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3;$ в) $y=x\cos x-3\sin x+\dfrac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3;$

г) $y=-\dfrac{1}{2}\ln^2 x-\ln x+C_1x+C_2;$ д) $y=\ln|\sin x|+\dfrac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3;$

е) $y=-x^2\sin x-6x\cos x+12\sin x+\dfrac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3;$ ж) $y=\dfrac{\sin^3 x}{3}+C_1x+C_2;$

з) $y=\dfrac{x^4}{48}+\dfrac{1}{32}\cos 2x+\dfrac{C_1x^3}{6}+\dfrac{C_2x^2}{2}+C_3x+C_4.$ **9.19.** а) $y=\arcsin^2 x+C_1\arcsin x+C_2;$

б) $\left(1+\dfrac{1}{C_1^2}\right)\ln|C_1x+1|-\dfrac{1}{C_1}x+C_2;$ в) $y=\pm\dfrac{1}{2}\left(C_1\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{C_1}}+x\sqrt{C_1-x^2}+C_2\right);$

г) $y=C_1\ln x+C_2;$ з) $y=-x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C_1\sin x+C_2$. **9.20.** а) $y=C$ и $y=(y+C_1)e^{C_1(x+C_2)};$

б) $y=C$ и $y=\dfrac{1}{C_1}\left(e^{C_1(x+C_2)}+1\right);$ в) $y=C$ и $y=\dfrac{C_1x+C_2-1}{C_1x+C_2};$

г) $y=C$ и $y=C_1e^{C_2x};$ д) $y=arcctg(C_1x+C_2)$ и $y=C;$ е) $y=C$ и $y=C_1e^{C_2x}-\dfrac{3}{2}.$

9.21. а) $y=\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{3};$ б) $2y-x^2=1;$ в) $y=\dfrac{x}{x+1};$ г) $y^2-2x+x^2=0;$

д) $y^3-y-3x=0;$ е) $y=-xe^{-x}-3e^{-x}+\dfrac{3}{2}x^2+3;$

ж) $y=\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\left(1-\dfrac{3}{4}\pi\right)x+\dfrac{(3\pi-8)\pi}{32};$ з) $y=\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{3}{4}.$

9.7. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Краткие теоретические сведения

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУ) называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ – некоторые действительные числа.

Дифференциальному уравнению (7.1) ставится в соответствие *характеристическое уравнение*, т.е. алгебраическое уравнение *n*-го порядка вида:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (2)$$

Для его составления достаточно в уравнении (1) заменить $y^{(n)} = k^n$, $y^{(n-1)} = k^{n-1}, ..., y'' = k^2$, $y' = k$, $y = 1$.

Как известно, уравнение (2) имеет *n* корней. Обозначим их через $k_1, k_2, ..., k_n$.

Общее решение дифференциального уравнения (1) строится в зависимости от характера корней уравнения (2):

1) каждому действительному простому корню k в общем решении соответствует слагаемое вида $C \cdot e^{kx}$, т.е. если все корни уравнения $k_1, k_2, ..., k_n$ действительны и попарно различны, то общее решение уравнения (7.1) записывается в виде:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + ... + C_n e^{k_n x}; \qquad (3)$$

2) каждому действительному корню кратности r в общем решении соответствует слагаемое вида:

$$\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + ... + C_r x^{r-1}\right) e^{kx}; \qquad (4)$$

3) каждой паре комплексных сопряженных простых корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ в общем решении соответствует слагаемое вида:

$$e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right); \qquad (5)$$

4) каждой паре комплексных сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ кратности r в общем решении соответствует слагаемое вида:

$$e^{\alpha x}\left[\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + ... + C_r x^{r-1}\right)\cos \beta x + \left(\widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2 x + \widetilde{C}_3 x^2 + ... + \widetilde{C}_r x^{r-1}\right)\sin \beta x\right].$$

Если в уравнении (1) $n = 2$, то получаем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (6)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (7)$$

При его решении возможны три случая:

1*) если $D=\frac{p^2}{4}-q>0$, то $k_1\neq k_2$, и общее решение уравнения (6) имеет вид:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x};$$

2*) если $D=\frac{p^2}{4}-q=0$, то $k_1=k_2=k$, т.е. уравнение (7) имеет один корень кратности $r=2$. Тогда общее решение уравнения (6) имеет вид:

$$y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx};$$

3*) если $D=\frac{p^2}{4}-q<0$, то характеристическое уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, где $\alpha=-\frac{p}{2},\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, и общее решение уравнения (6) имеет вид:

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти общее решение для следующих однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

а) $y''-5y'+4y=0$; б) $4y''+4y'+y=0$; в) $y''-6y'+18y=0$.

Решение.

а) Характеристическое уравнение $k^2-5k+4=0$ имеет различные корни: $k_1=1,k_2=4$, поэтому общее решение ДУ имеет вид:

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{4x}.$$

б) В данном случае характеристическое уравнение $4k^2+4k+1=0$ имеет один корень кратности 2 $\left(k_1=-\frac{1}{2}\right)$, следовательно, искомое общее решение есть

$$y=C_1e^{-\frac{x}{2}}+C_2xe^{-\frac{x}{2}}.$$

в) Характеристическое уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2}=3\pm3i$, следовательно, $\alpha=3,\beta=3$. Поэтому общее решение имеет вид:

$$C_1e^{3x}\cos3x+C_2e^{3x}\sin3x.$$

Пример 2. Найти общее решение для следующих однородных линейных дифференциальных уравнений высших порядков:

а) $y^{IV}-2y'''+y''=0$; б) $y^{V}-81y'=0$.

Решение.

а) Составляем характеристическое уравнение для данного ДУ и находим его корни: $k^4-2k^3+k^2=0\Rightarrow k^2\left(k^2-2k+1\right)=0\Rightarrow k^2\left(k-1\right)^2=0$. Получаем два корня кратности 2: $k_1=0, k_2=1$.

На основании формулы (7.4) общее решение исходного уравнения имеет вид: $y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x$.

б) Характеристическое уравнение для данного ДУ имеет вид:

$$k^5-81k=0.$$

Находим его корни:

$$k^5-81k=k\left(k^4-81\right)=k\left(k^2-9\right)\left(k^2+9\right)=k\left(k-3\right)\left(k+3\right)\left(k^2+9\right)\Rightarrow$$

$$k_1=0, k_2=3, k_3=-3, k_{4,5}=\pm 3i.$$

Получили пять простых корней: три действительных и два комплексно-сопряженных $\left(\alpha=0,\beta=9\right)$. С учетом формул (7.3.) и (7.5.) общее решение исходного ДУ имеет вид:

$$y=C_1+C_2e^{3x}+C_3e^{-3x}+C_4\cos 3x+C_5\sin 3x.$$

Задания для самостоятельной работы

9.22. Найти общее решение линейных однородных ДУ второго порядка:

а) $y''+25y=0$;
б) $y''-y'=0$;
в) $y''-4y'+4y=0$;
г) $y''-16y=0$;
д) $y''+6y'+13y=0$;
е) $y''-2y'+2y=0$;
ж) $4y''-8y'+5y=0$;
з) $y''+64y=0$.

9.23. Найти общее решение линейных однородных ДУ высших порядков:

а) $y'''-2y''+9y'-18y=0$;
б) $y^{IV}-8y''+7y=0$;
в) $y^{IV}-a^4y=0$;
г) $y'''+8y=0$;
д) $y'''+3y''+3y'+y=0$;
е) $y^{IV}-6y''+9y=0$;
ж) $y^{IV}+5y''+4y=0$;
з) $y'''-13y''+12y'=0$.

9.24. Найти частное решение для ДУ:

а) $y''+5y'+6y=0, y\left(0\right)=1, y'\left(0\right)=-6$;
б) $y''-10y'+25y=0, y\left(0\right)=0, y'\left(0\right)=1$;
в) $y''-2y'+10y=0, y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0, y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{\pi}{6}}$;
г) $9y''+y=0, y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=2, y'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$;

д) $y''+4y'+29y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=15$; е) $y''+3y'=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$;

ж) $y''+9y=0,\ y(0)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$; з) $y''+y=0,\ y(0)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Ответы

9.22. а) $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$; б) $y=C_1+C_2e^x$; в) $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$;
г) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}$; д) $y=C_1e^{-3x}\cos 2x+C_2e^{-3x}\sin 2x$; е) $y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$;
ж) $y=C_1e^x\cos\frac{x}{2}+C_2e^x\sin\frac{x}{2}$; з) $y=C_1\cos 8x+C_2\sin 8x$.

9.23. а) $y=C_1e^{2x}+C_2\cos 3x+C_3\sin 3x$; б) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{\sqrt{7}x}+C_4e^{-\sqrt{7}x}$;
в) $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$; г) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}\cos 8x+C_3e^{4x}\sin 8x$;
д) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3x^2e^{-x}$; е) $y=C_1e^{\sqrt{3}x}+C_2xe^{\sqrt{3}x}+C_3e^{-\sqrt{3}x}+C_4e^{-\sqrt{3}x}$;
ж) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$; з) $y=C_1+C_2e^{12x}+C_3e^x$.

9.24. а) $y=-3e^{-2x}+4e^{-3x}$; б) $y=xe^{5x}$; в) $y=-\frac{1}{3}e^x\cos 3x$; г) $y=2\sin\frac{x}{3}$;
д) $y=3e^{-2x}\sin 5x$; е) $y=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}e^{-3x}$; ж) $y=-\frac{\sqrt{2}}{3}\sin 3x$; з) $y=\cos x+\sqrt{3}\sin x$.

9.8. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами второго и более высоких порядков

Краткие теоретические сведения

Определение. Уравнение вида:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),\quad(1)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – некоторые действительные числа, а $f(x)$ – непрерывная функция, называется *линейным неоднородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами (ЛНДУ)*.

Если $n=2$, то получаем ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y''+py'+qy=f(x),\qquad(1^*)$$

где p и q – вещественные числа.

Рассмотрим два метода решения ЛНДУ: метод вариации произвольных постоянных (или метод Лагранжа) и метод неопределенных коэффициентов.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка (1*). Пусть найдено общее решение соответствующего ЛОДУ, и оно имеет вид:

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).\qquad(2)$$

Тогда общее решение исходного уравнения (1*) имеет вид (2), где C_1 и C_2 – функции переменной x ($C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$), т.е.

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \qquad (3)$$

Эти функции могут быть найдены в результате решения системы:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases} \qquad (3*)$$

и последующего интегрирования функций $C_1'(x), C_2'(x)$.

Если общее решение ЛОДУ *n*-го порядка представляет собой функцию:

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x),$$

то общее решение ЛНДУ *n*-го порядка находится в виде

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Тогда система уравнений для нахождения неизвестных $C_i(x)$ имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) + ... + C_n'(x) \cdot y_n(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) + ... + C_n'(x) \cdot y_n'(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1''(x) + C_2'(x) \cdot y_2''(x) + ... + C_n'(x) \cdot y_n''(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x) \cdot y_2^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

<u>*Метод неопределенных коэффициентов*</u>

Метод неопределенных коэффициентов основан на том, что *общее решение уравнений (1) и (1*) представляет собой сумму общего решения* y_{oo} *соответствующего однородного уравнения и частного решения* $y_{чн}$ *неоднородного уравнения, т.е.*

$$y_{он} = y_{oo} + y_{чн}.$$

Нахождение общего решения однородного уравнения рассмотрено в п. 9.7.

Метод неопределенных коэффициентов применяется для нахождения частного решения ЛНДУ с правой частью специального вида:

$$f(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right), \qquad (4)$$

где a, b – некоторые действительные числа; $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены от переменной x степеней n и m соответственно.

Суть рассматриваемого метода состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ ЛНДУ с постоянными коэффициентами записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в уравнение и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Обозначим через k_f комплексное число, ассоциированное с неоднородностью вида (8.4):

$$k_f = a + bi\,.$$

Пусть $r = r(k_f)$ – кратность числа k_f как корня характеристического уравнения (7) из п. 9.7 решаемого однородного уравнения (6) из п 9.7. Тогда частное решение $y_{чн}$ (ожидаемая форма) уравнения (1*) может быть найдено по формуле:

$$y_{чн} = x^r e^{ax}\left(R_l(x)\cos bx + S_l(x)\sin bx\right), \qquad (5)$$

где $R_l(x), S_l(x)$ – многочлены, степень l которых равна наибольшей из степеней n и m многочленов $P_n(x), Q_m(x)$ из формулы (8.4).

Замечание. Напомним, что многочлен степени n записывают в виде: при $n=0$: A; при $n=1$: $Ax+B$; при $n=2$: Ax^2+Bx+C; при $n=3$: Ax^3+Bx^2+Cx+D и т.д.

Для подбора частного решения неоднородного уравнения по виду правой части $f(x)$ и корней характеристического уравнения удобно пользоваться следующей таблицей, которая рассматривает отдельные случаи вида правой части, т.е. если формула (8) присутствует не полностью (см. табл.).

Таблица

Определение вида частного решения дифференциального уравнения

Правая часть дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$f(x) = P_n(x)$	а) Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн} = R_l(x),$ $l = n$
	б) Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн} = x^r \cdot R_l(x),$ $l = n$
$f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$	а) Число a не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн} = e^{ax} \cdot R_l(x),$ $l = n$
	б) Число a является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн} = e^{ax} \cdot x^r \cdot R_l(x),$ $l = n$
$f(x) = P_n(x)\cos bx +$ $+Q_m(x)\sin bx$	а) Число bi не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн} = R_l(x)\cos bx +$ $+S_l(x)\sin bx,$ $l = \max\{n;m\}$

	б) Число bi является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн} = x^r \left(R_l(x)\cos bx + +S_l(x)\sin bx\right),$ $l = \max\{n;m\}$
$f(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + +Q_m(x)\sin bx\right)$	а) Число $a+bi$ не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн} = e^{ax}\left(R_l(x)\cos bx + +S_l(x)\sin bx\right),$ $l = \max\{n;m\}$
	б) Число $a+bi$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн} = x^r e^{ax}\left(R_l(x)\cos bx + +S_l(x)\sin bx\right),$ $l = \max\{n;m\}$

Замечание 1. В таблице $P_n(x), Q_m(x), R_l(x)-$ многочлены $n-$ой, $m-$ой, $l-$ой степени соответственно

Замечание 2. Если неоднородность $f(x)$ исходного уравнения (1*) имеет вид:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_s(x),$$

и $y_{чн_i} = y_{чн_i}(x)$ – частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_i(x),$$

где $i = 1,2,...,s$, то

$$y_{чн} = y_{чн_1} + y_{чн_2} + ... + y_{чн_s} -$$

частное решение уравнения (1*).

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Решить ЛНДУ с постоянными коэффициентами

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

Решение. В данном уравнении правая часть не является функцией вида (4). Поэтому метод неопределенных коэффициентов здесь не подходит. Воспользуемся методом вариации.

Для начала запишем однородное ДУ, составим соответствующее для него характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$y'' + y = 0 \Rightarrow k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i.$$

Следовательно, общее решение однородного ДУ имеет вид

$$y_{оо} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Тогда общее решение ЛНДУ будем искать в виде

$$y_{он} = C_1(x)\cdot\cos x + C_2(x)\cdot\sin x.$$

Составим систему уравнений (4)

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера. Найдем определители второго порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1;\ \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \operatorname{tg} x & \cos x\end{vmatrix}=-\frac{\sin^2 x}{\cos x};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \operatorname{tg} x\end{vmatrix}=\sin x.$$

Найдем неизвестные:

$$C_1'=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{\sin^2 x}{\cos x};\ C_2'=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\sin x.$$

Откуда

$$C_1=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\sin x-\ln\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C_3;\ C_2=\int\sin x dx=-\cos x+C_4.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y_{он}=\left(\sin x-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C_3\right)\cdot\cos x+\left(C_4-\cos x\right)\cdot\sin x.$$

Так как константы C_1 и C_2 в получившемся решении не встречаются, то константы C_3 и C_4 можно перенумеровать $C_3=C_1, C_4=C_2$. Тогда решение примет вид:

$$y_{он}=C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Пример 2. Записать вид частного решения уравнения

$$y''-2y'+y=f(x),$$

где а) $f(x)=x^2+1$; б) $f(x)=e^x$; в) $f(x)=e^x\left(3x-2\right)$; г) $f(x)=5\sin 2x$;

д) $f(x)=e^{3x}\left[\left(x^2+1\right)\cos 2x+9\sin 2x\right]$.

Решение. Запишем ЛОДУ, составим для него характеристическое уравнение и найдем его корни: $y''-2y'+y=0\Rightarrow k^2-2k+1=0\Rightarrow k_{1,2}=1$.

а) $f(x)=x^2+1$. Сравниваем данную функцию с формулой (4), делаем вывод, что $a=0, b=0$. Так как число $k_f=0+0\cdot i=0$ не является корнем характеристического уравнения ЛОДУ, следовательно, его кратность равна нулю, т.е. $r=0$. Так как $P_n(x)=x^2+1$ и можно полагать, что $Q_m(x)=1$, то $R_m(x)=Ax^2+Dx+C$. Подставляя все найденное в формулу (5), получаем, что частное решение запишется в виде:

$$y_{чн}=Ax^2+Dx+C.$$

б) $f(x)=e^x$. Воспользуемся таблицей, имеем второй случай, когда правая часть имеет вид:

$$f(x)=e^{ax}\cdot P_n(x),$$

где $P_n(x)=1$. Число $a=1$ является корнем кратности 2 характеристического уравнения. Тогда частное решение запишем в виде: $y_{чн}=Ax^2e^x$.

в) $f(x)=e^x\left(3x-2\right)$. Так как $k_f=1$ является корнем кратности 2 характеристического уравнения, то $r=2$. Так как $P_n(x)=3x-2$ – многочлен второй степени, то частное решение имеет вид: $y_{чн}=e^x x^2\left(Ax+B\right)=e^x\left(Ax^3+Bx^2\right)$.

г) $f(x)=5\sin 2x$. Функция $f(x)$ имеет вид (8.4), где $a=0, b=2, P_n(x)=5$, поэтому $k_f=2i, m=0$. Так как число k_f не является корнем характеристического уравнения, то, подставив все найденные значения в формулу (8.5), получаем $y_{чн}=A\cos 2x+B\sin 2x$.

д) $f(x)=e^{3x}\left[\left(x^2+1\right)\cos 2x+9\sin 2x\right]$. Имеем: $a=3, b=2\Rightarrow k_f=3+2i$ – не является корнем характеристического уравнения. Многочлены $P_n(x)=x^2+1, Q_m(x)=9$ – соответственно многочлены второй и нулевой степени, значит, многочлены $R_l(x), S_l(x)$ будут иметь вторую степень, так к $l=\max\left\{n;m\right\}=2$. Решение имеет вид:

$$y_{чн}=e^{3x}\left[\left(Ax^2+Bx+C\right)\cos 2x+\left(Dx^2+Ex+F\right)\sin 2x\right].$$

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y''-4y'+3y=\left(4x+6\right)e^x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y\left(0\right)=1, y'\left(0\right)=-1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-4k+3=0$ имеет корни $k_1=1, k_2=3$. Значит общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y_{oo}=C_1e^x+C_2e^{3x}$. Запишем число $k_f=a+bi=1$ $(b=0)$, то $r=1$. В данном случае $P_n(x)=4x+6$ – многочлен первой степени $(n=1)$. Поэтому частное решение данного уравнения ищем в виде:

$$y_{чн}=(Ax+B)\cdot x\cdot e^x=(Ax^2+Bx)\cdot e^x.$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн}=\left(2Ax+B\right)e^x+\left(Ax^2+Bx\right)e^x=e^x\left(Ax^2+2Ax+Bx+B\right),$$

$$y''_{чн}=\left(2Ax+2A+B\right)e^x+\left(Ax^2+2Ax+Bx+B\right)e^x=e^x\left(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B\right)$$

Подставим $y'_{чн}, y''_{чн}$ и $y_{чн}$ в исходное уравнение, получим:

$$-4Ax+\left(2A-2B\right)=4x+6.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых неизвестных в левой и правой частях уравнения, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} -4A = 4, \\ 2(A - B) = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = -4. \end{cases}$$

Подставляя A и B в выражение для $y_{чн}$, получаем частное решение данного уравнения $y_{чн} = -(x^2 + 4x) \cdot e^x$. Так как общее решение ЛНДУ есть сумма $y_{оо}$ и $y_{чн}$, т.е. $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, то для данного уравнения оно имеет вид:

$$y_{он} = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - (x^2 + 4x) \cdot e^x.$$

Найдем частное решение. Для этого найдем производную $y_{он} = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} - (x^2 + 6x + 4) \cdot e^x$. Составим систему двух уравнений с двумя неизвестными, учитывая, что $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 3C_2 - 4 = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 3C_2 = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Итак, искомое частное решение имеет вид:

$$y_{он} = e^{3x} - (x^2 + 4x) \cdot e^x.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = x \sin^2 x.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет корни $k_{1,2} = \pm 2i$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{оо} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Используя формулы тригонометрии, преобразуем правую часть уравнения:

$$y'' + 4y = x \frac{1 - \cos 2x}{2}, \text{ т.е. } y'' + 4y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \cos 2x.$$

Правая часть неоднородного дифференциального уравнения представляет сумму двух функций специального вида:

$f_1(x) = \frac{1}{2}x,\ f_2(x) = -\frac{1}{2}x \cos 2x$. Решим отдельно два уравнения.

а) частное решение неоднородного уравнения:

$$y'' + 4y = \frac{1}{2}x$$

будем искать в виде:

$$y_{чн_1} = Ax + B.$$

Подставляя эту функцию в уравнение, находим: $A = \frac{1}{8},\ B = 0$,

поэтому $y_{чн_1} = \frac{1}{8}x$.

б) если $y'' + 4y = -\frac{1}{2}x\cos 2x$, то в этом случае $a = 0, b = 2$, $k_f = 2i \Rightarrow r = 1$ и так как $P_n(x) = -\frac{1}{2}x \Rightarrow n = 1$. Тогда частное решение имеет вид:

$$y_{чн_2} = x \cdot \left[(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{чн_2} = \left(Ax^2 + Bx \right)\cos 2x + \left(Cx^2 + Dx \right)\sin 2x .$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем:

$$(8Cx + 2A + 4D)\cos 2x + (-8Ax - 4B + 2C)\sin 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x .$$

Приравниваем многочлены, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения, получаем:

$$\begin{cases} 8Cx + 2A + 4D = -\frac{1}{2}x, \\ -8Ax - 4B + 2C = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8A = 0, \\ 2A + 4D = 0, \\ -4B + 2C = 0, \\ 8C = -\frac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = -\frac{1}{32}, \\ C = -\frac{1}{16}, \\ D = 0. \end{cases}$$

Получаем $y_{чн_2} = -\frac{1}{32}x\cos 2x - \frac{1}{16}x^2 \sin 2x$.

Объединяя полученные результаты, получаем общее решение исходного уравнения:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн_1} + y_{чн_2} = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}x\cos 2x - \frac{1}{16}x^2 \sin 2x .$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y''' + y = e^x\left(x^2 + x + 1\right)$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 + 1 = 0$ или $(k+1)\left(k^2 - k + 1\right) = 0$ имеет корни $k_1 = -1, k_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Получили три простых корня: один действительный и два комплексно-сопряженных $\left(\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. С учетом формул (7.3) и (7.5) общее решение исходного ДУ имеет вид:

$$y_{оо} = C_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

Так как $f(x)=e^x\left(x^2+x+1\right)$, то в данном случае $a=1, b=0, k_f=1$; поскольку такого у корня характеристического уравнения нет, то $r=0$. Многочлен $P_n(x)$ имеет степень $n=2$, следовательно, $R_l(x)$ также является многочленом второй степени и имеет вид: $R_l(x)=Ax^2+Bx+C$. Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде:

$$y_{чн}=e^x\left(Ax^2+Bx+C\right).$$

Подставляя эту функцию в исходное уравнение, получаем:

$$e^x\left(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B+C\right)+e^x\left(Ax^2+Bx+C\right)=e^x\left(x^2+x+1\right),$$

поделим обе части на $e^x\neq 0$:

$$2Ax^2+\left(4A+2B\right)x+\left(2A+2B+2C\right)+=x^2+x+1.$$

Приравниваем коэффициенты при неизвестных в одинаковой степени, получаем:

$$\begin{cases}2A=1,\\ 4A+2B=1,\\ 2A+2B+2C=1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{2},\\ B=-\dfrac{1}{2},\\ C=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Следовательно, частное решение данного уравнения имеет вид:

$$y_{чн}=\frac{1}{2}e^x\left(x^2-x+1\right).$$

Объединяя полученные результаты, приходим к выводу, что общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y_{он}=C_1e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{2}e^x\left(x^2-x+1\right).$$

Задания для самостоятельной работы

9.25. Найти общее решение ДУ:

а) $y''+2y'+5y=-17\sin 2x$;
б) $y''+y=2\cos 7x-3\sin 7x$;
в) $y'''-y'=3x^2-2x+1$;
г) $y^{IV}+2y'''+y''=12x^2-6x$;
д) $y'''+2y''+y'=\left(18x+21\right)e^{2x}$;
е) $y'''+3y''+2y'=\left(1-2x\right)e^{-x}$;
ж) $4y''-y=x^3-24x$;
з) $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 8x$.

9.26. Найти общее решение ДУ:

а) $y''-2y'+y=3e^x+x+1$;
б) $y''-4y=e^{2x}+3e^{-2x}$;
в) $y''+y=\cos x+\sin 5x$;
г) $y''+9y=4\sin 3x+x$;

д) $y''+y'=2\sin x-6\cos x+2e^x$; е) $y'''-12y'=-9e^{3x}+18\sin 3x-9\cos 3x$;

ж) $y''+y'=\cos 2x+e^x+x^2$; з) $y''+2y'+y=e^{-x}\left(x+\cos x\right)$.

9.27. Найти решение задачи Коши:

а) $y''-4y'+5y=2x^2e^x$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$;

б) $y''+y=-\sin 2x$, $y\left(\pi\right)=y'\left(\pi\right)=1$;

в) $y''-2y'=e^x\left(x^2+x-3\right)$, $y\left(0\right)=y'\left(0\right)=2$;

г) $y''-y'=5e^{-x}(\sin x+\cos x)$, $y(0)=-4, y'(0)=5$

д) $y''+y=4x\cos x$, $y(0)=0, y'(0)=1$.;

е) $y''+6y'+9y=10\sin x$, $y(0)=y'(0)=0$.;

ж) $y''-2y'+2y=4e^x\cos x$, $y\left(\pi\right)=\pi e^{\pi}$, $y'\left(\pi\right)=\pi e^{\pi}$;

з) $y''+4y=\sin 2x+1$, $y\left(0\right)=0$, $y'\left(0\right)=1$.

Ответы

9.25. а) $y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x+4\cos 2x-\sin 2x$;

б) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{24}\cos 7x+\frac{1}{16}\sin 7x$; в) $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}-x^3+x^2-7x$;

г) $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}+x^4-9x^3+42x^2$; д) $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}+e^{2x}(x-\frac{1}{18})$;

е) $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}+e^{-x}(x^2+x)$; ж) $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{2}}-x^3$;

з) $y=C_1e^{-3x}\cos 2x+C_2e^{-3x}\sin 2x-\frac{1}{60}e^{-3x}\cos 8x$.

9.26. а) $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{-x}+\frac{3}{2}x^2e^x+x+3$; б) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}-\frac{3}{4}xe^{-2x}$;

в) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{24}\sin 5x$; г) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-\frac{2}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}x$;

д) $y=C_1+C_2e^{-x}+2\cos x-4\sin x+e^x$;

е) $y=C_1+C_2e^{2\sqrt{3}x}+C_3e^{-2\sqrt{3}x}+e^{3x}+\frac{6}{21}\cos 3x+\frac{3}{21}\sin 3x$;

ж) $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{10}\sin 2x-\frac{2}{10}\cos 2x+\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+\frac{1}{2}e^x$;

з) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\frac{1}{6}x^3e^{-x}-e^{-x}\cos x$. **9.27.** а) $y=(\cos x-2\sin x)e^{2x}+(x-1)^2e^x$;

б) $y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$; в) $y=e^{2x}+e^x\left(1-x-x^2\right)$;

г) $y=2e^x+(\sin x-2\cos x)e^x-4$; д) $y=x\cos x+x^2\sin x$;

е) $y=\left(x+\frac{3}{5}\right)e^{-3x}+\frac{1}{5}\left(4\sin x-3\cos x\right)$; ж) $y=-\pi e^x\cos x-2\pi e^x\sin x+2xe^x\sin x$;

з) $y=-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{5}{8}\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{4}$.

9.9. Приложение дифференциальных уравнений в экономике

Краткие теоретические сведения

Рассмотрим примеры применения ДУ для описания процессов макроэкономической динамики.

Пусть $y = y(t)$ – объем продукции некоторого производителя, реализованный моменту времени t. Пусть цена на данный товар остается постоянной (в пределах рассматриваемого промежутка времени). Тогда функция $y = y(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$y' = ky, \tag{1}$$

где $k = mpl$, m – норма инвестиций, p – продажная цена, l – коэффициент пропорциональности между величиной инвестиций и скоростью выпуска продукции.

Уравнение (1) является уравнением с разделяющимися переменными (см. п. 9.2). Его решение имеет вид:

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)}, \tag{2}$$

где $y_0=y(t_0)$.

Уравнение (1) описывает также рост народонаселения, динамику роста цен при постоянной инфляции и т.д.

Предположение о неизменности цены (о ненасыщаемости рынка) на практике оказывается справедливым только для узких временных промежутков. В общем случае цена p является убывающей функцией от объема реализованной продукции ($p = p(y)$).

Тогда уравнение (1) из п. 9.1 принимает вид:

$$y' = mlp(y)y, \tag{3}$$

оставаясь, тем не менее, уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение (3) описывает также рост народонаселения при наличии (естественных) ограничений для этого роста, динамику развития эпидемий, процесс распространения рекламы и т.д.

Эластичность спроса относительно цены определяется формулой:

$$E_p(y) = \frac{p}{y}\frac{dy}{dp}.$$

В некоторых случаях представляет интерес функция спроса при данной эластичности.

В простейших ситуациях спрос на товар (предложение товара) предполагается зависящим только от его цены. В более сложных случаях в расчет принимается также зависимость спроса (предложения) от скорости изменения цены.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Пусть национальный доход y возрастает со скоростью, пропорциональной его величине, т.е. имеет место уравнение (9.1) $y' = ky$ и пусть, кроме того, дефицит в расходах правительства прямо пропорционален доходу y (при коэффициенте пропорциональности q). Дефицит в расходах приводит к возрастанию национального долга D: $\dfrac{dD}{dt} = qy$.

Здесь мы считаем переменные y и D непрерывными и дифференцируемыми функциями времени t.

Пусть начальные условия имеют вид $y = y_0$ и $D = D_0$ при $t = 0$. Из первого уравнения мы получаем, учитывая начальные условия, $y = y_0 e^{kt}$. Подставляя y во второе уравнение, получаем $\dfrac{dD}{dt} = qy_0 e^{kt}$. Общее решение этого уравнения имеет вид, где $C = const$, которую мы определим из начальных условий. Подставляя начальные условия в полученное решение, мы получаем $D_0 = \dfrac{q}{k} y_0 + C$. Итак, окончательно:

$$D = D_0 + \frac{q}{k} y_0 \left(e^{kt} - 1 \right),$$

т.е. национальный долг возрастает с той же относительной скоростью k, что и национальный доход.

Пример 2. В условиях ненасыщаемости рынка найти объем производства по истечении 6 месяцев, если в начальный момент времени объем производства $y_0 = y(0) = 24$ (усл. ед.), при норме инвестиций 0,6, продажной цене равной 0,15 (усл. ед.) и $l = 0,4$.

Решение. Подставляя в формулу (9.2) все заданные значения и учитывая, что $k = mlp$, имеем:

$$y = 24 \cdot e^{0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6(6-0)} = 29,8 \text{ (усл. ед.)}.$$

Пример 3. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид:

$$y = 50 - 2p - 4\frac{dp}{dt},$$

$$x = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p(0) = 10$.

б) Является ли равновесная цена устойчивой?

Решение. а) Из условия равенства спроса и предложения, имеем:

$$50 - 2p - 4\frac{dp}{dt} = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt},$$

откуда

$$\frac{dp}{dt} = 20 + 4p,$$

т.е. получаем уравнение с разделяющимися переменными.

Решением этого уравнения является функция

$$p = Ce^{4t} - 5.$$

Из условия $p(0) = 10$ следует, что $C = 15$. Так, что окончательно

$$p = 15e^{4t} - 5.$$

б) Так как $\lim\limits_{t\to\infty} p = \lim\limits_{t\to\infty}\left(15e^{4t} - 5\right) = \infty \neq const$, то цена устойчивостью не обладает.

Пример 4. Сберегательный счет приносит 6% годовых, начисляемых непрерывно, и непрерывные отчисления денег со счета по 900 рублей ежегодно. Составьте дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет количество $f(t)$ денег в счете в момент времени *t*. Постройте интегральные кривые этого уравнения.

Решение. Вначале будем игнорировать факт непрерывных отчислений денег со счета. Когда проценты начисляются непрерывно, наращенная сумма на счете $f(t)$ является показательной функцией числа лет t: $f(t) = Me^{rt}$, здесь M – исходная сумма, r – годовая процентная ставка. Следовательно $f(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению: $y' = ry$, или в данном случае $-y' = 0,06y$.

Таким образом, сберегательный счет растет со скоростью, пропорциональной размеру счета и процентной ставке.

Пусть теперь происходят непрерывные отчисления со счета в размере 900 руб. в год. Тогда имеются два фактора влияния на сумму на счете – начисление процентов и вычеты денег. Скорость изменения $f(t)$ – результат влияния этих факторов. Функция $f(t)$ теперь удовлетворяет уравнению:

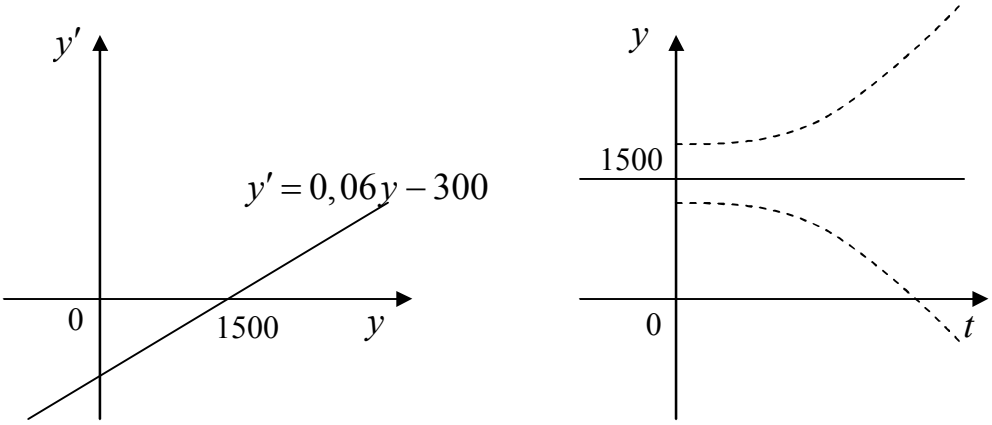
$$y' = 0,06y - 900.$$

Приравнивая $y' = 0$, получим y = 900/0,06 = 15000. Это означает, что если начальное количество денег на счете $y(0)$ в счете будет равно 15000 рублей, то это количество денег всегда будет оставаться неизменным, поскольку скорость изменения суммы $y' = 0$. Если начальное количество будет больше, чем 15000, то на сберегательном счете деньги будут накапливаться. Если начальное количество будет меньше чем 15000, то сумма на счете будет уменьшаться (по-видимому, банк прекратит вычеты денег, когда баланс счета достигнет ноля).

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = f(t) = Ce^{0,06t} + 15000,\ C \equiv \text{const}.$$

Графики скорости изменения суммы денег на счете и интегральные кривые сумм представлены на рисунке



Задачи для самостоятельной работы

9.28. Найти функцию спроса $y = y(p)$, если эластичность спроса по цене постоянна E_p = - ½, а цена $p = 5$ при значении спроса $y = 2$.

9.29. Некоторая небольшая страна имеет 10^9 денежных единиц наличными в обращении, и каждый день 50 миллионов поступает в банки страны. Правительство решает ввести в обращение денежные купюры нового образца, заменяя старые купюры новыми всякий раз, когда старые купюры поступают в банки. Пусть $x(t)$ – сумма денег в обращении в момент времени t, представленная новыми купюрами, $x(0)=0$.

а) Постройте математическую модель "потока" новых купюр в обращение в форме уравнения с начальными условиями.

б) Решите уравнение а) с начальными условиями.

в) Сколько потребуется времени для того, чтобы денежная масса в новых купюрах составила 90% наличных денег в обращении?

9.30. Пусть $f(t)$ – объём денег (в рублях), инвестируемых в бизнес в момент времени t (в месяцах). Скорость изменения инвестированного капитала, $f'(t)$, иногда называют уровнем чистых инвестиций. Предположим, что руководство фирмы решает, что оптимальный уровень инвестиций должен быть равен C рублей и что в любое время уровень чистых инвестиций должен быть пропорционален разнице между C и объёмом инвестируемого капитала.

а) Постройте дифференциальное уравнение, которое описывает эту ситуацию.

б) Полагая $f(0)=0$, $f(3)=C/2$, найдите объём инвестированных в бизнес денег в течение 6 месяцев.

9.31. Модель, описывающая взаимосвязь между ценой продукта и недельным объёмом продаж этого продукта, имеет вид

$$\frac{dy}{dp} = -\frac{1}{2}\left(\frac{y}{p+3}\right),$$

где y – объём проданной продукции, p – цена продукта.

а) Решите это дифференциальное уравнение.

б) Постройте графики функций спроса $y = y(p,C)$.

9.32. В экономической теории для описания инвестиционной политики компании используется следующая модель. Пусть $f(t)$ представляет сумму инвестированного капитала компании к моменту времени t. Дополнительно капитал инвестируют всякий раз, когда $f(t)$ ниже определенной величины равновесия E, и капитал забирают всякий раз, когда $f(t)$ превышает E. Уровень (скорость) инвестиций пропорционален разнице между $f(t)$ и E. Составьте дифференциальное уравнение, решением которого является $f(t)$, и постройте графики интегральных кривых.

9.33. Вечная рента – непрекращающийся поток денег, которые выплачиваются некоторому лицу. Такая рента может быть установлена, например, если внести начальную сумму на сберегательный счет банка и затем делать фиксированные отчисления со счета. Предположим, что начальная сумма 5400 руб. помещена на сберегательный счет, на который непрерывно начисляются проценты по годовой ставке 5.5%. И непрерывно производятся отчисления денег со счета, при этом сумма отчислений за год составляет 300 руб. Составьте дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет сумма денег на счете $f(t)$ в момент времени t. Постройте график решения.

9.34. Сумма 10000 руб. положена на сберегательный счет банка по годовой ставке 6 %, начисляемых непрерывно. Через шесть месяцев начаты непрерывные отчисления денег со счета со скоростью 600 руб. в год. Составьте дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет сумма денег на счете $f(t)$ в момент времени t, где $t > 0{,}5$. Постройте графики интегральных кривых.

9.35. Фирма хочет сформировать фонд своего будущего развития. С этой целью она делает непрерывные отчисления на сберегательный счет в размере 10000 руб. в год. Сберегательный счет предусматривает непрерывное начисление 5 % годовых.

а) Составьте дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет сумма денег на счете $y(t)$ в момент времени t.

б) Решите дифференциальное уравнение при условии $y(0) = 0$.

в) Сколько денег на счете окажется к концу 5 года?

9.36. Господин N планирует купить новый автомобиль. С этой целью он делает непрерывные отчисления на отдельный сберегательный счет в размере *P* рублей в год. Сберегательный счет предусматривает непрерывное начисление 7 % годовых. Определите сумму ежегодных отчислений P, которая позволит господину N накопить на сберегательном счете к концу четвёртого года 350000 руб.

9.37. Проектная производственная мощность нового цеха – 15000 единиц продукта в день. В период переходного процесса освоения производственных мощностей объём фактического производства в момент времени t равен $y(t)$. Прирост производства пропорционален недоиспользованной мощности. Составьте дифференциальное уравнение, решением которого является $y(t)$, и постройте график интегральной кривой, удовлетворяющей условию $y(0)=0$.

Ответы

9.28. $py^2 = 20$. **9.29.** в) 18 дней. **9.30.** б) 0,75С. **9.32.** $y' = k(E - y), k > 0$. **9.33.** $y' = 0{,}055y - 300$, $y(0) = 5400$. **9.35**. в) 56805 руб. **9.36**. P = 75821 руб.

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 19 по теме «Решение дифференциальных уравнений первого порядка»

1. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$

2. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y.$

3. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$

Контрольная работа № 20 по теме «Решение дифференциальных уравнений высших порядков порядка»

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$

2. $y''' - 3y' + 2y = (4x+9)\mathrm{e}^{2x}.$

3. $y'' + 2y' = 10\mathrm{e}^{x}(\sin x + \cos x).$

ГЛАВА 10. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

10.1. Числовой ряд. Основные понятия. Знакоположительные ряды

Краткие теоретические сведения

Пусть имеется числовая последовательность $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$. Составим выражение $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, которое называют *числовым рядом*, а числа $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ – членами ряда; *n*-й член ряда называется также *общим членом ряда.*

Определение 1. Сумма первых *n* членов ряда называется *n-й частичной суммой* ряда и обозначается S_n : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Определение 2. Суммой ряда называется *предел последовательности частичных сумм* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, если он существует и конечен. В этом случае ряд называют *сходящимся* и пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, в противном случае – *расходящимся.*

Определение 3. Ряд $u_{m+1} + u_{m+2} + ... + u_{m+n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m+n}$, полученный из ряда $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ отбрасыванием первых его *m* членов называется *m*-м остатком ряда.

Если сумму остатка сходящегося ряда обозначить через R_m, то, очевидно, $S_m + R_m = S$.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Отбрасывание ряда, или присоединение к ряду любого конечного числа начальных членов не меняет его сходимости или расходимости.

Теорема 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходящийся, то $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$.

Теорема 3. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, имеющего сумму S, умножить на число λ, то полученный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n)$ будет также сходящимся, а число λS – его суммой.

Теорема 4. Умножение членов расходящегося ряда на число $\lambda \neq 0$ не нарушит его расходимости.

Теорема 5 (необходимое условие сходимости). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел последовательности его членов равен 0: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Отсюда следует, что если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Теорема 6 (критерий Коши). Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало число $N > 0$ (зависящее только от ε) такое, что для всех $n > N$ и любого натурального *k* было справедливо неравенство $|u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+k}| < \varepsilon$.

Если все члены ряда положительные, то ряд называют знакоположительным.

Приведем основные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Признаки сравнения. Пусть имеем 2 знакоположительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (2).$$

1. Если для всех членов рядов (1) и (2), начиная с некоторого номера, выполняется равенство $u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1); из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

2. Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c \neq 0 (\neq \infty)$, то оба ряда (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Замечание 1. Сравнение исследуемых рядов производится обычно со следующими рядами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$ (геометрическая прогрессия, сходящаяся при $|q| < 1$ и расходящаяся при $|q| \geq 1$);

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (расходящийся гармонический ряд);

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (обобщенный гармонический ряд, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p < 1$).

Замечание 2. Если, в частности, общие члены сравниваемых рядов эквиваленты при $n \to \infty$, ($u_n \sim v_n$), то оба ряда (в смысле сходимости) ведут себя одинаково.

Признак Даламбера. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакоположительный ряд и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится; при $l > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится; при $l = 1$ вопрос остается открытым.

Признак Коши. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакоположительный ряд и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится; при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится; при $q = 1$ вопрос остается открытым.

Признак Раабе. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакоположительный ряд и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = r$, то при $r > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится; при $r < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится; при $r = 1$ вопрос остается открытым, т.е. о сходимости или расходимости ряда ничего сказать нельзя, нужны дополнительные исследования.

Интегральный признак. Если функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и не возрастает при $x \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходятся одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Признак Бертрана. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакоположительный ряд и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] \ln n = b$, то при $b > 1$ ряд сходится; при $b < 1$ ряд расходится; при $b = 1$ вопрос остается открытым.

Замечание. При оценке факториалов больших чисел и вычислении пределов, содержащих $n!$ часто бывает полезна формула Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{\frac{2n+1}{2}} e^{-n}$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}+\ldots.$

Решение. Составим частичную сумму:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-5)(3n+2)}+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{1}{3}+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{(3n-5)}-\frac{1}{(3n-2)}\right)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{(3n-2)}-\frac{1}{(3n+1)}\right)\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Найти сумму ряда $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$

Решение. Составим последовательность частичных сумм:

$$S_1=\frac{1}{2}=3-\frac{5}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}=3-\frac{7}{4},$$

$$S_3=S_2+\frac{5}{8}=3-\frac{7}{4}+\frac{5}{8}=3-\frac{9}{8}.$$

Если $S_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$, то $S_{n+1}=3-\frac{2n+3}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}}=3-\frac{2n+5}{2^{n+1}}$.

Следовательно, $S=\lim_{n\to\infty}S_n=3$.

Пример 3. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}$.

Решение. Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей:

$$a_n=\frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}\Rightarrow$$

$$3n+8=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1);$$

$$n=0:\ 8=2A;\ A=4$$

$$n=-1:\ 5=-B;\ B=-5$$

$n=-2:\ 2=2C;\ C=1$

$a_n=\dfrac{4}{n}-\dfrac{5}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}$

$a_1=\dfrac{4}{1}-\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{3};$

$a_2=\dfrac{4}{2}-\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{4};$

$a_3=\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{5};$

$a_4=\dfrac{4}{4}-\dfrac{5}{5}+\dfrac{1}{6};$

.....

$a_{n-3}=\dfrac{4}{n-3}-\dfrac{5}{n-2}+\dfrac{1}{n-1};$

$a_{n-2}=\dfrac{4}{n-2}-\dfrac{5}{n-1}+\dfrac{1}{n};$

$a_{n-1}=\dfrac{4}{n-1}-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n+1};$

$a_n=\dfrac{4}{n}-\dfrac{5}{n+1}+\dfrac{1}{n+2};$

$S_n=4-\dfrac{5}{2}+2+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{5}{n+1}+\dfrac{1}{n+1};$

$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=6-2{,}5=3{,}5.$

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\ln n}{n^2-3}$.

Решение. Проверим выполнение необходимого условия $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln n}{n^2-3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n\ln n\right)'}{\left(n^2-3\right)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}}{2}=0$. Необходимое условие выполняется, однако, это не означает, что ряд сходится. Исследуем на сходимость с помощью достаточных признаков. Этот ряд можно исследовать на сходимость с помощью признака сравнения. Сравним исследуемый ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Начиная с $n=3$ члены нашего ряда больше соответствующих членов гармонического ряда

$\frac{n\ln n}{n^2-3} > \frac{n\ln n}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, так как при $n>3$, $\ln n > 1$. Гармонический ряд расходится, следовательно, расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln n}{n^2-3}$.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{\left(n^2+5\right)^{3/2}}$.

Решение. $a_n = \arcsin \frac{n}{\left(n^2+5\right)^{3/2}} \sim \frac{n}{\left(n^2+5\right)^{3/2}} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – обобщенный гармонический ряд с показателем $p=2>1$ сходится. Значит, данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{\left(n^2+5\right)^{3/2}}$, члены которого эквивалентны членам обобщенного гармонического ряда, сходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$.

Решение. Используем признак Даламбера. Имеем :

$u_n = \frac{n^2}{(n+2)!}, u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{((n+1)+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(n+3)!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+3)!}}{\frac{n^2}{(n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n+2)!}{n^2(n+3)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} = 1\cdot 0 = 0 < 1$$

Следовательно, исследуемый ряд сходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$.

Решение. Здесь удобно применить признак Коши. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$ расходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения. Вместо ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$ можно исследовать на сходимость более простой ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)\ln n}$, так как $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{(n^2+1)\ln n}}{\frac{1}{n\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-1}=1$. Применим интегральный признак сходимости ряда. Вычислим несобственный интеграл от функции $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, удовлетворяющей условиям интегрального признака.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\big(\ln(\ln x)\big)=\lim_{b\to+\infty}(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2))=+\infty.$$

Интеграл расходится, значит будет расходится и ряд.

Пример 9. Доказать справедливость равенства $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)}{(2n)!!}=0$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2+1\right)}{(2n)!!}$. Исследуем его сходимость по признаку Даламбера:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left((n+1)^2+1\right)}{(2n+2)!!}}{\frac{\left(n^2+1\right)}{(2n)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n\cdot(2n+2)}=$$

$=1\cdot0=0<1$.

Ряд сходится. Следовательно, по необходимому признаку предел общего члена равен нулю.

Задания для самостоятельной работы

10.1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-2^n}{14^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-4^n}{20^n}$;

д) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$;

е) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$.

10.2. Исследовать сходимость ряда с помощью одного из признаков сравнения:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{n}$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}arctg\dfrac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}n^3 tg^5\dfrac{\pi}{n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n^3}{n^3+1}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}$.

10.3. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(n+2)!}{n^5}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n-1}{5^n(n+1)!}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)tg\dfrac{\pi}{3^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{2\pi}{3^n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 6\cdot 11\cdots(5n-4)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)}$;

ж) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(n+2)!4^n}$.

10.4. Исследовать сходимость ряда с помощью радикального признака Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\dfrac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{n^3}\right)^{2n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^{n^2}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{\left((n+1)/n\right)^{n^2}}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{5n+1}\right)^{n}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(arctg\dfrac{1}{2n-1}\right)^{2n}$.

10.5. Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(4+9n)^5}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6+n}{36+n^2}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{9+n^2-2n}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)\ln(\ln(n+3))}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$.

10.6. Исследовать на сходимость (разные задачи):

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^7 n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+7}\right)^{n^2}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n^2+1}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-1)(6n+3)}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$.

10.7. Доказать справедливость равенства. (Ответом служит число ρ, получаемое при применении признака Даламбера или признака Коши):

а); $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n+1)!}=0$

б) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{5^{n^2}}=0$;

в) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}=0$;

г) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}=0$;

д) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2n^2!}=0$;

е) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$;

ж) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n!!}{n^n}=0$;

з) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^n}{(2n-1)!}=0$.

Ответы

10.1. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{1}{12}$; д) $\frac{1}{18}$; е) $\frac{1}{6}$; ж) 1; з) $\frac{2}{3}$. **10.2.** а) расходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится; д) сходится; е) сходится; ж) расходится; з) сходится. **10.3.** а) расходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится; д) расходится; е) сходится; ж)сходится; з) сходится. **10.4.** а) сходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится; д) сходится; е) расходится; ж) сходится; з) сходится. **10.5.** а) сходится; б) расходится; в) расходится; г) расходится; д) расходится; е) расходится; ж) расходится; з) расходится. **10.6.** а) сходится; б) сходится; в) расходится; г) сходится; д) расходится; е) сходится; ж) сходится; з) расходится.

10.2. Знакопеременные ряды

Краткие теоретические сведения

Определение. Ряд называют *знакопеременным*, если среди его членов есть бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов. Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$, где $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $u_n > 0$ (1).

Составим ряд (2) из абсолютных величин членов ряда (1):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n u_n\right| \quad (2).$$

Если ряд (1) сходится вместе с рядом (2), то ряд (1)называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется *условно сходящимся*.

Теорема 1. Сходящийся знакочередующийся ряд (в том числе и знакоположительный) остается сходящимся и не меняет своей суммы при любой группировке его членов, произведенной без изменения порядка их следования.

Теорема 2. Абсолютно сходящийся ряд (в том числе и знакоположительный) остается и не меняет своей суммы при любой перестановке его членов.

Теорема 3. Изменяя порядок следования в условно сходящемся ряде, можно сделать сумму ряда равной любому наперед заданному числу или даже сделать ряд расходящимся.

Теорема 4. Любой абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Определение.

Признак Лейбница. Если:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$–знакочередующийся ряд;

2) $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $u_n > u_{n+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ сходится.

Исследование сходимости знакочередующихся рядов следует начинать с исследования их абсолютной сходимости, так как это часто быстрее приводит к цели, чем применение признака Лейбница с последующим исследованием абсолютной сходимости.

Признак Абеля. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняются условия:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

б) последовательность $\{b_n\}$ монотонная и ограниченная,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Признак Дирихле. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняются условия:

а) последовательность частичных сумм $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ ограничена;

б) последовательность $\{b_n\}$ монотонно стремится к 0,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Для приближенного вычисления суммы S сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ полагают $S \approx S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, пренебрегая остатком $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

Для сходящихся знакоположительных рядов, члены которых монотонно убывают, начиная с $(n+1)$, справедливы следующие оценки остатка $R_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx$ или $\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le R_n \le f(n+1) + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx$, где $f(n) = a_{n,}$ a_n – общий член ряда.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Решение. Этот ряд знакочередующийся. Применим признак Лейбница. Проверим выполнение первого условия.

$$u_n = \frac{2n+1}{n(n+1)};\ u_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)((n+1)+1)} = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} > \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow (2n+1)(n+2) > (2n+3)n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 5n + 2 > 2n^2 + 3n \Leftrightarrow 2n + 2 > 0.$$

Выполнение второго условия очевидно $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 0.$ Значит, выполнены оба условия признака Лейбница. Следовательно, данный ряд сходится. Исследуем на сходимость ряд, составленный из абсолютных

величин членов первоначального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ и гармонический ряд ведут себя одинаково.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n}{n(n+1)}=2$. Значит ряд, составленный из абсолютных величин, расходится. Таким образом, что исходный ряд сходится условно.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$.

Решение. В данном примере сначала исследуем знакочередующийся ряд на абсолютную сходимость, т.е. исследуем сходимость ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$.

По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3(n+1)!}{(n+2)!\cdot n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n+2}=1\cdot 0<1.$$

Ряд из абсолютных величин сходится, следовательно, данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Пример 3. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{2^n}$.

Решение. Составим последовательность частичных сумм

$$S_0=1=\frac{2}{9}+\frac{7}{9}=\frac{2}{9}+\frac{7+6\cdot 0}{9\cdot 1},$$

$$S_1=S_0-\frac{3}{2}=\frac{2}{9}+\frac{7}{9}-\frac{3}{2}=\frac{2}{9}+\frac{14-27}{9\cdot 2}=\frac{2}{9}-\frac{7+6\cdot 1}{9\cdot 2},$$

$$S_2=S_1+\frac{5}{2^2}=\frac{2}{9}-\frac{7+6\cdot 1}{9\cdot 2}+\frac{5}{4}=\frac{2}{9}+\frac{45-26}{9\cdot 4}=\frac{2}{9}+\frac{7+6\cdot 2}{9\cdot 2^2},$$

т.е. $S_n=\frac{2}{9}+(-1)^n\frac{7+6\cdot n}{9\cdot 2^n}$, тогда

$$S_{n+1}=S_n+(-1)^{n+1}\frac{2n+3}{2^{n+1}}=\frac{2}{9}+(-1)^n\frac{7+6\cdot n}{9\cdot 2^n}+(-1)^{n+1}\frac{2n+3}{2^{n+1}}=$$

$$=\frac{2}{9}+(-1)^{n+1}\frac{7+6\cdot(n+1)}{9\cdot 2^{n+1}}.$$

Следовательно, $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{9}$.

Пример 4. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$ следует взять, чтобы получить сумму ряда с точностью до 10^{-3}?

Решение. Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница. Если возьмем $S_n \approx S$, то ошибка не превосходит $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k^2+1}}\right|$. Но для знакочередующихся рядов остаток ряда по абсолютной величине не превосходит величины своего первого члена, т.е. $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k^2+1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} < 10^{-3}$, что верно при $n \ge 999$. Отсюда ясно, что достаточно взять 999 членов ряда. Тогда получим требуемую точность.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$.

Решение. $\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = \cos\left[\pi(n-1)+\frac{\pi}{n+1}\right] = (-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{n+1}$, поэтому данный ряд имеет вид $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi}{n+1}$. Но ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}$ сходится по признаку Лейбница, а $\left\{\cos\frac{\pi}{n+1}\right\}$ монотонная и ограниченная последовательность. Значит, по признаку Абеля исходный ряд сходится.

Рассмотрим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi}{n+1}$. Так как $\frac{1}{\ln^{2n}}\cos\frac{\pi}{n+1} \sim \frac{1}{\ln^2 n}$ при $n \to \infty$ и $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$ начиная с некоторого n, а $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi}{n+1}$ расходится. Значит, данный ряд расходится условно.

Пример 6. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\left(1+n^3\right)^2}$ с точностью до $\alpha = 0{,}001$.

Решение. Для знакочередующихся рядов погрешность не превышает первого отброшенного члена.

$$a_n = \frac{n}{\left(1+n^3\right)^2}.$$

$$a_1 = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} > \alpha,$$

$$a_2 = \frac{2}{\left(1+2^3\right)^2} = \frac{2}{81} > \alpha,$$

$$a_3 = \frac{3}{\left(1+3^3\right)^2} = \frac{3}{784} > \alpha,$$

$$a_4 = \frac{4}{\left(1+4^3\right)^2} = \frac{4}{4225} < \alpha.$$

Поэтому искомая сумма с точностью до α равна

$$-\frac{1}{4} + \frac{2}{81} - \frac{3}{784} = -0,229.$$

Задания для самостоятельной работы

10.8. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\left(n\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$;

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}$;

з) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$.

10.9. Вычислить сумму ряда с точностью α:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n\cdot n!}$, $\alpha = 0,0001$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $\alpha = 0,01$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}$, $\alpha = 0,001$;

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)}$, $\alpha = 0,001$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}$, $\alpha = 0,01$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $\alpha = 0,0001$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n}$, $\alpha = 0,1$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^2}{3^n}$, $\alpha = 0,1$.

Ответы

10.8. а) абсолютно сходится; б) сходится условно; в) сходится абсолютно; г) сходится абсолютно; д) сходится условно; е) сходится условно; ж) сходится абсолютно; з) сходится условно. **10.9.** а) 0, 18127; б) 0,633; в) 0,112; г) –0,303; з) 0,5.

10.3. Функциональные ряды

Краткие теоретические сведения

Определение 1. Ряд, членами которого являются функции аргумента x, определенные на некотором множестве D, называется *функциональным*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$$

Множество всех значений x, при которых функциональный ряд становится сходящимся числовым рядом, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Может случиться, что для некоторых $x \in D$ ряд сходится абсолютно, а для некоторых условно.

Для нахождения областей сходимости функциональных рядов можно использовать разложение основных элементарных функций в ряд и достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Определение 2. Суммой функционального ряда называется функция $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$ $-n$-я частичная сумма.

Определение 3. Сходящийся в некотором промежутке E функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в этом промежутке, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, не зависящий от x и такой, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ одновременно для всех значений x рассматриваемого промежутка.

Теорема 1. Если членами функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ являются непрерывные в некотором промежутке функции $f_n(x)$ и в этом промежутке ряд сходится равномерно, то его сумма $S(x)$ непрерывна в этом промежутке.

Теорема 2 (признак Вейерштрасса). Если члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ в некотором промежутке $\boldsymbol{E}$ не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами, т.е. если для всех $n \in \boldsymbol{E}$: $|f_n(x)| \le u_n$, то данный функциональный ряд сходится в этом промежутке абсолютно и равномерно.

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *мажорирующим* рядом или числовой мажорантой для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на промежутке.

Теорема 3. Если членами функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ являются непрерывные на промежутке $[a,b]$ функции, и ряд сходится равномерно на этом отрезке к функции $S(x)$, то его можно почленно проинтегрировать на этом отрезке: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$.

Выше сформулированы достаточные условия для почленного интегрирования рядов. Существуют ряды, не удовлетворяющие условиям этой теоремы, но допускающие почленное интегрирование.

Теорема 4. Если в некотором промежутке:

1) функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится к сумме $S(x)$;

2) члены $f_n(x)$ данного ряда имеют непрерывные производные $f_n'(x)$;

3) ряд этих производных $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно; то данный функциональный ряд можно почленно дифференцировать в каждой точке упомянутого промежутка: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = S'(x)$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+x^2}.$$

Решение. При x=0 ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} 0$, его частичная сумма $S_n = 0$, и, по определению суммы ряда $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

Пусть x – фиксированное число, $x \neq 0$. Исследуем сходимость получившегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+x^2} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ по интегральному признаку Коши: $\int_1^{\infty} \frac{dy}{y+x^2} = \ln\left(y+x^2\right)\Big|_1^{\infty} = \ln\infty - \ln\left|1+x^2\right| = \infty$. Интеграл расходится при всех фиксированных значениях x, следовательно, расходится при всех $x \neq 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$. Данный ряд получается из вспомогательного ряда умножением на число $x \neq 0$, что не меняет сходимости ряда. Таким образом, область сходимости данного ряда состоит из одной точки $x = 0$.

Пример 2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 4^{-\frac{n^2}{x}}.$$

Решение. Из условия следует, что $x\neq 0$. Пусть x – фиксированное число, отличное от нуля. Исследуем сходимость получившегося числового ряда по радикальному признаку Коши:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 4^{-\frac{n^2}{x}}}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot 4^{-\frac{n}{x}}\,3\lim_{n\to\infty}4^{-\frac{n}{x}}=\begin{bmatrix}3\cdot\infty, & при & x<0\\ 3\cdot 0, & при & x>0\end{bmatrix}.$$

Итак, $\rho=\infty$ при $x<0$ и ряд расходится, $\rho=0$ при $x>0$ и ряд сходится. Поэтому область сходимости ряда $x\in(0,+\infty)$.

Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ на $[-a,a]$.

Решение. На $[-a,a]$ справедливо

$$0\le\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\le\ln\left(1+\frac{a^2}{n\ln^2 n}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{a^2}{n\ln^2 n}\quad\text{при}\quad n\to\infty,\ \text{а}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^2}{n\ln^2 n}$$

сходится (по интегральному признаку). Тогда $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{a^2}{n\ln^2 n}\right)$ сходится (по теореме сравнения). Значит, по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно на $[-a,a]$.

Пример 4. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}\ \text{для}\ |x|<+\infty.$$

Решение. $U_n'(x)=\dfrac{n\left(1-n^5x^2\right)}{\left(1+n^5x^2\right)^2}=0$ при $x=\dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$. Значит, $\sup\limits_{|x|<+\infty}|U_n(x)|=\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$, но $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно на всей числовой оси и абсолютно.

Задания для самостоятельной работы

10.10. Найти область сходимости функционального ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-6x+12\right)^{n}}{4^{n}\left(n^2+1\right)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^{n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(\lg x)^{n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(3-x^2)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)!(x+1)^n$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n+x^2}$.

Ответы

10.10. а) $(-\infty;0)$; б) $[2;4]$; в) $\left(\frac{1}{e};e\right)$; г) $\left(\frac{1}{10};10\right)$; д) $\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)$; ж) $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

10.4. Степенные ряды

Краткие теоретические сведения

Определение. Функциональный ряд, членами которого являются степенные функции, называется *степенным рядом* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$.

Степенной ряд является частным случаем функционального ряда, поэтому все теоремы и свойства, справедливые для функциональных рядов, справедливы и для степенных рядов.

Для каждого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ существует *интервал сходимости* $E=\{x,\ |x-x_0|<R\}$, где $R\geq 0$ – *радиус сходимости*, который в случае $a_n\neq 0$ может быть вычислен по формулам $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$; $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, если эти пределы существуют (конечные или бесконечные). Область сходимости степенного ряда может включать, наряду с интервалом сходимости E этого ряда, концы интервала $x=x_0-R$, $x=x_0+R$. Для выяснения поведения степенного ряда на концах интервала сходимости надо исследовать числовые ряды, получаемые при подстановке этих точек в ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$.

Теорема. На всяком отрезке, целиком принадлежащим интервалу сходимости, степенной ряд сходится равномерно.

Следствие. Степенные ряды можно почленно интегрировать и дифференцировать на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}$.

Решение. Интервал сходимости можно найти, применяя признак Даламбера или Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда. Здесь $u_n=\frac{n^2|x-3|^n}{(n^4+1)^2}, u_{n+1}=\frac{(n+1)^2|x-3|^{n+1}}{((n+1)^4+1)^2}$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2|x-3|^{n+1}}{((n+1)^4+1)^2}}{\frac{n^2|x-3|^n}{(n^4+1)^2}}=|x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n^4+1)^2}{n^2((n+1)^4+1)^2}=|x-3|.$$

По признаку Даламбера для сходимости ряда предел должен быть меньше 1.

$|x-3|<1.$

$-1<x-3<1.$

$2<x<4.$

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка $(2;4)$.

Если $x = 4$, то получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^4+1)^2}$. Он сходится, так как этот ряд ведет себя как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

Если $x = 2$, то получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{(n^4+1)^2}$. Он сходится и притом абсолютно, так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

Окончательно получим, что область сходимости исследуемого ряда отрезок [2; 4].

Пример 2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5\cdot x^{2n}}{2n+1}.$$

Решение. Данный ряд является степенным. Он содержит только четные степени x, поэтому искать радиус интервала сходимости по соответствующей формуле нельзя. Зафиксируем x и исследуем сходимость получившегося числового ряда по признаку Даламбера.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^5\cdot x^{2n+2}\cdot(2n+1)}{(2n+3)\cdot(n+1)^5\cdot x^{2n}}\right|=|x|^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^5\cdot\frac{2n+1}{2n+3}=|x|^2.$$

Ряд сходится, если $\rho<1$, т.е. $|x|^2<1$, откуда $-1<x<1$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=\pm 1$ функциональный ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}(-1)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}.$$

Этот числовой ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{2n+1}=\infty\neq 0$. Поэтому область сходимости данного ряда $(-1;1)$.

Пример 3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}$.

Решение. Представим коэффициент перед переменной в виде суммы простейших дробей $\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}=\dfrac{1}{2n+2}-\dfrac{1}{2n+3}$. Теперь данный ряд можно представить в виде алгебраической суммы двух рядов:

$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{2n+3}=f_1(x)-f_2(x)$. Степенные ряды почленно интегрируются, поэтому $f_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x t^{2n+1}dt\right)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+1}\right)dt=\int_0^x\frac{t}{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}\ln\left|t^2-1\right|\Big|_o^x=-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|,$$

при $\left|x^2\right|<1$. При замене ряда функцией воспользовались известной формулой – суммы бесконечно убывающей прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n=\dfrac{b_1}{1-q}$, $|q|<1$.

$$f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^{2n+3}}{2n+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x t^{2n+2}dt\right)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x t^{2n+2}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+2}\right)dt=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}dt=\frac{1}{x}\int\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)dt=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-t\right)\Big|_0^x=$$

$$=\frac{1}{2x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1;\quad |x|<1.$$

$f(x)=f_1(x)-f_2(x)=-\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|-\dfrac{1}{2x}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+1$, при x ∈ (-1; 1).

Пример 4. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+9n+5\right)x^{n+1}$.

Решение. Представим коэффициент перед переменной в следующем виде $n^2+9n+5=(n+3)(n+2)+4(n+2)-9$. Тогда данная сумма распадается на три:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+9n+5\right)x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)x^{n+1}+4\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}-9\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$$

Степенные ряды можно почленно дифференцировать, поэтому

$$S_1=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{n+3}\right)''=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+3}\right)''=\left(\frac{x^3}{1-x}\right)''=\frac{2x^3-6x^2+6x}{(1-x)^3}$$

при $|x|<1$.

$$S_2=4\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}=4\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{n+2}\right)'=4\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)'=4\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=4\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$

при $|x|<1$.

$$S_3=9\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=9\frac{x}{1-x}.$$

При замене суммы функцией воспользовались известной формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$ при $|q|<1$.

В итоге: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+9n+5\right)x^{n+1}=\frac{2x^2-6x^2+6x}{(1-x)^3}+4\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}-9\frac{x}{1-x}$

$=\frac{5x-3x^3}{(1-x)^3}$ при $n\in(-1;\,1)$.

Задания для самостоятельной работы

10.11. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{3^n}(x+5)^n$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

10.12. Найти сумму ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}$;

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n(n-1)}$;

д) $\sum_{n=0}^{\infty}(2n^2+7n+5)x^{n+1}$;

е) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+5n+3)x^n$;

ж) $\sum_{n=0}^{\infty}(2n^2+8n+5)x^n$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$.

Ответы

10.11. а) $(-4;-2)$; б) $[0;4)$; в) $(-2;8]$; г) $[1;3]$; д) $(-2;4)$; е) $(-8;-2)$; ж) $[1;3]$; з) $[1;5)$.

10.5. Разложение функций в ряды

Краткие теоретические сведения

Говорят, что *функция* $f(x)$ *разлагается в степенной ряд* в $\varepsilon-$ окрестности точки x_0: $U(x_0, \varepsilon) = \{x|\ x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\}$, если для любой точки x из $U(x_0, \varepsilon)$ значение функции $f(x)$ есть сумма числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, где $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – некоторая последовательность действительных чисел. Этот факт обозначают следующим образом:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n.$$

Теорема. Если функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, то коэффициенты a_n при соответствующих степенях $(x-a)^n$ вычисляются по формуле:

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\ \ (n=0,1,2,\ldots),$$

где $f^{(n)}(a)$ – значение n-й производной функции $f(x)$ в точке a ($f^{(0)}(a)=f(a)$ – значение функции $f(x)$ в точке a).

Ряд $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ называют *рядом Тейлора* функции *f(x)*.

Эта теорема может быть сформулирована следующим образом: если функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, то этот ряд является её *рядом Тейлора* .

В частном случае, если $a=0$, ряд Тейлора принимает вид $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ и называется *рядом Маклорена* функции *f(x).*

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций в области их сходимости известны и имеют вид:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots(-\infty<x<+\infty);$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots(-\infty<x<+\infty);$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots(-\infty<x<+\infty);$$

$$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n=$$

$$=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots\ (|x|<1)$$

(m – любое действительное число, ряд называется биноминальным)

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ (|x|<1)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots(-1<x\le 1)$$

При разложении функции в ряд Тейлора применяются следующие методы:

1) непосредственное разложение функции в ряд Тейлора по определению;

2) использование известных разложений элементарных функций;

3) использование почленного дифференцирования и интегрирования рядов.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Разложить функцию $y=e^{3x-2}$ в степенной ряд по степеням (x – a) при a = 1. Определить область сходимости полученного ряда.

Решение. Ряд Тейлора для функции имеет вид:

$$y = y(a) + \frac{y'(a)}{1!}(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

В нашем случае: $y(1) = e; \quad y'(x) = 3e^{3x-2}; \quad y'(1) = 3e;$

$y''(x) = 9e^{3x-2}; \quad y''(1) = 9e;$

$y'''(x) = 27e^{3x-2}; \quad y'''(1) = 27e;$

……..

$y^{(n)}(x) = 3^n e^{3x-2}; \quad y^{(n)}(1) = 3^n e;$

Получаем разложение в ряд:

$$y = e + \frac{3e}{1!}(x-1) + \frac{9e}{2!}(x-1)^2 + \frac{27e}{3!}(x-1)^3 + \ldots + \frac{3^n e}{n!}(x-1)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n e}{n!}(x-1)^n.$$

Для определения области сходимости полученного ряда воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\cdot e\cdot(x-1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 3^n\cdot e\cdot(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3\cdot(x-1)}{n+1}\right| = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится при любом конечном значении x.

Тот же факт можно доказать, если воспользоваться формулой для нахождения радиуса сходимости:

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$, где a_n и a_{n-1} – коэффициенты ряда.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\cdot e\cdot n\cdot(n-1)!}{3(n-1)!\cdot 3^n\cdot e}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{3}\right| = |\infty|.$$

Полученный результат означает, что областью сходимости ряда является множество действительных чисел (-∞, +∞).

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = \frac{9}{(20 - x - x^2)}$ в ряд Тейлора по степеням x.

Решение. Разложим $f(x)$ на элементарные дроби:

$$\frac{9}{20 - x - x^2} = \frac{9}{(x+5)(4-x)} = \frac{1}{x+5} + \frac{1}{4-x}.$$

Воспользуемся готовой формулой: $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$ при $|x| < 1$.

$$\frac{1}{5+x} = \frac{1}{5\left(1+\frac{x}{5}\right)} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}x^n \text{ при } |x| < 5.$$

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4\left(1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{x}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}x^n \text{ при } |x|<4.$$

Сложив эти два выражения, окончательно получим:

$$\frac{9}{20-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)x^n \text{ при } |x|<1.$$

Пример 3. С точностью до e=0,001 вычислить интеграл $\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$.

Решение. Так как интегрирование производится в окрестности точки x=0, то можно воспользоваться для разложения подынтегральной функцией рядом Маклорена (ряд Маклорена – это ряд Тейлора при a = 0).

Разложение функции $\cos x$ имеет вид:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ при } x\in(-\infty;+\infty).$$

Зная разложение функции cos$x$, легко найти разложение функции 1–cos$x$: $1-\cos x=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ при $x\in(-\infty;+\infty)$.

В этой формуле суммирование производится по n от 1 до бесконечности, а в предыдущей – от 0 до бесконечности. Это – не ошибка, так получается в результате преобразования.

Теперь представим в виде ряда подынтегральное выражение:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}+\ldots+=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$$

при $x\in(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$.

Тогда интеграл представим в виде:

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^{0,5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}dx.$$

В предыдущем действии была применена теорема о почленном интегрировании ряда (т.е. интеграл от суммы был представлен в виде суммы интегралов от членов ряда). Для применения этой теоремы необходимо показать, что ряд сходится равномерно на отрезке интегрирования [0, 0,5]. Это требование выполняется, т.к. равномерная сходимость степенного ряда следует (по теореме Абеля) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$ в точке $x=0,5$.

Радиус сходимости этого ряда равен:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-2}\cdot(2n)!}{(2n-2)!\cdot(-1)^{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|2n(2n-1)\right|=\left|\infty\right|$$ т.е. ряд сходится при любом конечном значении x.

Итак,

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^{0,5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\int_0^{0,5}x^{2n-2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\Big|_0^{0,5}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 0,5^{2n-1}}{(2n)!(2n-1)}.$$

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!(2n-1)2^{2n-1}}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 2^3\cdot 4!}+\frac{1}{5\cdot 2^5\cdot 6!}-\ldots=0,25-0,00174+0,0000086-\ldots=$$

$$\approx 0,248$$

Видим, что абсолютные величины членов ряда очень быстро уменьшаются, и требуемая точность достигается уже при третьем члене разложения.

Для справки: точное (вернее – более точное) значение этого интеграла: 0,2482725418…

Пример 4. Найти 3 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения:

$$y''=x+y^2;\qquad н.у.\quad y(0)=0;\quad y'(0)=0;$$

Решение. При данных начальных условиях решение уравнения будем искать в виде разложения в ряд Маклорена:

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Осталось только определить коэффициенты ряда. Первые два коэффициента уже известны из начальных условий. Для определения третьего коэффициента подставим начальные условия в дифференциальное уравнение:

$$y''(0)=0+0^2=0.$$

Таким образом, первые три члена разложения равны 0.

Для нахождения следующих членов разложения дифференцируем по x обе части дифференциального уравнения:

$$y'''=1+2yy';\quad y'''(0)=1;$$

Первый ненулевой член разложения: $\frac{x^3}{3!}$.

Для нахождения следующего члена разложения вновь дифференцируем только что полученное выражение по x. Находим значение в нуле и т.д. пока не получим еще два ненулевых члена разложения. При при наших начальных условиях придется дифференцировать 13 раз (!!!):

$$y^{IV} = 2y'y' + 2yy'' = 2y'^2 + 2yy''; \quad y^{IV}(0) = 0;$$
$$y^{V} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''; \quad y^{V}(0) = 0;$$
$$y^{VI} = 6y''y'' + 6y'y''' + 2y'y''' + 2yy^{IV} = 6y''^2 + 8y'y''' + 2yy^{IV}; \quad y^{VI}(0) = 0;$$
$$y^{(7)} = 12y''y''' + 8y''y''' + 8y'y^{IV} + 2y'y^{IV} + 2yy^{V} = 20y''y''' + 10y'y^{IV} + 2yy^{V}; \quad y^{(7)}(0) = 0;$$
$$y^{(8)} = 20y'''y''' + 20y''y^{IV} + 10y''y^{IV} + 10y'y^{V} +$$
$$+2y'y^{V} + 2yy^{VI} = 20y'''^2 + 30y''y^{IV} + 12y'y^{V} + 2yy^{VI};$$
$$y^{(8)}(0) = 20;$$

Нашли второй ненулевой член разложения: $\frac{20x^8}{8!}$.

$$y^{(9)} = 40y'''y^{IV} + 30y'''y^{IV} + 30y''y^{V} + 12y''y^{V} + 12y'y^{VI} + 2y'y^{VI} + 2yy^{(7)} =$$
$$= 70y'''y^{IV} + 42y''y^{V} + 14y'y^{VI} + 2yy^{(7)};$$
$$y^{(9)}(0) = 0;$$
$$y^{(10)} = 70y^{IV}y^{IV} + 70y'''y^{V} + 42yy'''y^{V} + 42y''y^{VI} + 14y''y^{VI} + +14y'y^{(7)} + 2y'y^{(7)} + 2yy^{(8)} =$$
$$= 70y^{IV2} + 112y'''y^{V} + 56y''y^{VI} + 16y'y^{(7)} + 2yy^{(8)};$$
$$y^{(10)}(0) = 0;$$
$$y^{(11)} = 140y^{IV}y^{V} + 112y^{IV}y^{V} + 112y'''y^{VI} + 56y'''y^{VI} +$$
$$+56y''y^{(7)} + 16y''y^{(7)} + 16y'y^{(8)} + 2y'y^{(8)} + 2yy^{(9)} =$$
$$= 252y^{IV}y^{V} + 168y'''y^{VI} + 72y''y^{(7)} + 18y'y^{(8)} + 2yy^{(9)}; \; y^{(11)}(0) = 0;$$
$$y^{(12)} = 252y^{V}y^{V} + 252y^{IV}y^{VI} + 168y^{IV}y^{VI} +$$
$$+168y'''y^{(7)} + 72y'''y^{(7)} + 72y''y^{(8)} + 18y''y^{(8)} +$$
$$+18y'y^{(9)} + 2y'y^{(9)} + 2yy^{(10)} = 252y^{V2} +$$
$$+420y^{IV}y^{VI} + 240y'''y^{(7)} + 90y''y^{(8)} + 20y'y^{(9)} + 2yy^{(10)};$$
$$y^{(12)}(0) = 0;$$
$$y^{(13)} = 504y^{V}y^{VI} + 420y^{V}y^{VI} + 420y^{IV}y^{(7)} + 240y^{IV}y^{(7)} + 240y'''y^{(8)} + 90y'''y^{(8)} +$$
$$+90y''y^{(9)} + 20y''y^{(9)} + 20y'y^{(10)} + 2y'y^{(10)} + 2yy^{(11)} = 924y^{V}y^{VI} + 660y^{IV}y^{(7)} +$$
$$+330y'''y^{(8)} + 110y''y^{(9)} + 22y'y^{(10)} + 2yy^{(11)};$$
$$y^{(11)}(0) = 330 \cdot 1 \cdot 20 = 6600;$$

Теперь найден третий ненулевой член разложения: $\frac{6600}{13!}x^{13}$. Таким образом, решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \frac{x^3}{3!} + \frac{20x^8}{8!} + \frac{6600x^{13}}{13!} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^8}{2016} + \frac{x^{13}}{943488};$$

Подставим полученный результат в исходное уравнение:

$$y' = \frac{x^2}{2} + \frac{x^7}{252} + \frac{x^{12}}{72576}; \qquad y'' = x + \frac{x^6}{36} + \frac{x^{11}}{6048};$$

$$x + \frac{x^6}{36} + \frac{x^{11}}{6048} = x + \frac{x^6}{36} + \frac{x^{11}}{6048} + \frac{95x^{16}}{158505984} + \frac{x^{21}}{951035904} + \frac{x^{26}}{890169606144};$$

Видим, что при x достаточно близких к начальным условиям, последние три слагаемых практически равны нулю, и равенство выполняется.

Задания для самостоятельной работы

10.13. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $x - a$.

а) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$, $a = 0$;

б) $f(x) = 5^x, a = 0$;

в) $f(x) = \ln\frac{1}{x^2 - 2x + 2}, a = 1$;

г) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}, a = -2$;

д) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}, a = -3$;

е) $f(x) = x^3 arctgx$, $a = 0$;

ж) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$, $a = 0$;

з) $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$, $a = 0$.

10.14. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

а) $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$;

б) $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x} dx$;

в) $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + \frac{x^2}{4}} dx$;

г) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

д) $\int_0^{0,5} \frac{1 - arctgx}{x^2} dx$;

е) $\int_0^1 \cos\frac{x^2}{4} dx$.

ж) $\int_0^{0,5} \frac{arctgx^2}{x^2} dx$;

з) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$

10.15. Вычислить указанную величину приближенно с заданной степенью точности α, воспользовавшись разложением в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции:

а) $\sqrt[5]{250}$, $\alpha = 0,01$;

б) $\sin 1$, $\alpha = 0,00001$;

в) $arctg\frac{\pi}{10}$, $\alpha = 0,001$;

г) $\sqrt{1,3}$, $\alpha = 0,001$;

д) e^2, $\alpha = 0,001$;

е) $\sqrt[3]{80}$, $\alpha = 0,001$;

ж) $\cos 2^0$, $\alpha = 0,001$;

з) $\sqrt[3]{8,36}$, $\alpha = 0,001$.

10.16. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

а) $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$; б) $y' = x^2y^2 + 1$, $y(0) = 1$;

в) $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$; г) $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$;

д) $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$; е) $y' = x + y + y^2$, $y(0) = 1$;

ж) $y' = x - 2y^2$, $y(0) = 0{,}5$; з) $y' = x\sin x - y^2$, $y(0) = 1$.

Ответы

10.13. а) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}, |x| < 1$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n \ln^n 5}{n!}, |x| < \infty$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n}$, $0 \le x \le 2$;

г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6\cdot 3^n} - \frac{1}{10\cdot 5^n}\right)(x+2)^n$, $-5 < x < 1$; д) $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^n n!}(x+3)^n$, $-4 < x \le -2$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+2}}{2n-1}$, $|x| \le 1$; ж) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}$, $|x| < \infty$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-2}$, $|x| < \infty$. **10.14.** а)0,461 ;б) 0,493; в) 1,026; г) 0,098; д) 0,039; е) 0,994; ж) 0,498; з) 0,484. **10.16.** а) $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots$; б) $y = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$; в) $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \ldots$;

г) $y = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \ldots$; д) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \ldots$; е) $y = 1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \ldots$;

ж) $y = 0{,}5 - 0{,}5x + x^2 + \ldots$; з) $y = 1 - x + x^2 + \ldots$.

10.6. Приложения в экономике теории рядов

Краткие теоретические сведения

Контракты, сделки, коммерческие и производственно-хозяйственные операции часто предусматривают не отдельные разовые платежи, а множество распределенных во времени выплат и поступлений. Отдельные элементы такого ряда, а иногда и сам ряд платежей в целом, называется *потоком платежей*. Члены потока платежей могут быть как положительными (поступления), так и отрицательными (выплаты) величинами. Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют *финансовой рентой*. Ренты делятся на годовые и *p*-срочные, где *p* характеризует число выплат на протяжении года. Это дискретные ренты. В финансово-экономической практике встречаются и с последовательностями платежей, которые производятся так часто, что практически их можно рассматривать как непрерывные. Такие платежи описываются непрерывными рентами.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и текущая сумма. *Наращенной суммой потока платежей* называется сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами. *Текущей суммой потока платежей* зазывают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на текущий момент времени.

Под *вечной рентой* понимается последовательность платежей, число членов которой не ограничено – она выплачивается в течение бесконечного числа лет. Вечная рента не является чистой абстракцией – на практике это некоторые виды облигационных займов, оценка способности пенсионных фондов отвечать по своим обязательствам.

Существуют различные способы начисления процентов, соответственно применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной суммы для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются *простыми*, а во втором – с*ложными* процентными ставками.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Пусть на расчетный счет в течение n лет в конце года поступает M руб. Проценты начисляются в конце года по ставке i. Определите наращенную сумму и текущую сумму на начальный момент времени данного потока платежей.

*Решение***.** 1. Определим наращенную сумму потока платежей. Первый взнос к концу срока ренты возрастет до суммы $M(1+i)^{n-1}$, так как на сумму M проценты начислялись в течение $(n-1)$ лет. Второй взнос увеличится до $M(1+i)^{n-2}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты её наращенная сумма равна

$$S = M + M(1+i) + M(1+i)^2 + \ldots + M(1+i)^{n-1}.$$

Это сумма n-первых членов геометрической прогрессии, в которой первый член равен M, а знаменатель – $(1+i)$. Эта сумма равна

$$S = \frac{M\left((1+i)^n - 1\right)}{i} \text{ руб.}$$

2. Определим текущую сумму потока платежей к началу ренты. Дисконтированная величина первого платежа $M/(1+i)$, второго $-M/(1+i)^2$ и т.д. Таким образом, общая сумма дисконтированных величин равна

$$S = M/(1+i) + M/(1+i)^2 + M/(1+i)^3 + \ldots + M/(1+i)^n.$$

Это сумма n членов геометрической прогрессии, в которой первый член равен M, а знаменатель – $1/(1+i)$. Эта сумма равна

$$S = \frac{M\left(1+(1+i)^{-n}\right)}{i} \text{ руб.}$$

Пример 2. Найдите начальную стоимость вечной ренты, гарантирующей ежегодное поступление на счет *M* рублей и начисление процентов по ставке *i*. Обе операции производятся в конце каждого года.

*Решение***.** Повторив рассуждения второй части решения примера 2., представим начальную стоимость вечной ренты в виде бесконечной суммы дисконтированных величин ежегодных платежей:

$$S = M/(1+i) + M/(1+i)^2 + M/(1+i)^3 + \ldots + M/(1+i)^n + \ldots.$$

Этот числовой ряд представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию, первый член которой равен *M/(1+i)*, а знаменатель $q = 1/(1+i)$. Так как $|q| < 1$, ряд сходится и его сумма равна

$$S = \frac{\frac{M}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{M}{i}.$$

Задания для самостоятельной работы

10.17. Господин N планирует накопить за 7 лет 600000 руб. для оплаты обучения сына. Какую сумму он должен в конце каждого месяца вносить на банковский счет при сложной годовой учетной ставке 4 %, начисляемых в конце года?

10.18. Решите задачу 1. при условии, что проценты начисляются ежеквартально.

10.19. Центральный банк РФ покупает правительственные облигации у частных владельцев на 100 миллионов руб. Это создает 100 миллионов «новых» денег и вызывает цепную реакцию банковской системы. Когда эти 100 миллионов поступят на счета частных банков, банки оставят только 15 % в резерве и могут кредитовать остальные 85 %, дополнительно создавая 85 миллионов руб. Компании, которые получают эти деньги, потратят их, а получатели вновь смогут разместить деньги на своих банковских счетах. Предположим, что все эти 85 миллионов повторно депонированы, банки могут снова дать взаймы 85 % этой суммы, создавая 0,85*85 миллионов дополнительных рублей. Этот процесс может быть повторен сколько угодно раз. Вычислите общую сумму «новых» денег, которые могут быть созданы теоретически этим процессом помимо исходных 100 миллионов.

10.20. Пусть Центральный банк РФ, как в задаче 3., выпускает на финансовый рынок 100 миллионов рублей. Частные банки предоставляют в виде кредитов 85 % полученных средств. Предположим, что только 80% каждого кредита повторно депонируется в банках. Таким образом, если общая сумма первого кредитования была равна 0,85*100 миллионов рублей, то вторая общая сумма банковских кредитов составит 85 % от 0,80*0,85*100 миллионов руб. Этот процесс продолжается бесконечно. Определите общую сумму дополнительных средств, которые поступят на финансовый рынок в результате акции Центрального банка РФ.

10.21. Господин N приобрел полис страхования жизни. Согласно договору страховая компания после смерти господина N разместит сумму, равную стоимости полиса страхования, в целевой фонд по ставке 8 %, начисляемых непрерывно. В конце каждого года компания должна выплачивать наследникам 10000 руб. бессрочно. Определите стоимость данного страхового полиса.

10.22. Господин N владеет земельным участком, который сдаёт в аренду за 45000 руб. в год. Арендатор хочет выкупить участок за 1 млн. рублей. Следует ли господину N продать участок, если банковская процентная ставка равна 7 %?

10.23. Определите текущую стоимость бессрочной облигации, генерирующей ежеквартальный поток платежей по 500 руб. при банковской учетной ставке 5 %.

Ответы

10.17. 6217,30 руб. **10.18.** 6204,25 руб. **10.19.** 566666667 руб. **10.20.** 265625000 руб. **10.21.** 120066,66 руб. **10.22.** Да. **10.23.** 40742,38 руб.

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа № 21 по теме «Числовые ряды»

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3^n}{12^n}$

2. Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами.

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}}{n!}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$; В) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(7n-5)^3}}$; Г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+6)}$.

3. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$

Контрольная работа № 22 по теме «Функциональные ряды»

1. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}$.

2. Вычислить интеграл $\int_0^{1/2}\sin x^3 dx$ с точностью до 0,001.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов : учеб. пособие / А. М. Ахтямов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с. – ISBN 5-9221-0460-8.

2. Байгушева И. А. Математический анализ для экономистов : учеб.-метод. пособие : в 3 ч. / И. А. Байгушева, С. З. Кенжалиева, Е. И. Анюшина, А. Р. Гайсина. – Астрахань : Астраханский университет, 2008. – Ч. 3. – ISBN 978-5-9926-0068-1.

3. Вэриан Х. Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход : учеб. для вузов / Хэл Р. Вэриан ; пер. с англ. под ред. Н. Л. Фроловой. – М. : ЮНИТИ, 1997. – 767 с. – ISBN 5-85173-072-2.

4. Замков О. О. Математические методы в экономике : учеб. / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. – 2-е изд. – М. : Дело и сервис, 1999. – 368 с. – ISBN 5-86509-054-2.

5. Красс М. С. Математика для экономистов : учеб. пособие / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. – 464 с. – ISBN 5-94723-672-9.

6. Кузнецов Б. Т. Математика : учеб. для вузов / Б. Т. Кузнецов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 719 с. – ISBN 5-238-00754-X.

7. Мэнкью Н. Г. Макроэкономика : пер. с англ. : учеб. / Н. Г. Мэнкью. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 736 с. – ISBN 5-211-03213-6.

8. Пильтяй Г. З. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Г. З. Пильтяй, А. Г. Князев. – Астрахань : Астраханский университет, 2002. – 102 с. – ISBN 5-88200-703-8.

9. Райзберг Б. А. Современный экономический словарь / Б. А. Райзберг, Л. Ш. Лозовский, Е. Б. Стародубцева. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Инфра-М, 2006. – 495 с. – ISBN 5-16-002705-X.

10. Солодовников А. С. Математика в экономике : учеб. : в 2 ч. / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. – М. : Финансы и статистика, 2001. – Ч. 2. – ISBN 5-279-01943-7.

Григорий Захарович Пильтяй,
Инна Анатольевна Байгушева,
Альфия Рафаилевна Гайсина

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Техническое редактирование *С.Н. Лычагиной*
Компьютерная правка, верстка *А.Т. Мендбаевой*

Заказ № 2607. Тираж 200 экз. (первый завод 50 экз.).
Уч.-изд. 23,4 л. Усл.-печ. 21,8 л.

Издательский дом «Астраханский университет»
414056, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а
Тел. (8512) 48-53-47 (отдел маркетинга), 48-53-45,
48-53-44, тел./факс (8512) 48-53-46
E-mail: asupress@yandex.ru