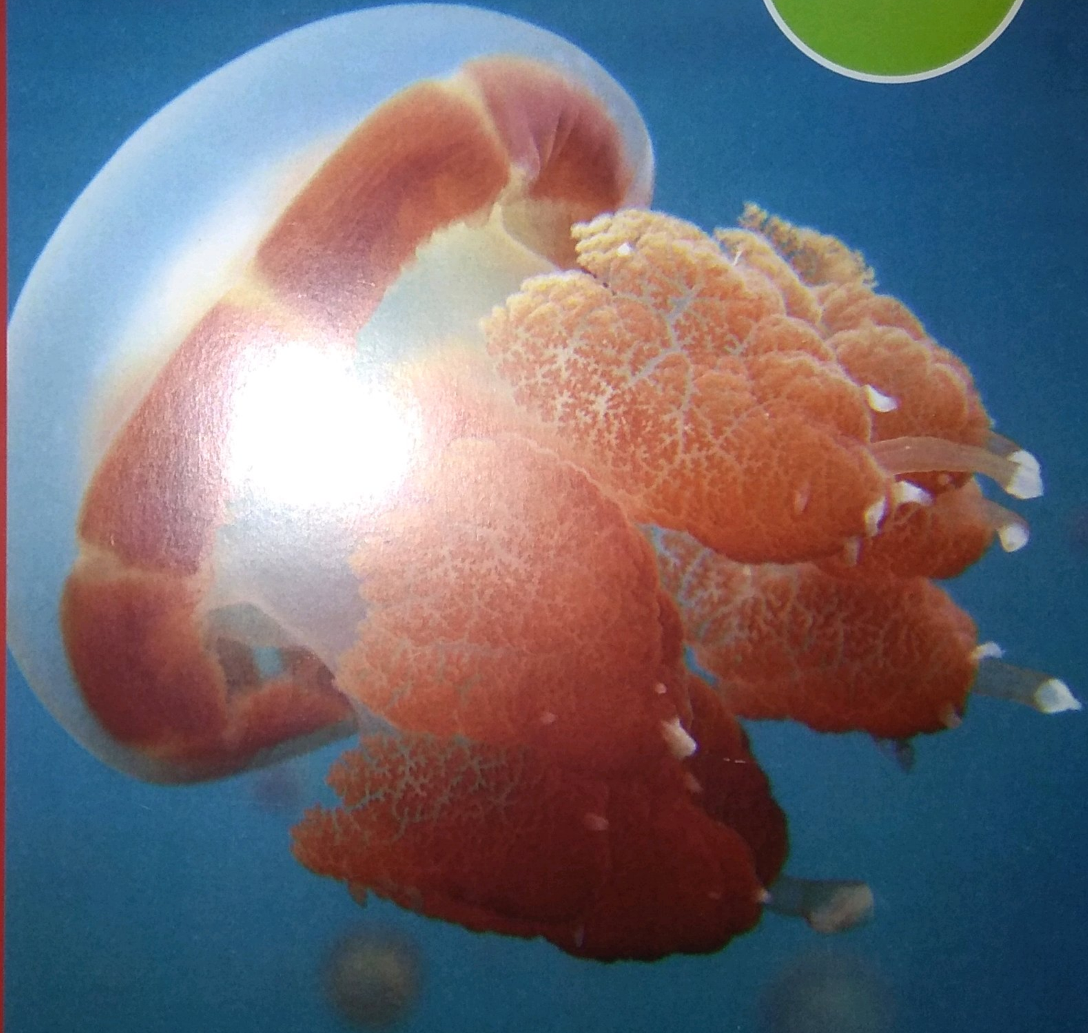
ISSN: 2542-0348

ИНТЕРНАУКА

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

11(93)



internauka.org

г. Москва

О ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЯ РАЗВЕТВЛЕНИЯ С СИММЕТРИЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ГРУПП

Юлдашев Нурилла Нигматович
канд. физ.-мат. наук, доцент, Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Узбекистан, г. Ташкент

Сафарбаева Нигора Мустафаевна
старший преподаватель, Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Узбекистан, г. Ташкент

Теория ветвления решений нелинейных уравнений [1] изучает вопросы о существовании, количестве малых решений нелинейного уравнения

$$Bx = R(x,\varepsilon), R(0{,}0) = 0, Rx(0{,}0) = \\ = 0, B, R(\cdot,\varepsilon): E_1 \to E_2$$

(E_i-банаховы пространства) и построении их асимптотики, когда не выполнены условия существования неявной функции. Метод Ляпунова-Шмидта сводит [1] эту задачу к конечномерной– построению и исследованию уравнения разветвления (УР). В [2] доказана теорема о том, что УР наследует групповую симметрию исходного нелинейного уравнения и (в гл.4) рассмотрена задача построения УР по допускаемой им группе. Здесь это построение рассмотрено при симметрии УР относительно плоских и пространственных кристаллографических групп на двух конкретных физических примерах разыскания периодических решений нелинейных уравнений–трехмерной задачи о капилярно-гравитационных волнах в слое жидкости над ровным дном и задачи о фазовых переходах в статистической теории кристалла (случаи произвольных решеток периодичности не вызывают принципиальных затруднений). Если в [2] оно осуществлялось по схеме из теории инвариантов, изложенной в [3, гл.I] ,то здесь используются методы группового анализа дифференциальных уравнений [4,5,6] при значительно меньшем объеме вычислительной работы. Принятые ниже терминология и обозначения из теории ветвления решений нелинейных уравнений согласованы с [1,2].

УР $f(\cdot,\varepsilon) = \{f_j(\cdot,\varepsilon)\}_1^m: \Xi^n \to \Xi^m$ допускает группу G (инвариантно относительно G), если для некоторых ее представлений

$$\mathcal{A}_g = \|a_{ij}(g)\|_{n\times n} \text{ и } \mathcal{B}_g = \|\beta_{ij}(g)\|_{m\times m}$$
$$f(\mathcal{A}_g\xi,\varepsilon) = \mathcal{B}_g f(\xi,\varepsilon); \qquad (1.1)$$

всюду ниже предполагается, что функции f_j аналитичны в окрестности $\xi = 0, \varepsilon = 0$ и УР вещественно, т.е. f коммутирует с операцией $\mathcal{J}$ комплексного сопряжения. Далее иногда мы не будем указывать явно зависимость f от малого параметра ε, не являющуюся существенной для группового анализа.

Равенство (1.1) означает, что многообразие $\mathcal{F}$: f-$f(\xi)$=0 в пространстве Ξ^{n+m} является инвариантным относительно группы преобразований.

$$\xi' = \mathcal{A}_g\xi, f' = \mathcal{B}_g f \qquad (1.2)$$

Рассматривая ℓ- параметрическую группу (1.2), предполагаем, что $\mathcal{F}$ является не особым инвариантным многообразием, т.е., если $\{(X_\nu, F_\nu)\}_1^\ell$базис алгебры Ли группы (1.2), то ранг$r(M)|_{\mathcal{F}}$ матрицы $M=[X_\nu^i, F_\nu^i]$(ν =1,…,ℓ ; i =1 ,…, n;j =n+1,..,n+m, ν – номер строки, i ,j– номера столбцов) на многообразии F совпадает с ее общим рангом $r\star$. Если

$$I_1(\xi,f), \dots, I_{n+m-r\star}(\xi,f) \qquad (1.3)$$

Определяемая M система функционально независимых инвариантов группы (1.2), то (см.[5,§18]) многообразие $\mathcal{F}$ можно представить в виде

$$\Phi^s(I_1 \dots\dots, I_{n+m-r\star}) = 0, s = 1,\dots,m.$$

и для построения общего вида УР должно быть выявлено условие

$rank[\frac{\partial I_k}{\partial f_i}]=m$ независимости системы (1.3) по отношению к переменным f. Это условие можно заменить требованием $r\star(X,F)=r\star(X)$ [4,с 250].

<u>Задача о кристаллизации.</u> Фазовые переходы в статистической теории кристалла описываются в [7] нелинейным интегральным уравнением типа Гаммерштейна с трехкратным интегралом, ядро которого зависит от

$$r(\bar{p},\bar{q}) = |\bar{p}-\bar{q}|$$

полученным на основе «расцепления» уравнения цепочки Н.Н. Боголюбова, связывающего простую и бинарную плотности распределения частиц.

При построении малых периодических решений, ответвляющихся отрешения отвечающего однородной по всему пространству плотности распределения, ограничимся [2] случаем простой кубической решетки. Возможные значения $n=dimN(B)$ тогда являются делителями 6,8,12,24,48, порядка $|O_h|$ =48 группы куба или равны некоторым суммам этих делителей ($n = n_s$ равно числу представлений целого Sв виде суммы трех квадратов).

Здесь мы приведем (см. [8]) построение общего вида УР для

$$S=2,\ n_2=12$$

$$\ell_1=(\bar e_1+\bar e_2),\quad \ell_3=(\bar e_1-\bar e_2),\ \ell_5=(\bar e_1+\bar e_3),\quad \ell_7=(\bar e_1-\bar e_3),$$
$$\ell_9=(\bar e_2+\bar e_3),\quad \ell_{11}=(\bar e_2-\bar e_3),\quad \ell_{2j}=-\ell_{2j-1}. \tag{1.4}$$

Трехпараметрическая группа сдвигов индуцирует в $N(B)=span\{e^{2\pi i<l_k,\bar q>}\}$ представление $\mathcal{A}_\beta$ вида (1.1). УР инвариантно также относительно подстановок p вершин кубооктаэдра, занумерованных в соответствии с (1.4). Инвариантность его относительно комплексного сопряжения влечет вещественность коэффициентов УР.

Базис алгебры Ли группы вращений вида (1.1), индуцированной в Ξ^{12} трехмерными сдвигами имеет вид

$$X_1=(-\xi_1,\xi_2,-\xi_3,-\xi_4,-\xi_5,\xi_6,-\xi_7,\xi_8,0,0,0,0),$$
$$X_2=(-\xi_1,\xi_2,\xi_3,-\xi_4,0,0,0,0,-\xi_9,\xi_{10},-\xi_{11},\xi_{12}),$$
$$X_3=(0,0,0,0,-\xi_5,\xi_6,\xi_7,-\xi_8,-\xi_9,\xi_{10},\xi_{11},-\xi_{12}).$$

Полная система функционально независимых инвариантов группы $\xi'=\mathcal{A}_\beta\xi,\ f'=\mathcal{A}_\beta f$, определяемая системой дифференциальных уравнений $X_v^i\frac{\partial I}{\partial \xi_i}+F_v^i\frac{\partial I}{\partial f_i}=0$,

$V=1,2,3$, состоит из 12 инвариантов вида f_k/ξ_k, 6 инвариантов вида $\xi_{2k-1}\xi_{2k}$ и трех инвариантных мономов третьей степени $I_{19}=\xi_1\xi_6\xi_{12}$, $I_{20}=\xi_2\xi_7\xi_9$, $I_{21}=\xi_3\xi_8\xi_{11}$.

Всего имеется 8 инвариантных мономов третьей степени $I_{19}, I_{19},\dots\dots\dots, I_{22}=\xi_4\xi_5\xi_{10}, I_{22}$, связанных соотношениями

$$I_{19}I_{20}I_{22}=(\xi_1\xi_2)(\xi_5\xi_6)(\xi_9\xi_{10})\bar I_{21},\ I_{19}I_{21}I_{22}=(\xi_3\xi_4)(\xi_5\xi_6)(\xi_{11}\xi_{12})\bar I_{20},$$
$$I_{19}I_{20}I_{21}=(\xi_1\xi_2)(\xi_7\xi_8)(\xi_{11}\xi_{12})\bar I_{22},\ I_{20}I_{21}I_{22}=(\xi_3\xi_4)(\xi_7\xi_8)(\xi_9\xi_{10})\bar I_{19},$$
$$I_{19}I_{20}I_{21}I_{22}=(\xi_1\xi_2)\dots\dots(\xi_{11}\xi_{12}). \tag{1.5}$$

Для учета всех возможных однородных членов в разложении УР кроме

I_{19}, I_{20}, I_{21} надо использовать также I_{22}.

Первое уравнение системы разветвления записывается в виде

$$f_1(\xi,\varepsilon)=C_0(\varepsilon)\xi_1+\sum_{p,q}C_{pq}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{p_1}\dots(\xi_{11}\xi_{12})^{p_6}\xi_1[(\xi_1\xi_6\xi_{12})^{q_1}\times(\xi_2\xi_7\xi_9)^{q_2}(\xi_3\xi_8\xi_{11})^{q_3}(\xi_4\xi_5\xi_{10})^{q_4}]^{out}=0,$$

Где символ $[\dots]^{out}$ означает, что внутри скобки отброшены сомножители вида $\xi_{2k-1}\xi_{2k}$, т.е. произведена факторизация по связям (1.5). Остальные 11 уравнений найдутся из условия групповой симметрии УР относительно подстановок p вершин кубооктаэдра (1.4).

Список литературы:

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. –М.: Наука, 1969. -424 с
2. Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. – Ташкент: ФАН, 1985. -184 с.
3. Дьедоне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов /Пер. с англ. Под ред. А.Н. Паршина. –М.: Мир, 1974. – 280с.
4. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. –М.: Наука, 1978. -399 с.
5. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А. Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнение ферромагнетика Гейзенберга. –ТМФ, т.38, 1979, с.26-35.
6. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука , 1983.-280с.
7. Тябликов С.В. К вопросу о кристаллизации. –ЖЭТФ, т.17, №5, 1947, с.386-389.
8. Логинов Б.В., Рахматова Х.Р. , Юлдашев Н. О построении уравнения разветвления по его группе симметрии (кристаллографические группы). –в кн.: Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. – Ташкент: ФАН, 1987, с.128-142.
9. Кузнесов А.О., Логинов Б.В. Вычисление малых периодических решений трехмерной задачи о волнах над ровным дном в случаях высокого вырождения.-В.: Неклассические уравнения математической физике и задаче теории ветвления. – Ташкент: Фан, 1998, с.104-117.