Matematika Instituti Byulleteni
2020,№1, 127-135 b.

Bulletin of the Institute of Mathematics
2020,№1, pp.127-135

Бюллетень Института математики
2020,№1, стр.127-135

Задача Хольмгрена для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом

Эргашев Т. Г. [1], Сафарбаева Н. М. [2]

Bitta singular koeffisientli ko'p o'lchivli Gelmgolts tenglamasi uchun Xolmgren masalasi

Bitta singular koeffisientli ko'p o'lchovli Gelmgolts tenglamasining yarim fazodagi fundamental yechimlari ma'lum edi. Ushbu maqolada mana shu tenglama uchun yarim sferik sirt bilan chegaralangan sohada Xolmgren masalasi o'rganilgan. Ko'p olchovli Gelmgolts tenglamasi fundamental yechimining xossalari yordamida Grin funksiyasi tuzilib, masalaning yogona yechimi oshkor ko'rinishda topilgan.
Kalit so'zlar: Singular koeffisientli ko'p o'lchovli Gelmgolts tenglamasi; Xolmgren masalasi; fundamental yechim; Grin funksiyasi.

Holmgren problem for multidimensional Helmholtz equation with one singular coefficient

Fundamental solutions for the multidimensional Helmholtz equation with one singular coefficient in the half-space were found recently. In this paper, Holmgren problem for the above-mentioned elliptic equation in a finite simply connected domain is studied. Using the properties of one of the fundamental solutions, the Green's function was constructed, with the help of which the solution of the problem in the finite region bounded by the multidimensional hemisphere was found explicitly.
Keywords: Multidimensional elliptic equations with one singular coefficient; Holmgren problem; fundamental solution; Green's function method.

MSC 2010: 35A08, 35J25;35J70, 35J75
Ключевые слова: Многомерное эллиптическое уравнение с одним сингулярным коэффициентом; задача Хольмгрена; фундаментальное решение; функция Грина.

Введение

Известно, что теория краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами является одним из центральных разделов современной теории уравнений в частных производных, которые встречаются при решении многих важных вопросов прикладного характера [1, 2]. Подробную библиографию и изложений исследований основных краевых задач для вырождающихся уравнений

[1]Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан. E-mail: ergashev.tukhtasin@gmail.com
[2]Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан. E-mail: akmal09.07.85@mail.ru

различного типа, в частности, для двумерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами можно найти в монографиях [3, 4, 5].

При исследовании краевых задач для эллиптических уравнений всех (двух или более) размерностей с сингулярными коэффициентами важную роль играют фундаментальные решения данного уравнения. Фундаментальные решения двумерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом (уравнения Трикоми) были известны еще в первой половине прошлого столетия и они успешно использованы при решении основных краевых задач и построении теории потенциала для этого уравнения, а для такого же уравнения с двумя сингулярными коэффициентами фундаментальные решения, которые выражаются через гипергеометрические функции Аппеля двух переменных, построены в [6] и используя известные формулы разложения функций Аппеля двух переменных по гипергеометрическим функциям Гаусса, решения краевых задач найдены в явном виде.

Настоящая работа посвящается исследованию задачи Дирихле для одного сингулярного уравнения Гельмгольца. Фундаментальные решения двумерных и трехмерных уравнений Гельмгольца с двумя и тремя сингулярными коэффициентами, соответственно, построены в работах [7, 8] и эти фундаментальные решения применены к нахождению явных решений основных краевых задач для уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами [9, 10, 11, 12, 13]. К такому направлению исследований примыкают также работы [14, 15].

В недавно опубликованных работах [16, 17, 18, 19] найдены фундаментальные решения для многомерных (более трехмерных) уравнений Гельмгольца с одним, двумя и тремя сингулярными коэффициентами, соответственно. Как известно, фундаментальные решения уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами выражаются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию, число переменных которой зависит от числа сингулярных коэффициентов уравнения и для исследования свойств любой гипергеометрической функции многих переменных необходимы формулы разложения, позволяющие представить эту функцию многих переменных через бесконечную сумму произведений нескольких гипергеометрических функций с одной переменной, а это, в свою очередь облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных. В [20] введен в рассмотрение новый класс конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных, через которых выписываются фундаментальные решения для одного многомерного уравнения Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами и доказана формула разложения для нововведенных конфлюэнтных функций, дающая возможность определить порядок особенности найденных фундаментальных решений.

Настоящая работа посвящена к нахождению явного решения задачи Хольмгрена для уравнения

$$H_{\beta}^{(m,\lambda)}(u) := \sum_{k=1}^{m-1} u_{x_k x_k} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y} u_y - \lambda^2 u = 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области, ограниченной в полупространстве $y > 0$, где $m \geq 2$ – размерность пространства, β и λ – действительные числа, причем $0 < 2\beta < 1$.

Отметим, что данная публикация продолжает серию работ, посвященных исследованию уравнения (1): в [21] решена задача Дирихле в многомерном полушаре для уравнения $H_{\beta}^{(m,\lambda)}(u) = 0$, а в [22] – задача Хольмгрена для уравнения (1), но только при $\lambda = 0$.

При исследовании поставленной задачи важную роль играют фундаментальные решения уравнения (1), которые выписываются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию Горна от двух переменных [23]:

$$\mathrm{H}_3(a, b; c; z, t) = \sum_{n,l=0}^{\infty} \frac{(a)_{n-l}(b)_n}{(c)_n n! l!} z^n t^l, \quad |z| < 1, \tag{2}$$

где $a,\ b$ и c – постоянные, причем $c \neq 0, 1, 2, ...$, а $(\alpha)_\kappa$ – известный символ Похгаммера: $(\alpha)_0 = 1, (\alpha)_\kappa := \alpha(\alpha+1)\cdot ... \cdot(\alpha+\kappa-1),\ \ \kappa = 1, 2, ...$

Кроме того, имеет место следующая формула разложения [20] для конфлюэнтной гипергеометрической функции Горна от двух переменных, определенной формулой (2):

$$\mathrm{H}_3(a, b; c; z, -t) = F(a, b; c; z)\, i_{1-a}\left(2\sqrt{t}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^{k+l}(k-1)!(b)_k}{l!(l-1)!\,(k-l)!(c)_k(1-a)_l} z^k t^l F(a+k, b+k; c+k; z)\, i_{1-a+l}\left(2\sqrt{t}\right), \tag{3}$$

где $F(a,b;c;z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n$, $|z| < 1$ – гипергеометрическая функция Гаусса [23], а $i_\nu(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n! (\nu+1)_n} \left(\dfrac{t}{2}\right)^{2n}$ – нормированная модифицированная функция Бесселя (i – функция Бесселя) [24].

Отметим, для уравнения (1) при λ=0 в работах [25, 26, 27, 28] исследованы некоторые пространственные краевые задачи в конечных и бесконечных областях.

Формула Грина

Полупространство $y > 0$ обозначим через $R_m^+ = \{(x,y) : y > 0\}$, где $x = (x_1, ..., x_{m-1})$.

Рассмотрим тождество

$$y^{2\beta}\left[uH_\beta^{(m,\lambda)}(w) - wH_\beta^{(m,\lambda)}(u)\right] = y^{2\beta}\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u\frac{\partial w}{\partial x_k} - w\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[y^{2\beta}\left(u\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

Интегрируем обе части последнего тождества по области Ω, расположенной в полупространстве $y > 0$, и пользуясь формулой Гаусса-Остроградского, получим

$$\int_\Omega y^{2\beta}\left[uH_\beta^{(m,\lambda)}(w) - wH_\beta^{(m,\lambda)}(u)\right]dxdy$$

$$= \int_\Gamma \left[y^{2\beta}\sum_{k=1}^{m-1}\left(u\frac{\partial w}{\partial x_k} - w\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\cos(n,\ x_k) + y^{2\beta}\left(u\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,y)\right]d\Gamma, \tag{4}$$

где $dx := dx_1 dx_2 ... dx_{m-1}$, Γ – граничная поверхность области Ω, n – внешняя нормаль к поверхности Γ.

Формула Грина (4) выводится при следующих предположениях: функции $u(x,y), w(x,y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $\bar{\Omega}$, частные производные второго порядка непрерывны внутриΩ и интегралы по Ω, содержащие $H_\beta^{(m,\lambda)}(u)$ и $H_\beta^{(m,\lambda)}(w)$ имеют смысл. Если $H_\beta^{(m,\lambda)}(u)$ и $H_\beta^{(m,\lambda)}(w)$ не обладают непрерывностью вплоть до Γ, то это – многомерные несобственные интегралы, которые получаются как пределы по любой последовательности областей Ω_k, которые содержатся внутри Ω, когда эти области Ω_k стремятся к Ω, так что всякая точка, находящаяся внутри Ω попадает внутрь областей Ω_k, начиная с некоторого номера k.

Если u и w суть решения уравнения (1), то из формулы (4) имеем

$$\int_\Gamma y^{2\beta}\left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\Gamma = 0, \tag{5}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ означает нормальную производную:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{k=1}^{m-1}\cos(n,\ x_k)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k} + \cos(n,y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6}$$

Полагая в формуле (4) $w \equiv 1$ и заменяя u на u^2, получим

$$\int_\Omega y^{2\beta}\left[\sum_{k=1}^{m-1} u_{x_k}^2 + u_y^2 + \lambda^2 u^2\right]dxdy = \int_\Gamma y^{2\beta}u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma, \tag{7}$$

где $u(x,y)$ – решения уравнения (1). Равенство (7) играет важную роль при доказательстве единственности решения краевых задач.

Наконец, из формулы (5), полагая $w \equiv 1$, будем иметь

$$\int_\Gamma y^{2\beta}\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma = 0. \tag{8}$$

Формула (8) утверждает, что интеграл от нормальной производной решения уравнения (1) с весом $y^{2\beta}$ по граничной поверхности равен нулю.

0.1 Постановка и единственность решения задачи

Пусть $\Omega \subset R_m^+$ – область, ограниченная плоскостью $D = \{(x, y) : y = 0, \quad -a_k < x_k < b_k,\ k = \overline{1,\ m-1}\}$ и поверхностью S, которая пересекается с областью D. Линию пересечения обозначим через $L = S \cap D$. $a_k, b_k \ = const > 0, \quad k = \overline{1,\ m-1}$. Поверхность S пересекает ось Oy при $y = a,\ \ a > 0$.

Задача Хольмгрена. Найти в области Ω регулярное решение $u\,(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$\left.\left(y^{2\beta}\frac{\partial u\,(x,y)}{\partial y}\right)\right|_{y=0} = \nu\,(x)\,,\ x \in D, \quad u|_S = \varphi\,(x,y)\,,\ \ (x,y) \in \bar{S},$$

где $\nu\,(x)$ – заданная непрерывная функция в D, а $\varphi\,(x, y)$ – заданные непрерывная функция в замкнутой области $\bar{S}$. На линии L функция $\nu\,(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1 - 2\beta$.

Докажем единственность решения поставленной задачи. Нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\int_\Omega y^{2\beta}uH_\beta^{(m)}\,(u)\,dxdy = -\int_\Omega y^{2\beta}\left[\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \lambda^2 u^2\right]dxdy$$

$$+\int_\Omega\left[y^{2\beta}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{2\beta}u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy.$$

Пусть u – решение уравнения (1). Тогда воспользовавшись формулой Гаусса-Остроградского, получим

$$\int_\Omega y^{2\beta}\left[\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \lambda^2 u^2\right]dxdy = -\int_D \nu\,(x)\ u(x,0)dx + \int_S y^{2\beta}\varphi\,(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial n}dS.$$

Если теперь рассмотреть однородный случай задачи Хольмгрена (т.е. $\varphi\,(x, y) \equiv 0,\ \nu\,(x) \equiv 0$), то

$$\int_\Omega y^{2\beta}\left[\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \lambda^2 u^2\right]dxdy = 0.$$

Отсюда следует, что $u\,(x, y) = 0$ в $\bar{\Omega}$. Тем самым доказана единственность решения задачи Хольмгрена.

Существование решения задачи Хольмгрена

Существование решения задачи Хольмгрена докажем методом функции Грина. Для этого положим, что $a_k = b_k = R, \quad k = \overline{1, m-1}$, и S является полусферой с центром в начале системы координат, радиусом R, т.е. $S = \left\{(x, y) : \sum_{k=1}^{m-1} x_k^2 + y^2 = R^2\right\}$.

Для определенности положим $m > 2$.

Определение. Функцией Грина задачи Хольмгрена для уравнения (1) называется функция $G\,(x, y; \xi, \eta)$, удовлетворяющая следующим условиям:
внутри области Ω, кроме точки (ξ, η) , эта функция есть регулярное решение уравнения (1);
она удовлетворяет условиям

$$\left.\left(y^{2\beta}\frac{\partial G\,(x,y;\xi,\eta)}{\partial y}\right)\right|_{y=0} = 0,\ \ G\,(x,y;\xi,\eta)|_S = 0, \tag{9}$$

она может быть представлена в виде

$$G\,(x,y;\xi,\eta) = q\,(x,y;\xi,\eta) + w\,(x,y;\xi,\eta)\,, \tag{10}$$

где

$$q\,(x,y;\xi,\eta) = \gamma r^{-2\alpha}\mathrm{H}_3\,(\alpha,\beta;2\beta;\theta,\mu)\,, \tag{11}$$

– фундаментальное решение уравнения (1), построенное в [16, 17],

$$\alpha = \frac{m}{2} - 1 + \beta, \quad \gamma = 2^{2\alpha-m}\frac{\Gamma\,(\alpha)\,\Gamma\,(\beta)}{\pi^{m/2}\Gamma\,(2\beta)}, \tag{12}$$

$$\xi := (\xi_1, ..., \xi_{m-1}); \quad \theta = 1 - \frac{r_1^2}{r^2} = -\frac{4y\eta}{r^2}, \quad \mu = -\frac{\lambda^2}{4} r^2,$$

$$r^2 = \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - \xi_k)^2 + (y-\eta)^2, r_1^2 = \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - \xi_k)^2 + (y+\eta)^2.$$

Здесь $\mathrm{H}_3(a, b; c; z, t)$ – конфлюэнтная гипергеометрическая функция Горна, определенная формулой (2).

Функция, определенная формулой (11), по переменным (x, y) является решением уравнения (1), причем при $r \to 0$ она имеет особенность порядка $1/r^{m-2}$, когда $m > 2$, и логарифмическую особенность, когда $m = 2$, и, следовательно, действительно являются фундаментальным решением уравнения (1).

Нетрудно видеть, что

$$\left(y^{2\beta} \frac{\partial q(x, y; \xi, \eta)}{\partial y} \right)\Bigg|_{y=0} = 0,$$

для всех x.

В формуле (10) функция $w(x, y; \xi, \eta)$ – регулярное решение уравнения (1) везде внутри Ω.

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $w(x, y; \xi, \eta)$, которая в силу (9) и (10) должна удовлетворять условиям

$$w(x, y; \xi, \eta)|_S = -q(x, y; \xi, \eta)|_S, \quad \left(y^{2\beta} \frac{\partial w(x, y; \xi, \eta)}{\partial y} \right)\Bigg|_{y=0} = 0.$$

Для области Ω, ограниченной плоскостью $y = 0$ и полусферой S функция Грина задачи Хольмгрена имеет вид:

$$G(x, y; \xi, \eta) = q(x, y; \xi, \eta) - \left(\frac{R}{\rho} \right)^{2\alpha} q\left(x, y; \bar{\xi}, \bar{\eta}\right),$$

где

$$\rho^2 = \sum\nolimits_{k=1}^{m-1} \xi_k^2 + \eta^2, \quad \bar{\xi} = \left(\bar{\xi}_1, ...\bar{\xi}_{m-1}\right), \quad \bar{\xi}_k = \frac{R^2}{\rho^2}\xi_k, \quad \bar{\eta} = \frac{R^2}{\rho^2}\eta.$$

Пусть $(\xi, \eta) \in \Omega$. Вырежем из области Ω $m-$ мерный шар малого радиуса ε с центром в точке (ξ, η) и оставшуюся часть Ω обозначим через Ω_ε, а через C_ε $-m$-мерную сферу вырезанного шара. Используя формулу (4), получим

$$\int\limits_{C_\varepsilon} y^{2\beta} \left[u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right] dC_\varepsilon = -\int\limits_D \nu(x) G_0(x, 0; \xi, \eta) dx - \int\limits_S y^{2\beta} \varphi(S) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n} dS. \tag{13}$$

Используя формулы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathrm{H}_3(a, b; c; z, t) = \frac{ab}{c} \mathrm{H}_3(a+1, b+1; c+1; z, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{H}_3(a, b; c; z, t) = \frac{1}{a-1} \mathrm{H}_3(a-1, b; c; z, t),$$

и смежное соотношение

$$\frac{ab}{c} z \mathrm{H}_3(a+1, b+1; c+1; z, t) - \frac{1}{a-1} t\, \mathrm{H}_3(a-1, b; c; z, t)$$

$$= a\, \mathrm{H}_3(a+1, b; c; z, t) - a\, \mathrm{H}_3(a, b; c; z, t),$$

нетрудно вычислить частные производные фундаментального решения $q(x, y; \xi, \eta)$:

$$\frac{\partial q}{\partial x_k} = -2\alpha\gamma (x_k - \xi_k) r^{-2\alpha-2} \mathrm{H}_3(1+\alpha, \beta; 2\beta; \theta, \mu), \quad k = \overline{1, m-1},$$

$$\frac{\partial q}{\partial y}=-2\alpha\gamma\eta\, r^{-2\alpha-2}\mathrm{H}_3\left(1+\alpha,1+\beta;1+2\beta;\theta,\mu\right)$$

$$-2\alpha\gamma\left(y-\eta\right)r^{-2\beta_0-2}\mathrm{H}_3\left(1+\alpha,\beta;2\beta;\theta,\mu\right).$$

Теперь воспользовавшись определением нормальной производной (см. формулу (6)), окончательно находим

$$\frac{\partial q}{\partial n}=2\alpha\gamma r^{-2\alpha}\mathrm{H}_3\left(1+\alpha,\beta;2\beta;\theta,\mu\right)\frac{\partial}{\partial n}\left[\ln\frac{1}{r}\right]$$

$$-2\alpha\gamma\eta\, r^{-2\beta_0-2}\mathrm{H}_3\left(1+\alpha,1+\beta;1+2\beta;\theta,\mu\right)cos(n,y). \tag{14}$$

Левую часть равенства (13) разделим на три интеграла:

$$\int\limits_{C_\varepsilon} y^{2\beta}\left[u\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial u}{\partial n}\right]dC_\varepsilon=J_1+J_2+J_3, \tag{15}$$

где

$$J_1=\int\limits_{C_\varepsilon} y^{2\beta}u\left(x,y\right)\frac{\partial q\left(x,y;\xi,\eta\right)}{\partial n}dC_\varepsilon, \tag{16}$$

$$J_2=-\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\alpha}\int\limits_{C_\varepsilon} y^{2\beta}u\left(x,y\right)\frac{\partial q\left(x,y;\bar{\xi},\bar{\eta}\right)}{\partial n}dC_\varepsilon,$$

$$J_3=-\int\limits_{C_\varepsilon} y^{2\beta}G\left(x,y;\xi,\eta\right)\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial n}dC_\varepsilon.$$

Сначала выражение нормальной производной (14) подставим в (16), затем в правой части полученного равенства (16) переходим в обобщенную сферическую систему координат вида

$$x_1=\xi_1+\varepsilon\,\Phi_1,...,x_{m-1}=\xi_{m-1}+\varepsilon\,\Phi_{m-1},\;\; y=\eta+\varepsilon\,\Phi_m,$$

где

$$\Phi_1=\cos\varphi_1,\;\;\Phi_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\Phi_3=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,...,$$

$$\Phi_{m-1}=\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1},\quad \Phi_m=\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1}$$

$$[\varepsilon\geq 0,\;0\leq\varphi_1\leq\pi,...,0\leq\varphi_{m-2}\leq\pi,0\leq\varphi_{m-1}\leq 2\pi].$$

После несложных преобразований первое слагаемое J_1 принимает вид $J_1=J_{11}+J_{12}$, где

$$J_{11}=2\alpha\gamma\varepsilon^{-2\alpha-2+m}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{m-1}\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_{m-2}d\varphi_{m-2}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi_{m-3}d\varphi_{m-3}...$$

$$...\int\limits_0^{\pi}\left(\eta+\varepsilon\,\Phi_m\right)u\left(\xi_1+\varepsilon\,\Phi_1,...,\xi_{m-1}+\varepsilon\,\Phi_{m-1},\eta+\varepsilon\,\Phi_m\right)\mathrm{H}_{31}\left(\varepsilon\right)\sin^{m-2}\varphi_1 d\varphi_1,$$

$$J_{12}=2\alpha\gamma\eta\varepsilon^{-2\alpha-3+m}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{m-1}\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_{m-2}d\varphi_{m-2}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi_{m-3}d\varphi_{m-3}...,$$

$$...\int\limits_0^{\pi}\left(\eta+\varepsilon\,\Phi_m\right)u\left(\xi_1+\varepsilon\,\Phi_1,...,\xi_{m-1}+\varepsilon\,\Phi_{m-1},\eta+\varepsilon\,\Phi_m\right)\mathrm{H}_{32}\left(\varepsilon\right)\sin^{m-2}\varphi_1 d\varphi_1,$$

$$r_{1\varepsilon}^2=\varepsilon^2\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k^2+\left(2\eta+\varepsilon\,\Phi_m\right)^2,\ \mathrm{H}_{31}\left(\varepsilon\right)=\mathrm{H}_3\left(1+\alpha,\beta;2\beta;1-\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2},-\frac{\lambda^2}{4}\varepsilon^2\right),$$

$$\mathrm{H}_{32}\left(\varepsilon\right)=\mathrm{H}_3\left(1+\alpha,1+\beta;1+2\beta;1-\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2},-\frac{\lambda^2}{4}\varepsilon^2\right).$$

Для полного вычисления J_1 сначала вычислим J_{11}. Воспользовавшись формулой разложения (3), получим

$$\mathrm{H}_{31}\left(\varepsilon\right)=F\left(1+\alpha,\beta;2\beta;1-\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}\right)i_{1-a}\left(\lambda\varepsilon\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{k+l}(k-1)!(\beta)_k}{(k-l)!l!(l-1)!(2\beta)_k(-\alpha)_l}$$

$$\cdot x^ky^lF\left(1+\alpha+k,\beta{+}k;2\beta{+}k;1-\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}\right)i_{1-a+l}\left(\lambda\varepsilon\right). \tag{17}$$

Теперь применяем к каждой гипергеометрической функции Гаусса, входящей в формулу (17), известную формулу Больца [23]

$$F\left(a,b;c;z\right)=\left(1-z\right)^{-b}F\left(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}\right).$$

В результате получим

$$\mathrm{H}_{31}\left(\varepsilon\right)=\left(\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\beta}F\left(2\beta-\alpha-1,\beta;2\beta;1-\frac{\varepsilon^2}{r_{1\varepsilon}^2}\right)i_{1-a}\left(\lambda\varepsilon\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{k+l}(k-1)!(\beta)_k}{(k-l)!l!(l-1)!(2\beta)_k(-\alpha)_l}$$

$$\cdot x^ky^l\left(\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\beta-k}F\left(2\beta-\alpha-1,\beta{+}k;2\beta{+}k;1-\frac{\varepsilon^2}{r_{1\varepsilon}^2}\right)i_{1-a+l}\left(\lambda\varepsilon\right).$$

Теперь функцию $\mathrm{H}_{31}\left(\varepsilon\right)$ подставим в интеграл J_{11} и после этого в правой части J_{11} переходим к пределу при $\varepsilon\to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_{11}=\alpha\gamma 2^{1-2\beta}u\left(\xi,\eta\right)F\left(2\beta-\alpha-1,\beta;2\beta;1\right)$$

$$\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi_{m-1}\int_0^{\pi}\sin\varphi_{m-2}d\varphi_{m-2}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_{m-3}d\varphi_{m-3}......\int_0^{\pi}\sin^{m-2}\varphi_1 d\varphi_1.$$

В силу известной формулы суммирования [23]

$$F\left(a,b;c;1\right)=\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)},\ c-a-b>0$$

будем иметь

$$F\left(2\beta-\alpha-1,\beta;2\beta;1\right)=\frac{\Gamma\left(1+\alpha-\beta\right)\Gamma\left(2\beta\right)}{\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(1+\alpha\right)}. \tag{18}$$

Нетрудно вычислить, что

$$\int_0^{2\pi}d\varphi_{m-1}\int_0^{\pi}\sin\varphi_{m-2}d\varphi_{m-2}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_{m-3}d\varphi_{m-3}......\int_0^{\pi}\sin^{m-2}\varphi_1 d\varphi_1=\frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma\left(m/2\right)}. \tag{19}$$

Принимая во внимание (18) и (19), а также имея в виду значения α и γ (см. фор. (12)), получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_{11}=u\left(\xi,\eta\right). \tag{20}$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_{12} = \lim_{\varepsilon\to 0} J_2 = \lim_{\varepsilon\to 0} J_3 = 0. \tag{21}$$

Теперь вычислим предел $\lim\limits_{y\to 0} y^{2\beta}\dfrac{\partial G}{\partial y}$ и нормальную производную $\dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}$ на полусфере S. После этих вычислений, с учетом (15), (20) и (21), из (13) имеем

$$u(\xi,\eta) = (1-2\beta)\gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)\int\limits_D \nu(x)\left[X^{-\alpha}I_{-\alpha}(\lambda X) - Y^{-\alpha}I_{-\alpha}(\lambda Y)\right]dx$$

$$+2\alpha\gamma\int\limits_S y\varphi(S)\,\mathrm{H}_3(1+\alpha,\beta;2\beta;\theta,\mu)\frac{R^2-\rho^2}{Rr^{2+2\alpha}}dS, \tag{22}$$

где

$$I_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(1+a+n)\,k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{a+2n},\ X^2 := \sum_{k=1}^{m-1}(x_k-\xi_k)^2+\eta^2,$$

$$Y^2 := \sum_{k=1}^{m-1}\left(R-\frac{x_k\xi_k}{R}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1,j\neq k}^{m-1}x_k^2\xi_j^2 + \frac{\eta^2}{R^2}\sum_{k=1}^{m-1}x_k^2 - (m-2)R^2;$$

Формула (22), а с ней и все доказательство, требует, чтобы $m>2$. Однако формула (22) верна и для $m=2$.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема. Существует единственное решение задачи Хольмгрена для уравнения (1) и оно представляется формулой (22).

Литература

1. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ. 1961.
2. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М., Наука, 1973.
3. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., Наука, 1966.
4. Gilbert R. P. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. New York, London: Academic Press, 1969.
5. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., Наука, 1981.
6. Hasanov A. Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 13(8), 2008, pp.41-49.
7. Hasanov A. Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 52(8), 2007, pp.673-683.
8. Urinov A. K. , Karimov E. T. On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter. *Applied Mathematical Letters*, 24, 2011, pp.314-319.
9. Salakhitdinov M. S. , Hasanov A. A solution of the Neumann-Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 53(4), 2008, pp.355-364.
10. Salakhitdinov M. S. , Hasanov A. The Dirichlet problem for the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Eurasian Mathematical Journal*, 3(4), 2012, pp.99-110.
11. Салахитдинов М. С. , Хасанов А. Краевая задача ND_1 для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца. *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 13(1), 2011, с.109-116.

12. Лернер М. Е. , Репин О. А. Нелокальные краевые задачи на вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца.*Дифференциальные уравнения*, 37(11), 2001, с.1562-1564.

13. Репин О. А. , Лернер М. Е. О задаче Дирихле для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца в первом квадранте. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки*, 6, 1998, с.5-8.

14. Эргашев Т. Г. Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 46, 2017, с.41-49.

15. Эргашев Т. Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 50, 2017, с.45-56.

16. Уринов А. К. Фундаментальные решения для некоторых уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами. *Научный вестник Ферганского государственного университета* 1, 2006, с.5-11.

17. Mavlyaviev R. M. , Garipov I. B. Fundamental solutions of multidimensional axysymmetric Helmholtz equation *Complex Variables and Elliptic Equations*, 62(3), 2017, pp.284-296.

18. Ergashev T. G. , Hasanov A. Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation *Uzbek Mathematical Journal*, 1, 2018, pp.55-64.

19. Ergashev T. G. On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*, 77, 2019, pp.69-76.

20. Уринов А. К. , Эргашев Т. Г. Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 55, 2018, с.45-56.

21. Эргашев Т. Г. , Сафарбаева Н. М. Задача Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика,* 62, 2019, с.55-67.

22. Эргашев Т. Г. Задача Хольмгрена для многомерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом.*Бюллетень Института математики*, 2, 2019, с.23-32.

23. Бейтман Г. , Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1, М., Наука, 1973.

24. Ситник С. М. , Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М., ФИЗМАТЛИТ, 2019.

25. Agostinelli C. Integrazione dell'equazione differenziale $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + x^{-1}u_x = f$ e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, 6(26), 1937, pp.7-8.

26. Олевский М. Н. Решения задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = \rho$ для полусферической области. *Доклады АН СССР*, 64(6), 1949, с.767-770.

27. Назипов И. Т. Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений. *Известия ВУЗов. Математика*, 3, 2011, с.69-85.

28. Салахитдинов М. С. , Хасанов А. К теории многомерного уравнения Геллерстедта. *Узбекский математический журнал*, 3, 2007, с. 95-109.

Получено: 15/12/2019

Принято: 10/03/2020