

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

---

*Научный журнал*

---

---

**2019**

**№ 62**

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.  
выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи  
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

### **Учредитель:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменшиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Робаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

### **EDITORIAL COUNCIL**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

### **EDITORIAL BOARD**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

**Электронный адрес:** <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740

**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Бельков А.В., Белов С.В., Жуков А.П., Павлов М.С., Пономарев С.В., Кузнецов С.А.</b> Метод расчета напряженно-деформированного состояния вантово-оболочечных конструкций космических антенных рефлекторов .....	5
<b>Гайдак В.А., Тимошенко Е.А.</b> Инволюции полной линейной группы $GL_2$ над подкольцом поля $Q$ .....	19
<b>Смоленцев Н.К.</b> Левоинвариантные пара-сасакиевы структуры на группах Ли .....	27
<b>Халилов Э.Г., Бахшалыева М.Н.</b> О производной логарифмического потенциала двойного слоя .....	38
<b>Эргашев Т.Г., Сафарбаева Н.М.</b> Задача Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом .....	55

### МЕХАНИКА

<b>Архипов В.А., Матвиенко О.В., Жарова И.К., Маслов Е.А., Перфильева К.Г., Булавко А.М.</b> Моделирование динамики жидко-капельного хладагента при авиационном тушении пожаров .....	68
<b>Брагин Н.Н., Орлов С.А., Пейгин С.В.</b> Исследование устойчивости оптимального аэродинамического проектирования трехмерной компоновки крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета к его начальной форме .....	79
<b>Ильясов А.М., Киреев Т.Ф., Булгакова Г.Т.</b> Прогнозирование прочности водонепроницающих экранов в трещиноватых пластах .....	91
<b>Парфенова Е.С.</b> Распределение концентрации имплантируемой примеси при обработке поверхности последовательными импульсами .....	105
<b>Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.</b> Ограничения на компоненты напряжений в вершинах правильных треугольной и четырехугольной пирамид, погруженных в упругое тело .....	119
<b>Тимченко С.В.</b> Численное исследование аэродинамических характеристик трехмерной компоновки крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета .....	135

### МЕМОАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

<b>ГАРКУНОВ ДМИТРИЙ НИКОЛАЕВИЧ</b> (К 100-летию юбилею) .....	142
<b>СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ</b> .....	144

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Belkov A.V., Belov S.V., Zhukov A.P., Pavlov M.S., Ponomarev S.V., Kuznetsov S.A.</b> Method for calculation of the stress-strain state for cable-membrane space reflector structures.....	5
<b>Gaidak V.A., Timoshenko E.A.</b> Involutions of the general linear group $GL_2$ over a subring of the field $\mathbb{Q}$ .....	19
<b>Smolentsev N.K.</b> Left-invariant para-Sasakian structures on Lie groups.....	27
<b>Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N.</b> On the derivative of the double-layer logarithmic potential .....	38
<b>Ergashev T.G., Safarbayeva N.M.</b> Dirichlet problem for the multidimensional Helmholtz equation with one singular coefficient.....	55

### MECHANICS

<b>Arkhipov V.A., Matvienko O.V., Zharova I.K., Maslov E.A., Perfilieva K.G., Bulavko A.M.</b> Modeling of the dynamics of a liquid-droplet coolant under aerial firefighting .....	68
<b>Bragin N.N., Orlov S.A., Peygin S.V.</b> Investigation of the stability of optimal aerodynamic designing of the three-dimensional wing-fuselage layout for a wide-body long-range aircraft with regard to its initial shape .....	79
<b>Il'yasov A.M., Kireev T.F., Bulgakova G.T.</b> Strength assessment for water shut-off baffles in a fractured medium .....	91
<b>Parfenova E.S.</b> Distribution of the concentration of injected impurity under surface treatment by consecutive pulses.....	105
<b>Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V.</b> Restrictions on stress components in the vertices of regular triangular and quadrangular pyramids embedded in elastic body .....	119
<b>Timchenko S.V.</b> Numerical study of the aerodynamic characteristics of a "wing-fuselage-engine nacelle-pylon" three-dimensional layout of the engine for a wide-body long-range aircraft.....	135

### MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

To the 100th anniversary of Dmitriy Nikolayevich Garkunov.....	142
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....	144

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.61, 539.3  
DOI 10.17223/19988621/62/1

MSC 15A09

**А.В. Бельков, С.В. Белов, А.П. Жуков, М.С. Павлов,  
С.В. Пономарев, С.А. Кузнецов**

**МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ ВАНТОВО-ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
КОСМИЧЕСКИХ АНТЕННЫХ РЕФЛЕКТОРОВ<sup>1</sup>**

Настоящая работа посвящена методу расчета напряженно-деформированного состояния вантово-оболочечных конструкций сетчатых антенных рефлекторов космических аппаратов. Метод реализован в два этапа. На первом этапе методом плотности сил из уравнений равновесия определяются начальные координаты узлов вантовых элементов отражающей поверхности рефлектора. При этом на элементы наложены требования равномерного распределения натяжений. На втором этапе полученные координаты и соответствующие значения натяжений элементов используются как начальное приближение в расчете напряженно-деформированного состояния рефлектора геометрически нелинейным методом конечных элементов.

**Ключевые слова:** *метод плотности сил, метод конечных элементов, геометрическая нелинейность, сетчатый рефлектор, псевдообратная матрица, нормальное псевдорешение.*

Для развития средств мобильной связи и других коммуникационных устройств необходимо создание космических развертываемых рефлекторных антенн с высоким коэффициентом усиления, способных обрабатывать высокочастотный широкополосный сигнал. Ввиду высокой стоимости проведения натурных экспериментов с конструкциями сетчатых рефлекторов, всегда актуален вопрос построения адекватной математической модели для расчета его напряженно-деформированного состояния (НДС). Кроме того, в математической модели важно учитывать геометрически нелинейное поведение, поскольку даже в зоне упругих деформаций у подобных конструкций возникают значительные перемещения их частей под действием нагрузок [1].

В данной работе задача определения НДС рефлекторов решается методами нелинейной теории упругости, где главным является уравнение равновесия относительно перемещений [2]. Аналитические решения этого уравнения можно получить только в самых простых случаях. По этой причине, в качестве численного метода его решения выбран метод конечных элементов (МКЭ) с учетом геометрической нелинейности [3]. Из опыта расчетов НДС сетчатых антенных рефлекторов [4, 5] установлено, что задача определения поля перемещений узлов конеч-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, уникальный идентификатор RFMEFI57817X0257.

но-элементной модели (КЭМ) имеет небольшую область сходимости. Поэтому определение начального приближения, принадлежащего области сходимости, является важной задачей. В качестве начального приближения предлагается использовать решение метода плотности сил [6], позволяющих определить равновесные координаты узлов вантовых элементов отражающей поверхности рефлектора с заданными ограничениями по натяжениям на элементы.

Метод плотности сил находит широкие приложения в расчетах вантовых мостов [7], вантовых структур сетчатых рефлекторов [8, 9] и других конструкциях. Заметим, что решаемые задачи в [8, 9] нацелены только на определение формы и точности отражающей поверхности рефлектора без учета деформаций силового каркаса. В работе предлагается двухэтапный метод расчета комплексной конструкции рефлектора, учитывающий как деформацию силового каркаса, так и влияние натяжений оболочки отражающей поверхности.

### Этап 1. Формулировка матричного нелинейного метода плотности сил для поиска начальной формы сети вантовых элементов отражающей поверхности рефлектора

При поиске начальной формы сети вантовых элементов вводятся следующие допущения [6, 7]: элементы сети рассматриваются в трехмерной декартовой прямоугольной системе координат  $Oxyz$  и являются прямолинейными отрезками постоянного сечения, соединенные в узлах. Часть узлов считается свободными (с искомыми координатами), часть – фиксированными (с заданными координатами); отношение  $q_i$  силы натяжения  $T_i$   $i$ -го элемента сети к его длине  $l_i$  – постоянно (плотность силы элемента):

$$q_i = \frac{T_i}{l_i} = \text{const.} \quad (1)$$

Элементы сети не имеют веса; внешние усилия сосредоточены в узлах.

Начальная форма сети определяется решением линейной системы матричных уравнений равновесия относительно координат её узлов и нелинейной системой матричных уравнений, описывающих ограничения по натяжениям элементов [6]:

$$\begin{cases} (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \mathbf{x} + (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f) \mathbf{x}_f = \mathbf{f}_x; \\ (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \mathbf{y} + (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f) \mathbf{y}_f = \mathbf{f}_y; \\ (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \mathbf{z}_{\text{нар}} + (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f) \mathbf{z}_f = \mathbf{f}_z; \\ \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q})) \bar{\mathbf{q}} - \mathbf{T}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{C}^T [n \times m]$ ,  $\mathbf{C}_f [m \times n_f]$  – матрицы инцидентности, определяющие топологию вантовой системы;  $m$  – общее количество элементов сети;  $n$ ,  $n_f$  – количество свободных и фиксированных узлов соответственно;  $\mathbf{Q} [m \times m] = \text{diag}(\mathbf{q})$  – диагональная матрица плотностей сил элементов сети;  $\mathbf{x} [n \times 1]$ ,  $\mathbf{y} [n \times 1]$ ,  $\mathbf{x}_f [n_f \times 1]$ ,  $\mathbf{y}_f [n_f \times 1]$ ,  $\mathbf{z}_f [n_f \times 1]$  – векторы-столбцы искоемых и фиксированных координат узлов элементов сети;  $\mathbf{z}_{\text{нар}} [n \times 1]$  – вектор-столбец координат узлов сети на поверхности офсетного параболоида отражающей поверхности рефлектора по оси  $Oz$ ;  $\mathbf{f}_x [n \times 1]$ ,  $\mathbf{f}_y [n \times 1]$ ,  $\mathbf{f}_z [n \times 1]$  – векторы-столбцы координат внешних сил, действующих в искоемых узлах сети;  $\bar{\mathbf{L}} [r \times r] = \text{diag}(\mathbf{1})$  – диагональная матрица длин первых  $r$  элементов, на которые наложены ограничения равномерного распределения натяжений (здесь и далее на

это будет указывать знак черты сверху),  $\bar{\mathbf{q}}[r \times 1]$  – вектор-столбец плотностей сил,  $\mathbf{T}_0[r \times 1]$  – вектор-столбец требуемых значений натяжений элементов сети.

В последнем уравнении системы (2), запись  $\bar{\mathbf{L}}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q}))$  означает, что значения длин элементов зависят от вектор-столбца плотности силы. То есть это уравнение является нелинейным относительно  $\mathbf{q}$ .

Матрицы инцидентности  $\mathbf{C}^T, \mathbf{C}_f$  определяются выражением [6]:

$$\mathbf{C}_s(e, i, j) = [\mathbf{C}, \mathbf{C}_f] = \begin{cases} +1 \text{ для узла } i \text{ элемента } e=1..m; \\ -1 \text{ для узла } j \text{ элемента } e=1..m (i < j); \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

Пусть  $\mathbf{D} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}_f = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f$  и  $\det(\mathbf{D}) \neq 0$ . Тогда решения первых двух уравнений системы (2) имеют вид [6]

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{f}_x - \mathbf{D}_f \mathbf{x}_f); \\ \mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{f}_y - \mathbf{D}_f \mathbf{y}_f). \end{cases} \quad (4)$$

Координаты вектор-столбца  $\mathbf{z}_{\text{пар}}$  узлов вантовых элементов отражающей поверхности рефлектора определяются уравнением поверхности офсетного параболоида, который является вырезкой из параболоида вращения (родительского параболоида) круговым цилиндром с диаметром  $D$ . Схема поверхности офсетного параболоида показана на рис. 1:

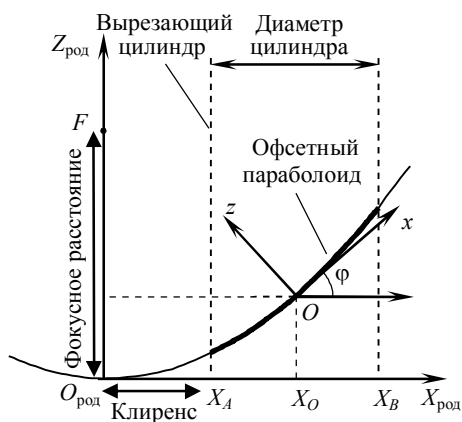


Рис. 1. Схема поверхности офсетного параболоида  
Fig. 1. Offset paraboloid surface diagram

Ось вырезающего цилиндра проходит через точку  $X_O = D/2 + X_A$  и начало технической системы координат  $Oxyz$  офсетного параболоида. Ось  $Ox$  является касательной к поверхности родительского параболоида в точке  $O$  и расположена под углом  $\varphi$  к оси  $O_{\text{род}}X_{\text{род}}$ .

Преимущество офсетной конфигурации отражающей поверхности над осесимметричной заключается в том, что в ней система облучения рефлектора, расположенная в точке фокуса  $F$ , не загромождала отраженные электромагнитные лучи [8]. Пересечение родительского параболоида и кругового цилиндра происходит по эллипсу с точками, лежащими в плоскости, параллельной  $Oxy$ . При этом

ось аппликата  $Oz$  не проходит через центр этого эллипса. Такая конфигурация офсетного параболоида называется стандартной [10]. В данной работе офсетный параболоид рассматривается в системе координат  $O'x'y'z'$ , полученной из  $Oxyz$  параллельным переносом по оси  $Ox$  на величину  $\Delta x$  таким образом, чтобы ось  $O'z'$  уже проходила через центр эллипса. Выражение для  $\Delta x$  имеет вид [11]

$$\Delta x = \frac{X_A^2 - 2X_0^2 + X_B^2}{8F} \sin \varphi. \quad (5)$$

Уравнение поверхности офсетного параболоида в смещенной технической системе координат определяется меньшим решением квадратного уравнения [10]:

$$Az'^2 + Bz' + C = 0, \quad (6)$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} A = \sin^2 \varphi; \\ B = -(4F \cos \varphi + 2 \sin \varphi (X_0 + x' \cos \varphi)); \\ C = y'^2 + x'(2X_0 \cos \varphi + x' \cos^2 \varphi - 4F \sin \varphi). \end{cases} \quad (7)$$

В (7) полагаем  $x' = x + \Delta x$ ;  $y' = y$ ;  $z' = z$ . Меньшее решение (6) имеет вид:

$$z' = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (8)$$

Таким образом, задача поиска формы сети вантовых элементов отражающей поверхности рефлектора сводится к определению такого вектор-столбца плотности силы  $\mathbf{q}$ , который бы удовлетворял всем четырем уравнениям (2).

Для решения последнего нелинейного уравнения (2) применяется метод Ньютона, в котором по итерационной формуле

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta \mathbf{q} \quad (9)$$

определяется требуемое значение вектора плотности силы  $\mathbf{q}_{k+1}$ .

Шаг итерации  $\Delta \mathbf{q}$  рассчитывается следующим образом. Обозначив  $\mathbf{g}^*(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q}))\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{T}_0$ , запишем разложение функции  $\mathbf{g}^*(\mathbf{q})$  в ряд Тейлора в окрестности начального приближения  $\mathbf{q}_0$ , ограничившись линейными членами [6]:

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{g}^*(\mathbf{q}_0)}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Выражение (10) преобразуется к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{q} = \mathbf{r}_0, \quad (11)$$

где  $\mathbf{G}^T = \frac{\partial \mathbf{g}^*(\mathbf{q}_0)}{\partial \mathbf{q}} [r \times m]$  – матрица Якоби,  $\mathbf{r}_0 = [r \times 1] = -\mathbf{g}^*(\mathbf{q}_0)$  – вектор-столбец правой части.

Система (11) является неопределённой, так как в общем случае количество ограничений  $r$  меньше количества неизвестных  $m$ . Поэтому из всех возможных решений  $\Delta \mathbf{q}$  выбирается минимальное по норме  $L_2$  из задачи оптимизации вида [6]:

$$\begin{cases} f(\Delta \mathbf{q}) = \Delta \mathbf{q}^T \Delta \mathbf{q} \rightarrow \min, \\ \mathbf{h}(\Delta \mathbf{q}) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (12)$$



где  $\mathbf{h}(\Delta\mathbf{q}) = \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q} - \mathbf{r}_0$  – функция связи. Задача (12) решалась методом множителей Лагранжа, где минимизировался функционал [7]:

$$L(\Delta\mathbf{q}, \lambda) = \Delta\mathbf{q}^T \Delta\mathbf{q} - 2\lambda^T \mathbf{h}(\Delta\mathbf{q}), \quad (13)$$

где  $\lambda[r \times 1]$  – вектор-столбец множителей Лагранжа.

Стационарные точки (13) находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \Delta\mathbf{q}} = 2\Delta\mathbf{q} - 2\mathbf{G}\lambda = \mathbf{0}; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (14)$$

Если  $\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \neq 0$ , то минимальное по евклидовой норме решение (14) имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{r}_0; \\ \Delta\mathbf{q} = \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{r}_0 \end{cases} \quad (15)$$

Единственность  $\Delta\mathbf{q}$  можно доказать от противного. Действительно, пусть существует какое-то другое решение  $\Delta\mathbf{q}^*$ , такое, что

$$\begin{cases} \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q} = \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q}^* = \mathbf{r}_0; \\ \|\Delta\mathbf{q}^*\| < \|\Delta\mathbf{q}\|. \end{cases} \quad (16)$$

На основании (15) и (16), можно записать

$$(\Delta\mathbf{q} - \Delta\mathbf{q}^*)^T \Delta\mathbf{q} = (\Delta\mathbf{q} - \Delta\mathbf{q}^*)^T \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{r}_0 = \underbrace{(\mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q}^* - \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q})}_{\mathbf{0}} (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{r}_0 = 0. \quad (17)$$

Тогда, по свойству нормы имеем

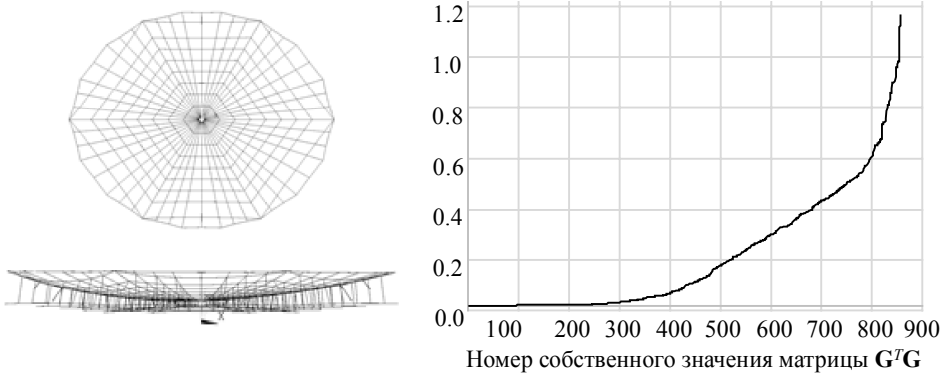
$$\begin{aligned} \|\Delta\mathbf{q}^*\|^2 &= \|\Delta\mathbf{q}^* + \Delta\mathbf{q} - \Delta\mathbf{q}\|^2 = \|\Delta\mathbf{q}^* + \Delta\mathbf{q}\|^2 + 2 \underbrace{(\Delta\mathbf{q} - \Delta\mathbf{q}^*)^T \Delta\mathbf{q}}_0 + \|\Delta\mathbf{q}\|^2 = \\ &= \|\Delta\mathbf{q}^* + \Delta\mathbf{q}\|^2 + \|\Delta\mathbf{q}\|^2 > \|\Delta\mathbf{q}\|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, неравенство (18) противоречит неравенству в (16). Это доказывает, что решение  $\Delta\mathbf{q}$  является единственным минимальным решением задачи (12).

Заметим, что в выражении  $\Delta\mathbf{q}$  в (15) присутствует сомножитель  $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$ . При расчете вантовой формообразующей структуры (ФОС) зонтичного рефлектора [12], показанной на рис. 2, установлено, что определитель  $\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G})$  оказался практически нулевым. Из курса линейной алгебры [13] известно, что определитель  $\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G})$  может быть выражен через собственные значения матрицы  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  по формуле

$$\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_r, \quad (19)$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  – собственные значения. На графике рис. 2 показано распределение собственных значений матрицы  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ , соответствующее рассчитанной формообразующей структуре рефлектора.



**Рис. 2.** Вантовая формообразующая структура зонтичного рефлектора и соответствующее распределение собственных значений матрицы  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$

**Fig. 2.** Cable shape structure of umbrella-type reflector and corresponding eigenvalues distribution of matrix  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$

Установлено, что большинство собственных значений (854 значения из 858) матрицы  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  меньше 1. Это означает, что  $\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \approx 0$  (либо равно 0), что, в свою очередь, может вызвать проблемы обращения  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ , а значит, и вычисления шага итерации  $\Delta \mathbf{q}$ . Во избежание проблемы обращения, в формулах (15) предлагается использовать псевдообратную матрицу Мура – Пенроуза, определяемую SVD-разложением (Singular Value Decomposition) [13]:

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^+ = \mathbf{V}_{SVD} \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}_{SVD}^T, \quad (20)$$

где  $\mathbf{U}_{SVD}[m \times m]$ ,  $\mathbf{V}_{SVD}[m \times m]$  – ортогональные матрицы (в общем случае разных размерностей),  $\mathbf{\Sigma}^+[m \times m] = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_{r_A}}, 0, \dots, 0\right)$  – матрица сингулярных чисел  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{r_A} > 0$ , где  $r_A = \text{rank}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})$ . Использование псевдообратной матрицы

позволяет найти минимальное решение по норме первой системы линейных алгебраических уравнений в (15) независимо от её вырожденности либо невырожденности и от числа обусловленности матрицы этой системы. В случае, когда  $\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \neq 0$  имеет место равенство  $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^+ = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$  [13].

Вектор-функция  $\mathbf{g}^*(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q}), \mathbf{q}) = \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q}))\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{T}_0$  является сложной функцией. Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим выражение для матрицы Якоби  $\mathbf{G}^T$ :

$$\mathbf{G}^T = \frac{\partial \mathbf{g}^*(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (21)$$

Выражения для  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}}$  имеют вид [6]

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{U}; \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{V}; \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{W},$$

где  $\mathbf{U} = \text{diag}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{V} = \text{diag}(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{w})$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{C}_f\mathbf{x}_f$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{C}_f\mathbf{y}_f$ ;  
 $\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{C}_f\mathbf{z}_f$ .

Дифференцируя функцию  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q}), \mathbf{q})$  по  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{q}$ , получим

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}}{\partial \mathbf{x}}; \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}}{\partial \mathbf{y}}; \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} = \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}}{\partial \mathbf{z}}; \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} = \bar{\mathbf{L}}. \quad (22)$$

На основании выражений для  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}}$ , (21) и (22) имеем выражение для матрицы Якоби [6]

$$\mathbf{G}^T = \bar{\mathbf{L}}_{rm} - \bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{L}}^{-1} \left( \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{U} + \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{V} + \bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{W} \right) \quad (23)$$

где  $\bar{\mathbf{L}}_{rm} [r \times m]$  – расширенная матрица  $\bar{\mathbf{L}}$  на  $m - r$  нулевых столбцов, чтобы вычитание в (23) было определено.

Итерационная формула (9) применяется до тех пор, пока  $\|\mathbf{g}^*(\mathbf{q}_{k+1})\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – точность вычислений.

### Этап 2. Формулировка процедуры определения НДС рефлектора геометрически нелинейным МКЭ

В общем случае задача определения НДС рефлектора основана на нелинейных уравнениях теории упругости (уравнении равновесия, уравнении связи перемещений и деформаций, законе Гука) [11]:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sigma_{kj} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right) = 0, \quad (24)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right), \quad (25)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E_m}{1 + \nu_m} \cdot (\varepsilon_{ij} + \frac{\nu_m}{1 - 2\nu_m} \cdot \delta_{ij} \varepsilon_{ll}) - \frac{E_m}{1 - 2\nu_m} \cdot \varepsilon_{ij}^T + \sigma_{ij}^0 \quad (26)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $u_i, \sigma_{ij}, \sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^T = \alpha \cdot \Delta T \delta_{ij}$ , – компоненты вектора перемещения узлов, второго тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа, тензора предварительных напряжений, тензора деформаций и тензора температурных соответственно;  $E_m, \nu_m$ , – модуль упругости и коэффициент Пуассона  $m$ -го материала соответственно,  $\alpha, \Delta T$  – коэффициент температурного расширения материала, величина изменения температуры соответственно. Значения индексов  $i, j, k = 1 \dots 3$ .

Граничные условия по перемещениям и напряжениям имеют следующий вид:

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega; \quad (27)$$

$$n_k \sigma_{kj} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = p_i^n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (28)$$

где  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$  – вектор, определяющий положение точки в континууме  $\Omega$ ,  $p_i^n(\mathbf{x})$  – напряжение на границе  $\partial\Omega$ , характеризуемое вектором нормали  $\mathbf{n}$ . Также

задаются поля начальных напряжений  $\sigma_{ij}^0$  и температуры:

$$\left. \begin{aligned} T^0 &= T^0(\mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^0 &= \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}), \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in \Omega. \quad (29)$$

Поле напряжений  $\sigma_{ij}^0$  моделирует напряжения, которые должны установиться в элементах конструкции рефлектора. С помощью поля температур  $T^0$  моделируется натяжение шнуров сети (за счет теплового расширения или сжатия).

Ввиду сложности решения задачи (24) – (29) аналитическими методами, привлекался нелинейный МКЭ, в котором уравнение (24) можно привести к нелинейному матричному уравнению равновесия [11]:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (30)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор-столбец неизвестных перемещений,  $\mathbf{K}(\mathbf{u})$  – матрица жесткости,  $\mathbf{b}$  – вектор столбец правой части.

Уравнение (30) решается итерационным методом Ньютона – Рафсона, где решения МПС использовались как начальное приближение следующим образом. По рассчитанным координатам узлов системы (2) строится КЭМ вантовой ФОС рефлектора. Далее, в ее элементах задаются начальные напряжения, рассчитанные по формуле

$$\sigma_0^{\text{МПС}} = \frac{1}{S_j} \mathbf{T}^{\text{МПС}}, \quad (31)$$

где  $S_j$  – площадь  $j$ -го вантового элемента  $\mathbf{T}^{\text{МПС}}$  – вектор-столбец натяжений с компонентами, рассчитанными из формулы (1):

$$T_j^{\text{МПС}} = q_j l_j. \quad (32)$$

В вантовых (не рассчитанных по МПС) и оболочечных элементах также задаются некоторые начальные значения напряжений  $\sigma_0^{\text{вант}}$ ,  $\sigma_0^{\text{об}}$  в зависимости от требований задачи, а в узлах КЭМ рефлектора задаются нулевые граничные условия по перемещениям вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Omega_{\text{КЭМ}} \setminus \omega_1^{\text{МПС}}, \quad (33)$$

где  $\Omega_{\text{КЭМ}}$  – область пространства, занимаемая КЭМ рефлектора,  $\omega_1^{\text{МПС}}$  – область пространства, занимаемая вантовыми элементами, рассчитанными по МПС. С физической точки зрения, условие (33) означает, что часть узлов КЭМ рефлектора фиксирована в пространстве. После постановки граничных условий по напряжениям и перемещениям производится первый расчет поля перемещений узлов КЭМ рефлектора итерационным методом Ньютона – Рафсона, учитывающим геометрическую нелинейность в программном комплексе (ПК) ANSYS. Далее полученное решение  $\mathbf{u}_1$  и соответствующие значения напряжений  $\sigma_{\text{вант}}^1$ ,  $\sigma_{\text{об}}^1$  вантовых и оболочечных элементов используются как начальное приближение для следующего расчета, но уже с измененными граничными условиями:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \left( \Omega_{\text{КЭМ}} \setminus \omega_1^{\text{МПС}} \cup \omega_2 \right), \quad (34)$$

где  $\omega_2$  – область пространства КЭМ рефлектора, на узлы которой уже не наложены условия нулевых перемещений (34), но сходимости метода Ньютона – Рафсона при этом не нарушена. Граничные условия изменяются до тех пор, пока не будет

получено поле перемещений узлов с изначально требуемыми граничными условиями:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Omega_{\text{КЭМ}} \setminus \bigcup_{i=1}^{N_e-e} \omega_i, \quad (35)$$

где  $e$  – количество элементов, на узлы которых не наложены условия нулевых перемещений (35),  $N_e$  – общее число элементов. Искомое решение соответствует начальному НДС рефлектора. Окончательное НДС определяется настройкой отражающей поверхности до минимального значения среднеквадратического отклонения (СКО) узлов отражающей поверхности от параболического профиля, определяемого уравнением (8).

### Пример расчета НДС ободного рефлектора

На рис. 3 показана схема КЭМ ободного рефлектора, состоящего из балочных, оболочечных и вантовых элементов, построенных в ПК ANSYS.

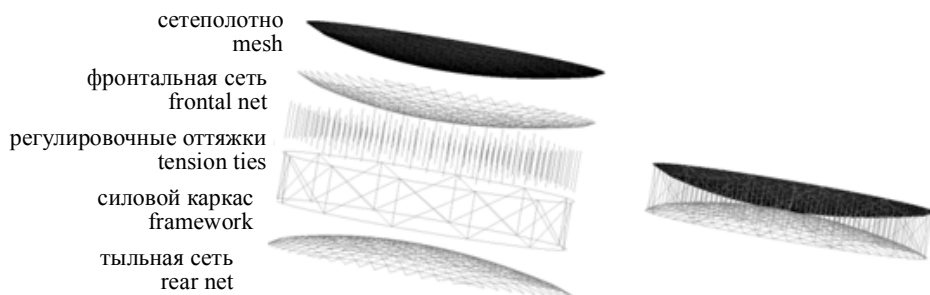
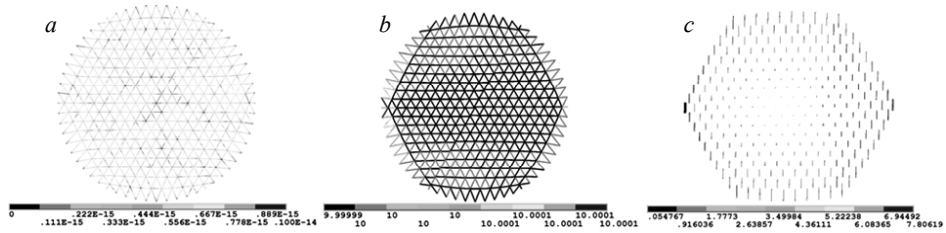


Рис. 3. Схема ободной КЭМ рефлектора в ПК ANSYS  
Fig. 3. Reflector finite-element model in ANSYS

Фронтальная (тыльная) сети, регулировочные оттяжки и шнуры, соединяющие вертикальные стойки силового каркаса, моделировались элементами типа Link180, работающими на растяжение. Их диаметр варьировался от 0.7 до 2 мм. Отражающая поверхность (сетеполотно) моделировалась оболочечными элементами типа Shell180 без изгибной жесткости и толщиной 0.1 мм. Обод и стойки силового каркаса моделировались балочными элементами типа Beam188 прямоугольного и круглого сечения с размерами 0.05×0.009 м и 0.01 м соответственно, высота стоек – 1.96 м. Диаметр ОП рефлектора – 12 м, фокусное расстояние – 8 м, клиренс – 1.125 м. Механические характеристики материалов КЭМ: модуль упругости силового каркаса, вантовых элементов, сетеполотна, составили 2·10<sup>11</sup> Па, 15.45·10<sup>6</sup> Па, 1.3·10<sup>6</sup> Па соответственно, коэффициент Пуассона – 0.3.

**Этап 1.** Согласно методу расчета, на первом этапе находится равновесная форма фронтальной (тыльной) сети рефлектора из решения задачи (2). На рис. 4 показана равновесная форма фронтальной (тыльной) сетей и соответствующее распределение натяжений в их элементах. Узлы на ободе считались фиксированными.

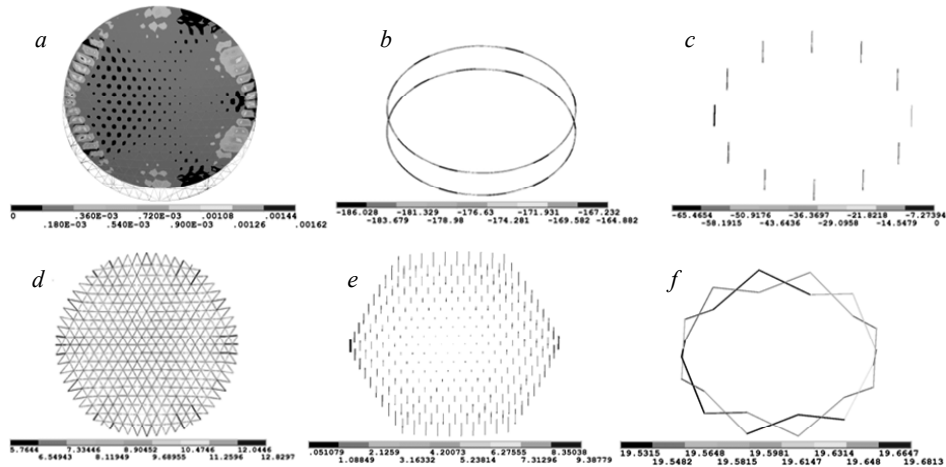
Из рис. 4, *a* видно, что значения перемещений узлов фронтальной (тыльной) сетей практически нулевые при значениях натяжений в элементах, показанных на рис. 4, *b* и *c*. Кроме того, значения натяжений на рис. 4, *b* практически равны целевому значению 10 Н. Это свидетельствует о правильном решении задачи (2).



**Рис. 4.** КЭМ фронтальной (тыльной) сети и регулировочных оттяжек, рассчитанных по МПС: *a* – распределение перемещений узлов, м; *b* – распределение натяжений в элементах фронтальной (тыльной сети); *c* – распределение натяжений в регулировочных оттяжках, Н

**Fig. 4.** Reflector frontal (rear) net and tension ties finite-element models calculated by force density method: *a* – frontal (rear) net node displacements, m; *b* – frontal (rear) net tensions distribution, N; *c* – tension ties tensions distribution, N

**Этап 2.** Рассчитанные значения координат в МПС узлов ФОС использовались для построения конфигурации КЭМ рефлектора, приближенной к равновесной, а значения натяжений её элементов использовались как граничные условия по напряжениям. Значение начальных натяжений в сетеполотне и вантовых элементах, соединяющих стойки, составили 2 Н/м и 20 Н соответственно. Кроме того, крайняя правая стойка на рис. 5, *c*) считалась фиксированной, т.е. в ее узлах задавались нулевые граничные условия по перемещениям. В результате расчета получено поле перемещений узлов рефлектора и соответствующие значения сжимающих усилий в элементах силового каркаса.



**Рис. 5.** Параметры НДС рефлектора: *a* – распределение перемещений узлов рефлектор, м; *b* – распределение сжимающих усилий в ободе, Н; *c* – распределение сжимающих усилий в стойках, Н; *d* – распределение натяжений в элементах ФС, Н; *e* – распределение натяжений в элементах оттяжек, Н; *f* – распределение натяжений в вантовых элементах, соединяющих стойки, Н

**Fig. 5.** Reflector stress-strain state parameters: *a* – reflector node displacements, m; *b* – rim axial forces N; *c* – column axial forces N; *d* – frontal net tensions, N; *e* – tension ties tension, N; *f* – tension forces in the cables connecting framework columns, N

Благодаря использованию решений МПС, расчет НДС рефлектора произведен сразу с изначально требуемыми граничными условиями. Однако в других примерах может потребоваться процедура последовательного изменения граничных условий по перемещениям.

На рис. 5, *d* наблюдается разброс натяжений в элементах ФС. Это объясняется воздействием натяжений сетеполотна и влиянием деформаций силового каркаса.

При этом величина СКО  $\Delta_T = \sqrt{\frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} (T_i - T_0)^2}$  натяжений  $T_i$  элементов фронтальной сети от целевого значения  $T_0 = 10$  Н составила 1.03 Н, где  $N_T$  – количество элементов. Для уменьшения  $\Delta_T$  рекомендуется учитывать в правых частях уравнений равновесия (2) натяжения оболочки сетеполотна.

Ключевым параметром, характеризующим радиотехнические характеристики и точность рефлектора, является величина СКО отклонения узлов КЭМ ОП от поверхности офсетного параболоида. Чем меньше эта величина, тем выше коэффициент усиления антенны [10]. В предложенной работе СКО выражено формулой

$$\delta_{\text{СКО}} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\Delta z_j^{\text{СКО}})^2 \right]^{1/2}, \quad (36)$$

где  $\Delta z_j^{\text{СКО}} = z_j^{\text{КЭМ}} + u_j^z - (z_j^{\text{нар}} + M)$ ,  $M = \sum_{j=1}^N (z_j^{\text{КЭМ}} + u_j^z - z_j^{\text{нар}}) / N$  – среднее отклонение,  $N$  – количество узлов ОП.  $z_j^{\text{нар}} = z_{\text{нар}} (x_j^{\text{КЭМ}} + u_j^x, y_j^{\text{КЭМ}} + u_j^y)$  – значения, вычисленные по формуле (8),  $x_j^{\text{КЭМ}}$ ,  $y_j^{\text{КЭМ}}$ ,  $z_j^{\text{КЭМ}}$  – координаты узлов КЭМ ОП,  $u_j^x, u_j^y, u_j^z$  – координаты вектора перемещений узлов КЭМ ОП. Наличие константы среднего отклонения  $M$  в (36) обусловлено тем, что КЭМ ОП аппроксимирует искривленный участок офсетного параболоида плоскими фигурами, расположенными по одну сторону от касательной плоскости к параболоиду. Это приводит к появлению систематической погрешности, которую необходимо компенсировать. Естественный способ компенсации – введение поправочного слагаемого (см., например, [14]). Иногда удается воспользоваться одинаковостью компенсирующих слагаемых в ячейках КЭМ [14]. Но в нашем случае избран подход, основанный на усреднении погрешности по отклонениям отдельных узлов КЭМ.

Величина  $\delta_{\text{СКО}}$  изменялась до минимального постоянного значения с помощью изменения длин регулировочных оттяжек. Регулировка происходила за несколько итераций в круге 5 м. При этом  $\delta_{\text{СКО}}$  изменялась от 0.932 до 0.929 мм. Заметим, что конечное значение  $\delta_{\text{СКО}}$  близко к начальному. Это также можно отнести к эффективности решений МПС, определяющих геометрию ОП рефлектора, приближенную к равновесной.

### Заключение

Сформулирован двухэтапный метод расчета НДС вантово-оболочечных конструкций сетчатых антенных рефлекторов. Метод основан на комбинации нелинейных МПС и МКЭ.

На первом этапе предложено использовать решения нелинейного МПС для вантовых элементов как начальное приближение в нелинейном МКЭ. При этом

шаг итерации плотности силы предлагается рассчитывать через псевдообратную матрицу Мура – Пенроуза в случае плохо обусловленной матрицы  $G^T G$ .

На втором этапе предлагается использовать процедуру последовательного изменения граничных условий по перемещениям в МКЭ при расчете НДС рефлекторов.

Метод успешно апробирован на 12-метровом ободном сетчатом рефлекторе. На первом этапе решения МПС верифицированы решениями МКЭ. На втором этапе решение задачи определения НДС получено сразу с требуемыми граничными условиями. Кроме того, значения СКО узлов ОП изменились незначительно в процессе настройки регулировочными оттяжками. Это свидетельствует о эффективности решений МПС для данной конструкции.

Если с помощью решений МПС не удастся определить НДС рефлектора сразу с требуемыми граничными условиями, то рекомендуется использовать процедуру последовательного изменения граничных условий по перемещениям узлов КЭМ, описанную выше.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lewis W. J. Tension structures. Form and behavior. Thomas Telford, 2003. 201 p.
2. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие. М.: Наука, 1979. 744 с.
3. Zienkiewicz O. C The finite element method for solid and structural mechanics. Butterworth-Heinemann, 2013. 714 p.
4. Ponomarev S.V., Zhukov A. P., Belkov A. V., Ponomarev V. S., Belov S. V., Pavlov M. S. Stress-strain state simulation of large-sized cable-stayed shell structures // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2015. V. 71. No. 012070. DOI: 10.1088/1757-899X/71/1/012070.
5. Белов С. В., Бельков А. В., Жуков А. П., Павлов М. С., Пономарев В. С., Пономарев С. В., Величко А. И., Халиманович В. И. Оценка напряженно-деформированного состояния силового каркаса крупногабаритного раскрываемого космического рефлектора // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 7-3. С. 131–133.
6. Schek H.J. The force density method for form finding and computation of general networks // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. № 3. P. 115–134.
7. Malerba P. G, Quagliaroli M. Flexible bridge decks suspended by cable nets. A constrained form finding approach // Int. J. Solids and Structures. 2013. V. 50. P. 2340–2352.
8. Morterolle S., Maurin B., Quirant J., Dupuy C. Numerical form-finding of geotensoid tension truss for mesh reflector // Acta Astronautica. 2012. V. 76. P. 154–163.
9. Yang G., Baoyan D., Zhang Y., Yang D. Uniform-tension form-finding design for asymmetric cable-mesh deployable reflector antennas. // Advances in Mechanical Engineering. 2016. V. 8 (10). P. 1–7. DOI: 10.1177/1687814016672367.
10. Tibert A.G. Deployable Tensegrity Structures for Space Applications [Electronic resource]: Doctoral Thesis. URL: <http://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/publications/TibertDocThesis.pdf>
11. Жуков А.П. Динамика отражающей поверхности крупногабаритного зонтичного рефлектора космического аппарата: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела, 2016. 156 с.
12. Бельков А.В., Белов С.В., Жуков А.П., Павлов М.С., Пономарев С.В. Расчет формообразующей структуры зонтичного сетчатого рефлектора // Решетневские чтения: материалы XXI Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева (Красноярск, 08–11 ноября 2017 г). С. 82–83.
13. Вержбицкий В.М. Вычислительная линейная алгебра: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2009. 351 с.



14. Бухтяк М.С., Никульчиков А.В. Оценка среднеквадратичного отклонения поверхности параболического рефлектора от шестиугольной фронтальной сети // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 4(20). С.5–14.

Статья поступила 29.10.2019 г.

Belkov A. V., Belov S.V., Zhukov A. P., Pavlov M. S., Ponomarev S. V., Kuznetsov S. A. (2019) METHOD FOR CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE FOR CABLE-MEMBRANE SPACE REFLECTOR STRUCTURES *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika I mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 5–18

DOI 10.17223/19988621/62/1

Keywords: force density method, finite-element method, geometrical nonlinearity, grid reflector, pseudoinverse matrix, normal pseudosolution.

Cable-membrane space reflectors are widely used in the modern space industry. They are essential for communication, monitoring, and observation of the Earth and space objects. Experiments with actual reflector structures are quite expensive. Thus, effective calculation techniques should be applied to describe the reflector behavior under operative loads. A specific feature of such structures is its geometrical non-linear behavior, i.e., significant displacements of the elements under loads. Therefore, geometrical nonlinear governing equations of elasticity theory should be applied in describing the mathematical model of the reflector. The exact solution of these equations could be found only in the simplest cases. Thus, numerical methods for such equations should be used. This paper presents a two-stage calculation method of the stress-strain state for reflector structures based on force density and finite-element methods. The first stage embraces the calculation of the cable element shapes for reflector frontal (rear) nets by the nonlinear force density method. It has been proved that, in some cases, calculating the force density vector iteration step could be challenging due to the ill-conditioned matrix being a component part of this vector. To exclude this problem, the Moore–Penrose pseudoinverse matrix was applied. In the second stage, the calculated reflector frontal (rear) net shapes and corresponding values of cable tension were used as an initial estimate in determining the reflector node displacement field via the nonlinear finite-element method. The reflector stress-strain state is determined using a solution sequence in which every next solution involves the previous one as an initial estimation.

**Financial support.** This work has been supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. Unique identifier RFMEFI57817X0257.

AMS Mathematical Subject Classification: 15A09

*Aleksey V. BELKOV* (Candidate of Physics and Mathematics, senior research fellow at Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University (RIAMM TSU), Tomsk, Russian Federation).

*Sergey V. BELOV* (junior research fellow at RIAMM TSU, Tomsk, Russian Federation). E-mail: belovsv@niipmm.tsu.ru

*Andrey P. ZHUKOV* (Candidate of Physics and Mathematics, senior research fellow at RIAMM TSU, Tomsk, Russian Federation)

*Mikhail S. PAVLOV* (junior research fellow at RIAMM TSU, Tomsk, Russian Federation)

*Sergey V. PONOMAREV* (Doctor of Physics and Mathematics, leading research fellow at RIAMM TSU, Tomsk, Russian Federation)

*Stanislav A. KUZNETSOV* (leading specialist at JSC ACADEMIAN M.F. RESHETNEV Information Satellite Systems, Zheleznogorsk, Russian Federation)

## REFERENCES

1. Lewis W. J. (2003). *Tension structures. Form and behavior*. London: Thomas Telford.
2. Rabotnov Y.N. (1979) *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of solids]. Moscow: Nauka.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. (2013) *The finite element method for solid and structural mechanics*. UK: Butterworth-Heinemann. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-24909-9>.
4. Ponomarev S.V., Zhukov A.P., Belkov A.V., Ponomarev V. S., Belov S.V., Pavlov M.S. (2015) Stress-strain state simulation of large-sized cable-stayed shell structures. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 71. pp. 012070. DOI: 10.1088/1757-899X/71/1/012070.
5. Belov S.V., Bel'kov A.V., Zhukov A.P., Pavlov M.S., Ponomarev V.S., Ponomarev S.V., Velichko A.I., Halimanovich V.I. (2013) Otsenka napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya silovogo karkasa krupnogabaritnogo raskryvaemogo kosmicheskogo reflektora [Framework stress-strain state estimation for large-sized deployable space reflector]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika*. 56(7-3). pp. 131–133.
6. Schek H.-J. (1974) The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 3. pp. 115–134.
7. Malerba P.G, Quagliaroli M. (2013) Flexible bridge decks suspended by cable nets. A constrained form finding approach. *International Journal of Solids and Structures*. 50. pp. 2340–2352.
8. Morterolle S., Maurin B., Quirant J., Dupuy C. (2012) Numerical form-finding of geotensoid tension truss for mesh reflector. *Acta Astronautica*. 76. pp. 154–163.
9. Yang G., Baoyan D., Zhang Y., Yang D. (2016) Uniform-tension form-finding design for asymmetric cable-mesh deployable reflector antennas. *Advances in Mechanical Engineering*. 8(10). pp. 1–7. – DOI: 10.1177/1687814016672367.
10. Tibert A.G. (2002) Deployable Tensegrity Structures for Space Applications: Doctoral Thesis. URL: <http://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/publications/TibertDocThesis.pdf>
11. Zhukov A.P. (2016) *Dinamika otrazhayushchej poverhnosti krupnogabaritnogo zontichnogo reflektora kosmicheskogo apparata* [The dynamics of the reflecting surface of a large-size umbrella-type reflector] Diss. in Physics and Mathematics.
12. Bel'kov A.V., Belov S.V., Zhukov A.P., Pavlov M.S., Ponomarev S.V. Initial estimation of geometrical nonlinear problem for mesh reflector (2017). *Materialy XXI Mezhdunarodnoy nauchnoy konferencii "Reshetnevskie chteniya"* [Materials XXI International scientific conference "Reshetnev reading"]. pp. 82–83.
13. Verzhbitskiy V.M. (2009) *Vychislitel'naya linejnaya algebra* [Computational linear algebra] Moscow: Vysshaya shkola.
14. Bukhtyak M.S., Nikul'chikov A.V. (2012) Otsenka srednekvadratichnogo otkloneniya poverkhnosti parabolicheskogo reflektora ot shestiuhol'noy frontal'noy seti [An estimate for the mean-square deviation of the paraboloid reflector surface from the hexagonal frontal network]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(20). pp. 5–14.

Received: October 29, 2019

В.А. Гайдак, Е.А. Тимошенко

## ИНВОЛУЦИИ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ $GL_2$ НАД ПОДКОЛЬЦОМ ПОЛЯ $\mathbf{Q}^1$

Получены необходимые и достаточные условия сопряжённости инволюций группы  $GL_2$  над произвольным подкольцом поля  $\mathbf{Q}$ . Показано, что если это подкольцо является (не является) 2-делимым, то число классов сопряжённых нецентральных инволюций равно 1 (соответственно 2).

**Ключевые слова:** матрица, полная линейная группа, сопряжённые инволюции, внутренний автоморфизм.

Важным классом абелевых групп без кручения являются вполне разложимые группы. Себельдиным [1] был решён вопрос об определяемости вполне разложимых групп без кручения кольцами эндоморфизмов. Впоследствии появился цикл работ Вильданова [2–4], который был посвящён вопросу определяемости вполне разложимой группы конечного ранга её группой автоморфизмов. Большая часть полученных в этом цикле результатов установлена его автором в предположении, что рассматриваемые вполне разложимые группы 2-делимы.

Настоящая статья представляет собой начальный шаг исследования, конечной целью которого является снятие требования 2-делимости для вполне разложимой группы. Непосредственная задача статьи – описать свойства инволюций полной линейной группы  $GL_2$  над произвольным подкольцом поля рациональных чисел, что в последующем позволит перейти к рассмотрению вопроса, определяются ли своими группами автоморфизмов вполне разложимые группы без кручения ранга два (и более высоких рангов).

Для коммутативного кольца с единицей  $R$  через  $GL_2(R)$ , как всегда, будет обозначаться группа обратимых  $(2 \times 2)$ -матриц с элементами из  $R$ ; эта группа состоит из тех матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ где } a, b, c, d \in R, \quad (1)$$

для которых определитель  $|A| = ad - bc$  обратим в  $R$ . Легко видеть, что множество  $ML_2(R) \subset GL_2(R)$  всех матриц с определителем  $\pm 1$  является подгруппой в  $GL_2(R)$ .

Пусть  $\mathbf{P}$  – множество всех простых чисел. Для всякого множества  $L \subset \mathbf{P}$  будем обозначать символом  $\mathbf{Q}^{(L)}$  то подкольцо поля рациональных чисел  $\mathbf{Q}$ , которое порождается элементом 1 и числами  $p^{-1}$ , где  $p \in L$ . Всюду ниже считаем, что  $R$  есть подкольцо с единицей поля  $\mathbf{Q}$ ; известно, что все такие подкольца исчерпываются кольцами вида  $\mathbf{Q}^{(L)}$ .

Нас будут интересовать инволюции группы  $GL_2(R)$ , т.е. матрицы  $A$ , у которых  $A^2$  совпадает с единичной матрицей  $E$  (что эквивалентно условию  $A^{-1} = A$ ).

**Предложение 1.** Для матрицы  $A$  следующие условия эквивалентны:

1)  $A$  – инволюция группы  $GL_2(R)$ ;

<sup>1</sup> Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 1.13557.2019/13.1).

2)  $A$  – инволюция группы  $ML_2(R)$ ;

3) либо  $A = E$ , либо  $A = -E$ , либо

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \text{ где } a, b, c \in R \text{ и } a^2 + bc = 1. \quad (2)$$

**Доказательство.** Ясно, что выполнено 2)  $\Rightarrow$  1). Обратное, если  $A$  – инволюция группы  $GL_2(R)$ , то имеем  $|A|^2 = |A^2| = |E| = 1$  и, значит,  $A \in ML_2(R)$ . Таким образом, импликация 1)  $\Rightarrow$  2) также справедлива.

Пусть матрица  $A \in ML_2(R)$  задана равенством (1). В случае  $|A| = 1$  справедливы следующие эквивалентности:

$$A^{-1} = A \Leftrightarrow A^* = A \Leftrightarrow a = d, b = c = 0, ad = 1 \Leftrightarrow A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Если же  $|A| = -1$ , то справедливы эквивалентности

$$A^{-1} = A \Leftrightarrow -A^* = A \Leftrightarrow d = -a, ad - bc = -1 \Leftrightarrow A \text{ имеет вид (2)}.$$

Тем самым доказана равносильность условий 2) и 3). ■

Для инволюций  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  введём обозначения  $J$  и  $I$  соответственно.

**Предложение 2.** а) Центр группы  $GL_2(R)$  состоит из диагональных матриц, на главной диагонали у которых стоит один и тот же обратимый в  $R$  элемент.

б) Центр группы  $ML_2(R)$  состоит из матриц  $E$  и  $-E$ .

**Доказательство.** Легко заметить, что перечисленные матрицы действительно принадлежат центрам групп  $GL_2(R)$  и  $ML_2(R)$  соответственно. Обратное, допустим, что матрица  $A$  вида (1) лежит в центре какой-либо из этих групп. Тогда из  $AJ = JA$  получаем  $b = c = 0$ , а так как  $AI = IA$ , то имеем  $a = d$ . Поскольку элемент  $|A| = ad = a^2$  должен быть обратимым, то и сам элемент  $a$  обратим в  $R$ . Остаётся заметить, что если  $A \in ML_2(R)$ , то  $a^2 \in \{-1, 1\}$ , откуда  $a = \pm 1$  и  $A = \pm E$ . ■

Из предложений 1 и 2 ясно, что в каждой из групп  $GL_2(R)$  и  $ML_2(R)$  множество всех нецентральных инволюций совпадает с множеством инволюций вида (2).

**Лемма 3.** Пусть  $A$  – инволюция вида (2). Тогда:

а) если  $c = 1$ , то инволюции  $A$  и  $I$  сопряжены в  $ML_2(R)$ ;

б) если  $c \in \{0, 2\}$  и  $b \in 2R$ , то инволюции  $A$  и  $J$  сопряжены в  $ML_2(R)$ .

**Доказательство.** а) Если  $c = 1$ , то  $a^2 + b = 1$ . Для матрицы  $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  имеем

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -a \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I.$$

Поскольку, очевидно,  $X \in ML_2(R)$ , то инволюции  $A$  и  $I$  сопряжены в  $ML_2(R)$ .

б) Пусть  $c = 0$ , тогда  $a^2 = 1$ . Если  $a = 1$ , то для  $X = \begin{pmatrix} 1 & -b/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  имеем

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 1 & b/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & b/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J;$$

если же  $a = -1$ , то, полагая  $X = \begin{pmatrix} -b/2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , мы можем записать равенства

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -b/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & b/2 \end{pmatrix} X = J.$$

Так как  $b \in 2R$ , то в обоих случаях  $X \in ML_2(R)$ , что и требовалось.

Пусть теперь  $c=2$ , тогда  $a^2+2b=1$ . Полагая  $X = \begin{pmatrix} (a+1)/2 & (a-1)/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , имеем

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 1 & (1-a)/2 \\ -1 & (1+a)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & -a \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & (1-a)/2 \\ 1 & -(1+a)/2 \end{pmatrix} X = J$$

и  $|X|=1$ ; поскольку  $a^2-1=-2b$ , то  $a \pm 1 \in 2R$  и, следовательно,  $X \in ML_2(R)$ . Таким образом, инволюции  $A$  и  $J$  сопряжены в  $ML_2(R)$ . ■

**Теорема 4.** Пусть  $p$  равно  $-1$  или простому числу,  $a, m, n \in R$  и

$$A = \begin{pmatrix} a & m \\ pn & -a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & pm \\ n & -a \end{pmatrix} \quad (3)$$

– нецентральные инволюции. Пусть, далее, выполнено одно из условий

- 1)  $p \neq 2$ ;
- 2)  $p=2$  и  $m, n \in 2R$ .

Тогда матрицы  $A$  и  $B$  сопряжены в  $ML_2(R)$ .

**Доказательство.** Введём обозначения

$$g_1 = \frac{a+1}{p} \cdot \frac{1-p}{2} + 1, g_2 = \frac{a-1}{p} \cdot \frac{1-p}{2} - 1. \quad (4)$$

Поскольку инволюция  $A$  нецентральная, то элемент  $(a+1)(a-1) = a^2-1$  равен  $-ptn$  и, значит, делится на  $p$  в кольце  $R$ . Заметим, что  $p$  является либо обратимым (если  $R = \mathbf{Q}^{(L)}$  и  $p \in L \cup \{-1\}$ ), либо простым элементом кольца  $R$ , поэтому хотя бы один из элементов  $a+1$  и  $a-1$  принадлежит идеалу  $pR$ .

Убедимся, что по меньшей мере один из элементов  $g_1$  и  $g_2$  лежит в  $R$ . В случае  $p \neq 2$  требуемое утверждение вытекает из условия  $1-p \in 2R$  и приведённых выше рассуждений ввиду (4). Пусть выполнено  $p=2$ , тогда  $g_1 = (3-a)/4$  и  $g_2 = -(3+a)/4$ . Считая, что  $2R \neq R$  (в противном случае сразу имеем  $g_1, g_2 \in R$ ), запишем  $a$  в виде несократимой дроби с целыми числителем и знаменателем:  $a = x/y$ . Число  $y$  представляет собой обратимый элемент кольца  $R$  и, значит, является нечётным; кроме того, из сказанного ранее вытекает, что  $a \pm 1 \in 2R$ , поэтому  $x$  тоже нечётно. Если число  $y-x$  делится на 4, то  $g_2 = (y-x-4y)/4y \in R$ . Если же число  $y-x$  при делении на 4 даёт остаток 2, то  $g_1 = (2y+y-x)/4y \in R$ .

Выбрав  $g$  принадлежащим множеству  $\{g_1, g_2\} \cap R$ , положим  $x = (p-1)/2$  и

$$X = \begin{pmatrix} 2ax + pg & mx \\ nx & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(p-1) + pg & m(p-1)/2 \\ n(p-1)/2 & g \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $g = \frac{(a \pm 1)(1-p) \pm 2p}{2p} = \frac{a(1-p) \pm (p+1)}{2p}$ , имеем

$$\begin{aligned} |X| &= \left( a(p-1) + \frac{a(1-p) \pm (p+1)}{2} \right) g - \frac{mn(p-1)^2}{4} = \\ &= \frac{a(p-1) \pm (p+1)}{2} \cdot \frac{a(1-p) \pm (p+1)}{2p} + \frac{-pmn(p-1)^2}{4p} = \\ &= \frac{(p+1)^2 - a^2(p-1)^2}{4p} + \frac{(a^2-1)(p-1)^2}{4p} = \frac{(p+1)^2 - (p-1)^2}{4p} = 1. \end{aligned}$$

Если при этом выполнено какое-то из условий 1) и 2), то все элементы матрицы  $X$  принадлежат  $R$  и, значит,  $X \in ML_2(R)$ . Наконец, ввиду равенств

$$X \begin{pmatrix} a & m \\ pn & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2x + pag + pmnx & atx + pmg \\ anx + png & mnx - ag \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & pm \\ n & -a \end{pmatrix} X$$

имеем  $A = X^{-1}BX$ , т.е. инволюции (3) сопряжены между собой в  $ML_2(R)$ . ■

**Теорема 5.** Всякая инволюция  $A$  вида (2), для которой  $b, c \in 2R$ , сопряжена с  $J$  в группе  $ML_2(R)$ .

**Доказательство.** Пусть  $c \neq 0$  (в противном случае нужное утверждение будет справедливо в силу леммы 3). Многократно применяя теорему 4, в которой была установлена сопряжённость инволюций вида (3) для  $m, n \in 2R$  и  $p \in \mathbf{P} \cup \{-1\}$ , мы можем «перенести» множитель  $c/2 \in R$  из левого нижнего угла матрицы в правый верхний, получив в результате инволюцию  $A'$ , имеющую элемент 2 в левом нижнем углу и сопряжённую с матрицей  $A$  в группе  $ML_2(R)$ . Остаётся лишь заметить, что ввиду пункта б) леммы 3 инволюции  $A'$  и  $J$  сопряжены в  $ML_2(R)$ . ■

В работе Вильданова [2] отмечался следующий факт: если  $R$  – подкольцо поля рациональных чисел  $\mathbf{Q}$  такое, что выполняется  $2R = R$ , то все не равные  $\pm E$  инволюции группы  $GL_2(R)$  сопряжены в этой группе с матрицей  $J$  (а значит, и между собой). Из теоремы 5 видно, что указанный факт остаётся справедливым и в том случае, когда речь идёт о сопряжённости инволюций в группе  $ML_2(R)$ .

Справедливо также

**Следствие 6.** Пусть  $2R \neq R$ . Для инволюции  $A$  вида (2) эквивалентны условия:

- 1) матрицы  $A$  и  $J$  сопряжены в  $GL_2(R)$ ;
- 2) матрицы  $A$  и  $J$  сопряжены в  $ML_2(R)$ ;
- 3)  $b, c \in 2R$ .

**Доказательство.** Ясно, что 2)  $\Rightarrow$  1); импликация 3)  $\Rightarrow$  2) была доказана ранее в теореме 5.

1)  $\Rightarrow$  3). Для произвольной матрицы  $X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \in GL_2(R)$  имеем

$$X^{-1}JX = \frac{1}{|X|} \cdot \begin{pmatrix} y & -v \\ -x & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X = \frac{1}{|X|} \cdot \begin{pmatrix} uy + vx & 2vy \\ -2ux & -uy - vx \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $|X|$  есть обратимый элемент кольца  $R$ , отсюда вытекает, что во всякой матрице, сопряжённой с  $J$  в  $GL_2(R)$ , на побочной диагонали находятся элементы, принадлежащие идеалу  $2R$  (что и требовалось). ■

**Теорема 7.** Всякая инволюция  $A$  вида (2), для которой выполняется  $b \notin 2R$  или  $c \notin 2R$ , сопряжена с  $I$  в группе  $ML_2(R)$ .

**Доказательство.** Пусть  $b \notin 2R$  или  $c \notin 2R$ , тогда  $2R \neq R$ . Поскольку

$$I^{-1}AI = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & c \\ b & a \end{pmatrix},$$

то мы можем с самого начала считать, что  $c \notin 2R$ ; в этом случае  $c$  можно записать как дробь с нечётными числителем и знаменателем. Применяя теорему 4 столько раз, сколько потребуется, можно перейти от инволюции  $A$  к сопряжённой с ней в группе  $ML_2(R)$  инволюции  $A'$ , у которой в левом нижнем и правом верхнем углах находятся элементы, равные 1 и  $bc$  соответственно. Чтобы завершить доказательство, остаётся заметить, что инволюции  $A'$  и  $I$  сопряжены в группе  $ML_2(R)$  в силу пункта а) леммы 3. ■

**Следствие 8.** Пусть  $2R \neq R$ . Для инволюции  $A$  вида (2) эквивалентны условия:

- 1) матрицы  $A$  и  $I$  сопряжены в  $GL_2(R)$ ;
- 2) матрицы  $A$  и  $I$  сопряжены в  $ML_2(R)$ ;
- 3)  $b \notin 2R$  или  $c \notin 2R$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 7 выполняется  $3) \Rightarrow 2)$ ; импликация  $2) \Rightarrow 1)$  очевидна.

$1) \Rightarrow 3)$ . Для произвольной матрицы  $X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \in GL_2(R)$  имеем

$$X^{-1}IX = \frac{1}{|X|} \cdot \begin{pmatrix} y & -v \\ -x & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \frac{1}{|X|} \cdot \begin{pmatrix} xy - uv & y^2 - v^2 \\ u^2 - x^2 & uv - xy \end{pmatrix}.$$

Нам надо показать, что хотя бы один из элементов побочной диагонали матрицы  $X^{-1}IX$  не лежит в  $2R$ . Если это не так, то  $y^2 - v^2 \in 2R$  и  $u^2 - x^2 \in 2R$ . Тогда

$$|X|^2 = (uy - vx)^2 = u^2(y^2 - v^2) - v^2(u^2 - x^2) + 2u^2v^2 - 2uvxy \in 2R,$$

что невозможно, поскольку  $|X|$  – обратимый элемент кольца  $R$ . Полученное нами противоречие завершает доказательство следствия. ■

**Замечание.** Мы показали, что если  $2R \neq R \subset \mathbf{Q}$ , то всякая нецентральная инволюция с элементами, принадлежащими кольцу  $R$ , сопряжена в  $GL_2(R)$  и в  $ML_2(R)$  ровно с одной из инволюций  $J$  и  $I$ . Близкие результаты, касающиеся возможности приводить нецентральные инволюции к некоторому «каноническому» виду, были установлены ранее Коном в предположении, что  $R$  представляет собой квазисвободную область целостности (подробнее см. [5]). Прямое применение указанных результатов к случаю  $R \subset \mathbf{Q}$ , к сожалению, невозможно: в статье [6] показано, что из всех подколец поля  $\mathbf{Q}$  квазисвободными будут только само  $\mathbf{Q}$  и кольцо целых чисел  $\mathbf{Z}$ .

В статье [5] был также установлен тот факт, что при некоторых ограничениях на  $R$  (более жёстких, чем свойство квазисвободы) для любых двух антикоммутирующих инволюций группы  $GL_2(R)$  существует внутренний автоморфизм данной группы, переводящий рассматриваемые инволюции в пару антикоммутирующих инволюций  $\{J, I\}$ . Убедимся, что указанный факт верен и для подколец поля  $\mathbf{Q}$ .

**Предложение 9.** Если  $R$  – подкольцо поля  $\mathbf{Q}$ , то для любых инволюций  $C$  и  $D$  группы  $GL_2(R)$ , таких, что выполнено равенство  $CD = -DC$ , найдётся внутренний автоморфизм этой группы, переводящий множество  $\{C, D\}$  в множество  $\{J, I\}$ .

**Доказательство.** Так как выполняется  $CD = -DC$ , то  $C$  и  $D$  – нецентральные инволюции. Через  $\varphi_X$  будем обозначать внутренний автоморфизм группы  $GL_2(R)$ , переводящий всякую матрицу  $W$  в  $X^{-1}WX$  (несложно заметить, что  $\varphi_X$  переводит антикоммутирующие инволюции в антикоммутирующие).

Рассмотрим сначала случай, когда по крайней мере одна из инволюций  $C$  и  $D$  сопряжена с  $J$ ; пусть это выполнено для инволюции  $C$ . Тогда существует матрица  $X \in GL_2(R)$ , для которой  $\varphi_X(C) = J$ . Будем считать, что нецентральная инволюция  $A = \varphi_X(D)$  задана условием (2). Подставляя эту инволюцию в равенство  $JA = -AJ$ , получаем, что  $a = 0$  и, значит,  $bc = 1$  (в частности, элемент  $b$  обратим в  $R$ ).

Для матрицы  $Y = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R)$  справедливы следующие равенства:

$$Y^{-1}JY = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J,$$

$$Y^{-1}AY = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ bc & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I.$$

Таким образом,  $\varphi_{XY}(C) = Y^{-1}X^{-1}CXY = Y^{-1}JY = J$  и  $\varphi_{XY}(D) = Y^{-1}X^{-1}DXY = Y^{-1}AY = I$ , т.е.  $\varphi_{XY}$  – требуемый внутренний автоморфизм.

Остаётся возможность того, что ни матрица  $C$ , ни матрица  $D$  не сопряжена с  $J$ . Тогда ввиду теорем 5 и 7 имеем  $2R \neq R$ , а инволюции  $C$  и  $D$  сопряжены с  $I$ . Зафиксируем матрицу  $X \in GL_2(R)$ , такую, что  $\varphi_X(C) = I$ , и введём обозначение  $A = \varphi_X(D)$ . Матрица  $A$  является нецентральной инволюцией; будем считать, что она задаётся уравнением (2). Подставляя эту матрицу в равенство  $IA = -AI$ , получаем, что  $c = -b$ , поэтому имеем  $a^2 - b^2 = 1$ . Так как инволюции  $D$  и  $I$  сопряжены, то инволюция  $A$  также сопряжена с  $I$ . В силу следствия 8 отсюда вытекает, что  $b \notin 2R$ . Представим  $a$  и  $b$  в виде дробей с целыми числителями и знаменателями:  $a = a'/k$  и  $b = b'/k$ , где  $b'$  и  $k$  – нечётные числа. Тогда из  $a^2 - b^2 = 1$  получаем  $a'^2 - b'^2 = k^2 \equiv 2 \pmod{4}$ , что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

В заключение мы покажем, что утверждение предложения 9 перестанет быть верным, если заменить в нём группу  $GL_2(R)$  её подгруппой  $ML_2(R)$ .

**Пример 10.** Пусть  $p \in \mathbf{P}$  и  $p \neq 2$ . Для инволюции  $D = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1/p & 0 \end{pmatrix}$  имеем

$$-DJ = -\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1/p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -1/p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1/p & 0 \end{pmatrix} = JD.$$

Положим  $R = \mathbf{Q}^{(L)}$ , где множество  $L \subset \mathbf{P}$  таково, что выполнено  $2 \notin L$ ,  $p \in L$ . Пусть матрица  $A \in ML_2(R)$  задаётся равенством (1) и обладает тем свойством, что автоморфизм  $\varphi_A$  переводит пару инволюций  $J, D \in ML_2(R)$  в пару  $\{J, I\}$ . Так как  $2R \neq R$ , то в силу следствия 8 инволюции  $J$  и  $I$  не сопряжены в  $ML_2(R)$ . Поэтому матрица  $\varphi_A(J) = A^{-1}JA$  должна совпасть с  $J$  (так как она не может совпадать с матрицей  $I$ ). Подставляя матрицу  $A$  в соотношение  $JA = AJ$ , мы получаем, что  $b = c = 0$ . Отсюда следует, что инволюция  $A^{-1}DA$ , в которую  $\varphi_A$  переводит инволюцию  $D$ , равна

$$\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/d \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p/a \\ 1/pd & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & pd/a \\ a/pd & 0 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, автоморфизм  $\varphi_A$  должен переводить  $D$  в  $I$ , а значит,  $a = pd$ , откуда  $|A| = ad - bc = ad = pd^2 \neq \pm 1$  и  $A \notin ML_2(R)$ . Итак, не существует внутреннего автоморфизма группы  $ML_2(R)$ , который переводил бы  $\{J, D\}$  в  $\{J, I\}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Себельдин А.М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Мат. заметки. 1972. Т. 11. № 4. С. 403–408.
2. Вильданов В.К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3(1). С. 174–177.
3. Vildanov V.K. Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2014. V. 197. No. 5. P. 590–594. DOI: 10.1007/s10958-014-1739-9.
4. Vildanov V.K. On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2018. V. 230. No. 3. P. 372–376. DOI: 10.1007/s10958-018-3742-z.
5. Cohn P.M. On the structure of the  $GL_2$  of a ring // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 1966. V. 30. P. 5–53. DOI: 10.1007/BF02684355.
6. Зонов М.Н., Тимошенко Е.А. О стандартной форме матриц второго порядка // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 59. С. 5–10. DOI: 10.17223/19988621/59/1.

Статья поступила 16.06.2019 г.



Gaidak V. A., Timoshenko E. A. (2019) INVOLUTIONS OF THE GENERAL LINEAR GROUP  $GL_2$  OVER A SUBRING OF THE FIELD  $Q$ . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 19–26

DOI 10.17223/19988621/62/2

Keywords: matrix, general linear group, conjugate involutions, inner automorphism.

We find necessary and sufficient conditions for the conjugacy of involutions of the group  $GL_2$  over a subring of  $Q$ . Let  $R$  be such a subring (with 1). As usual,  $GL_2(R)$  denotes the group of invertible  $2 \times 2$  matrices over  $R$ ; the set  $ML_2(R) \subset GL_2(R)$  of all matrices with determinant  $\pm 1$  is a subgroup of  $GL_2(R)$ .

**Proposition 1.** For a matrix  $A$ , the following conditions are equivalent:

- 1)  $A$  is an involution of the group  $GL_2(R)$ ;
- 2)  $A$  is an involution of the group  $ML_2(R)$ ;
- 3) either  $A = \pm E$  or  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$  with  $a, b, c \in R$  and  $a^2 + bc = 1$ .

Let  $J$  and  $I$  denote respectively the involutions  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  and  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Theorem 5.** Every involution  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$  such that  $b, c \in 2R$  is conjugate to  $J$  in  $ML_2(R)$ .

**Corollary 6.** Let  $2R \neq R$ . For an involution  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ , the following are equivalent:

- 1)  $A$  and  $J$  are conjugate in  $GL_2(R)$ ;
- 2)  $A$  and  $J$  are conjugate in  $ML_2(R)$ ;
- 3)  $b, c \in 2R$ .

**Theorem 7.** Every involution  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$  such that  $b \notin 2R$  or  $c \notin 2R$  is conjugate to  $I$  in

$ML_2(R)$ .

**Corollary 8.** Let  $2R \neq R$ . For an involution  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ , the following are equivalent:

- 1)  $A$  and  $I$  are conjugate in  $GL_2(R)$ ;
- 2)  $A$  and  $I$  are conjugate in  $ML_2(R)$ ;
- 3)  $b \notin 2R$  or  $c \notin 2R$ .

**Proposition 9.** For any involutions  $C$  and  $D$  of the group  $GL_2(R)$  such that  $CD = -DC$ , there is an inner automorphism of this group which sends the set  $\{C, D\}$  to the set  $\{J, I\}$ .

AMS Mathematical Subject Classification: 15B33, 20H25

**Financial support.** The work of the second author was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (state assignment No. 1.13557.2019/13.1).

Violetta A. GAIDAK (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: gaidakvioletta@gmail.com

Egor A. TIMOSHENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

#### REFERENCES

1. Sebedin A.M. (1972) Isomorphism conditions for completely decomposable torsion-free Abelian groups with isomorphic rings of endomorphisms. *Math. Notes. Acad. Sci. USSR*. 11(4). pp. 248–250. DOI: 10.1007/BF01367498.

2. Vildanov V.K. (2011) Opredelyaemost' vpolne razlozhimoy abelevoy gruppy bez krucheniya ranga 2 svoey gruppy avtomorfizmov [Determinability of a completely decomposable torsion-free rank 2 Abelian group by its automorphism group]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*. 3(1). pp. 174–177.
3. Vildanov V.K. (2014) Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group. *J. Math. Sci. (New York)*. 197(5). pp. 590–594. DOI: 10.1007/s10958-014-1739-9.
4. Vildanov V.K. (2018) On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group. *J. Math. Sci. (New York)*. 230(3). pp. 372–376. DOI: 10.1007/s10958-018-3742-z.
5. Cohn P.M. (1966) On the structure of the  $GL_2$  of a ring. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 30. pp. 5–53. DOI: 10.1007/BF02684355.
6. Zonov M.N., Timoshenko E.A. (2019) O standartnoy forme matrits vtorogo poryadka [On the standard form for matrices of order two]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 59. pp. 5–10. DOI: 10.17223/19988621/59/1.

Received: June 16, 2019

**Н.К. Смоленцев**

**ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПАРА-САСАКИЕВЫ СТРУКТУРЫ  
НА ГРУППАХ ЛИ**

Изучаются левоинвариантные параконтактные структуры Сасаки на группах Ли, которые получаются центральными расширениями из почти пара-кэлеровых структур на группах Ли. Есть несколько различных подходов к определению понятия параконтактных и пара-сасакиевых структур. В данной работе параконтактные структуры Сасаки определяются по той же схеме, что и обычные структуры Сасаки в случае контактных структур. В статье найдены условия пара-сасакиевости контактных структур. В случае групп Ли инвариантные пара-сасакиевые структуры могут быть получены из пара-кэлеровых структур при помощи процедуры центрального расширения. В этом случае найдены формулы, связывающие кривизну пара-кэлеровой группы Ли с кривизной соответствующей пара-сасакиевой группы Ли.

**Ключевые слова:** пара-комплексная структура, пара-сасакиевы многообразия; пара-кэлерова структура, левоинвариантная параконтактная структура.

Левоинвариантная почти комплексная структура на группе Ли  $H$  – это левоинвариантный эндоморфизм  $J$  касательного расслоения, удовлетворяющий условию  $J^2 = -Id$ . Почти комплексная структура  $J$  является интегрируемой (комплексной), если ее тензор Нейенхайса  $N_J(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[X, Y] - J[JX, Y]$  обращается в нуль. Левоинвариантная кэлерова структура на группе Ли  $H$  – это тройка  $(h, \omega, J)$ , состоящая из левоинвариантной римановой метрики  $h$ , левоинвариантной симплектической формы  $\omega$  и ортогональной левоинвариантной комплексной структуры  $J$ , причем  $h(X, Y) = \omega(X, JY)$  для любых левоинвариантных векторных полей  $X$  и  $Y$  на  $H$ . Поэтому такую структуру на группе  $H$  можно задать парой  $(\omega, J)$ , где  $\omega$  – симплектическая форма, а  $J$  – комплексная структура, согласованная с  $\omega$ , т.е. такая, что  $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ . Если  $\omega(X, JX) > 0, \forall X \neq 0$ , то получается кэлерова метрика, а если условие положительности не выполняется, то  $h(X, Y) = \omega(X, JY)$  является псевдоримановой метрикой и тогда  $(h, \omega, J)$  называется псевдокэлеровой структурой на группе Ли  $H$ . Из левоинвариантности рассматриваемых объектов следует, что псевдокэлерова структура  $(h, \omega, J)$  может быть задана значениями  $\omega, J$  и  $h$  на алгебре Ли  $\mathfrak{h}$  группы Ли  $H$ . Тогда  $(\mathfrak{h}, \omega, J, h)$  называется (псевдо)кэлеровой алгеброй Ли. Условие существования левоинвариантной положительно определенной кэлеровой метрики на группе Ли  $H$  накладывает серьезные ограничения на структуру ее алгебры Ли  $\mathfrak{h}$ . Такая алгебра Ли не может быть нильпотентной за исключением абелевого случая. Хотя нильпотентные группы Ли и нильмногообразия (за исключением тора) не допускают левоинвариантных кэлеровых метрик, но на таких многообразиях могут существовать левоинвариантные псевдоримановы кэлеровы метрики.

Почти пара-комплексной структурой на  $2n$ -мерном многообразии  $M$  называется поле  $P$  эндоморфизмов касательного расслоения  $TM$ , таких, что  $P^2 = Id$ , причем

ранги собственных распределений  $T^\pm M := \ker(\text{Id} \mp P)$  равны. Почти паракомплексная структура  $P$  называется *интегрируемой*, если распределения  $T^\pm M$  инволютивны. В этом случае  $P$  называется пара-комплексной структурой. Аналогом тензора Нейенхейса почти комплексной структуры для случая любого тензорного поля  $T$  типа  $(1,1)$  является кручение Нейенхейса [5]  $[T, T](X, Y) = T^2[X, Y] + [TX, TY] - T[X, TY] - T[TX, Y]$ . В частности, тензор Нейенхейса  $N_P$  почти паракомплексной структуры  $P$  определяется равенством

$$N_P(X, Y) = [X, Y] + [PX, PY] - P[PX, Y] - P[X, PY],$$

для всех векторных полей  $X, Y$  на  $M$ . Как и в комплексном случае, паракомплексная структура  $P$  интегрируема тогда и только тогда, когда  $N_P = 0$ . В работе [6] представлен обзор теории пара-комплексных структур и подробно рассмотрены инвариантные пара-комплексные и пара-кэлеровы структуры на однородных многообразиях. Пара-кэлерово многообразие можно определить как псевдориманово многообразие  $(M, g)$  с косимметрической пара-комплексной структурой  $P$ , параллельной отношению связности Леви-Чивита. Если  $(g, P)$  – пара-кэлерова структура на  $M$ , то  $\omega = g \circ P$  является симплектической структурой. В работе [7] изучались левоинвариантные почти пара-комплексные структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли, которые не допускают ни симплектических, ни комплексных структур.

В нечетномерном случае аналогом симплектической структуры является контактная структура [5]. Левоинвариантные контактные структуры на группах Ли изучались в работах [8, 9]. Известно, что контактные алгебры Ли  $(\mathfrak{g}, \eta)$  с нетривиальным центром являются центральными расширениями симплектических алгебр Ли  $(\mathfrak{h}, \omega)$  при помощи невырожденного коцикла  $\omega$ . Левоинвариантные контактные структуры с положительно определенной римановой метрикой существуют далеко не всегда [8]. Псевдоримановы структуры Сасаки на семимерных нильпотентных группах Ли изучались в работе [10].

В данной работе мы будем рассматривать левоинвариантные параконтактные структуры на группах Ли. Параконтактная метрическая структура на многообразии задается четырьмя объектами  $(\eta, \xi, \varphi, g)$ ,  $\eta$  – контактная форма,  $\xi$  – векторное поле Роба,  $g$  – псевдориманова метрика на и  $\varphi$  – аффинор, которые связаны определенными соотношениями (см. ниже). Псевдориманова контактная метрическая структура называется  $K$ -контактной, если векторное поле Роба  $\xi$  является киллинговым.

Пусть  $\nabla$  – связность Леви-Чивита соответствующая (псевдо)римановой метрике  $g$ . Она определяется из шестичленной формулы [11], которая для левоинвариантных векторных полей  $X, Y, Z$  на группе Ли принимает вид  $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y])$ . Напомним, что тензор кривизны определяется формулой  $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$ . Тензор Риччи – это свертка тензора кривизны по первому и четвертому (верхнему) индексам,  $Ric_{jk} = R_{ijk}^i$ . Для псевдоримановой метрики  $g$  тензор Риччи  $Ric(X, Y)$  может быть также определен по формуле

$$Ric(X, Y) = \sum_i \varepsilon_i g(R(e_i, Y)Z, e_i),$$

где  $\{e_i\}$  – ортонормированный репер и  $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ .

Мы предполагаем, что внешнее произведение и внешний дифференциал определяются без нормирующего множителя. Тогда, в частности,  $dx \wedge dy = dx \otimes dy - dy \otimes dx$  и  $d\eta(X, Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])$ . Это обуславливает некоторые отличия формул от тех, что приведены в книге Блэра [5].

## 2. Контактные и параконтактные структуры

Дифференцируемое  $(2n+1)$ -мерное многообразие  $M$  класса  $C^\infty$  называется *контактным многообразием*, если на нем задана дифференциальная 1-форма  $\eta$ , такая что  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  всюду на  $M^{2n+1}$ . Форма  $\eta$  называется *контактной*. Контактная форма определяет на многообразии  $M^{2n+1}$  распределение  $D = \{X \in TM^{2n+1} \mid \eta(X) = 0\}$  ранга  $2n$ , которое называется *контактным распределением*. Контактное многообразие  $M^{2n+1}$  имеет всюду ненулевое векторное поле  $\xi$ , которое определяется свойствами  $\eta(\xi) = 1$  и  $d\eta(\xi, X) = 0$  для всех векторных полей  $X$  на  $M^{2n+1}$ . Поле  $\xi$  называется *полем Рибба* или *характеристическим векторным полем* контактной структуры. Легко видеть, что  $L_\xi \eta = 0$ .

Если  $M^{2n+1}$  контактное многообразие с контактной формой  $\eta$ , то *контактной метрической структурой* называется четверка  $(\eta, \xi, \varphi, g)$ , где  $\xi$  – поле Рибба,  $g$  – риманова метрика на  $M^{2n+1}$  и  $\varphi$  – аффинор на  $M^{2n+1}$ , для которых имеют место следующие свойства [5]:

- 1)  $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ ;
- 2)  $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ ;
- 3)  $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ ,

где  $I$  – тождественный эндоморфизм касательного расслоения.

Риманова метрика  $g$  контактной метрической структуры называется *ассоциированной* с контактной структурой  $\eta$ . Из третьего свойства сразу следует, что ассоциированная метрика для контактной структуры  $\eta$  полностью определяется аффинором  $\varphi$ :  $g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$ . Если характеристическое векторное поле  $\xi$  порождает группу изометрий, т. е.  $\xi$  – векторное поле Киллинга,  $L_\xi g = 0$ , то такую контактную метрическую структуру называют *K-контактной* [5]. Это эквивалентно условию  $L_\xi \varphi = 0$ .

Напомним [11], что *почти контактной* структурой на многообразии  $M^{2n+1}$  называется тройка  $(\eta, \xi, \varphi)$ , где  $\eta$  –1-форма,  $\xi$  – векторное поле и  $\varphi$  – аффинор на  $M^{2n+1}$ , обладающие свойствами  $\eta(\xi) = 1$  и  $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ .

Пусть  $M^{2n+1}$  – почти контактное многообразие. Рассмотрим прямое произведение  $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ . Векторное поле на  $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$  представим в виде  $(X, f\partial_t)$ , где  $X$  – касательное к  $M^{2n+1}$ ,  $t$  – координата на  $\mathbf{R}$ ,  $\partial_t$  – координатное векторное поле на  $\mathbf{R}$  и  $f$  – функция класса  $C^\infty$  на  $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ . Определим почти комплексную структуру  $J$  на прямом произведении  $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$  следующим образом [2]:  $J(X, f\partial_t) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\partial_t)$ . Почти контактная структура  $(\eta, \xi, \varphi)$  называется *нормальной*, если интегрируема определенная выше почти комплексная структура  $J$ . На почти контактном многообразии определены четыре тензора [5]  $N^{(1)}$ ,  $N^{(2)}$ ,  $N^{(3)}$  и  $N^{(4)}$  следующими выражениями:

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi, N^{(2)}(X, Y) = (L_{\varphi X} \eta)(Y) - (L_{\varphi Y} \eta)(X),$$

$$N^{(3)}(X, Y) = (L_\xi \varphi)X, N^{(4)}(X, Y) = (L_\xi \eta)(X).$$

Почти контактная структура  $(\eta, \xi, \varphi)$  является *нормальной*, если эти тензоры обращаются в нуль. Однако из обращения в нуль тензора  $N^{(1)}$  следует, что и остальные тензоры  $N^{(2)}$ ,  $N^{(3)}$  и  $N^{(4)}$  также обращаются в нуль. Поэтому условие нормальности только следующее:  $N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi = 0$ .

Псевдориманова контактная метрическая структура  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  называется *K-контактной*, если векторное поле Рибба  $\xi$  является киллинговым. Псевдориманова контактная метрическая структура  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  называется *сасакиевой*, если  $N^{(1)}(X, Y) = 0$ . Таким образом, многообразие Сасаки – это нормальное контактное метрическое многообразие. Многообразие Сасаки всегда является *K-контактным*.

**Определение 1.** Параконтактной структурой на контактном многообразии  $M^{2n+1}$  называется тройка  $(\eta, \xi, \varphi)$ , где  $\eta$  – контактная 1-форма,  $\xi$  – поле Рибба и  $\varphi$  – аффиносор на  $M^{2n+1}$ , обладающий свойством

$$\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi.$$

Кроме того, предполагается, что ранги  $\pm 1$ -собственных распределений  $D^\pm$  равны (аффиносор  $\varphi$  действует на распределении  $D = \text{Ker}(\eta)$  как пара-комплексная структура).

**Определение 2.** Если  $M^{2n+1}$  контактное многообразие с контактной формой  $\eta$ , то параконтактной метрической структурой называется четверка  $(\eta, \xi, \varphi, g)$ , где  $\xi$  – поле Рибба,  $g$  – псевдориманова метрика на  $M^{2n+1}$  и  $\varphi$  – аффиносор на  $M^{2n+1}$ , для которых имеют место следующие свойства:

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= I - \eta \otimes \xi, \quad d\eta(X, Y) = g(\varphi X, Y), \\ g(\varphi X, \varphi Y) &= -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

Из третьего свойства сразу следует, что ассоциированная метрика  $g$  для пара-контактной структуры полностью определяется аффиносором  $\varphi$ :

$$g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Легко видеть, что  $d\eta(\varphi X, \varphi Y) = -d\eta(X, Y)$ .

Пусть  $M^{2n+1}$  – параконтактное многообразие. Рассмотрим прямое произведение  $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ . Векторное поле на  $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$  представим в виде  $(X, f\partial_t)$ , где  $X$  – касательный к  $M^{2n+1}$ ,  $t$  – координата на  $\mathbf{R}$  и  $f$  – функция на  $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ . Следуя [5 (Блэр)], дадим

**Определение 3.** Параконтактная структура  $(\eta, \xi, \varphi)$  называется нормальной, если интегрируема почти пара-комплексная структура  $J$  на  $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ , определенная формулой

$$J(X, f\partial_t) = (\varphi X - f\xi, -\eta(X)\partial_t).$$

Выразим условие интегрируемости пара-комплексной структуры  $J$  в терминах аффиносора  $\varphi$  на  $M^{2n+1}$ . Условием интегрируемости является обращение в нуль кручения Нейенхейса:

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] = 0.$$

Вычислим это кручение сначала на векторных полях типа  $(X, 0)$ , а затем для пар  $(X, 0)$  и  $(0, \partial_t)$ :

$$\begin{aligned} [J, J]((X, 0), (Y, 0)) &= ([X, Y], 0) + [(\varphi X, -\eta(X)\partial_t), (\varphi Y, -\eta(Y)\partial_t)] - \\ &\quad - J[(X, 0), (\varphi Y, -\eta(Y)\partial_t)] - J[(\varphi X, -\eta(X)\partial_t), (Y, 0)] = \\ &= (\varphi^2[X, Y] + \eta([X, Y])\xi, 0) + ([\varphi X, \varphi Y], (-\varphi X(\eta(Y)) + \varphi Y(\eta(X)))\partial_t) - \\ &\quad - (\varphi[X, \varphi Y] + X(\eta(Y))\xi, -\eta([X, \varphi Y])\partial_t) - (\varphi[\varphi X, Y] - Y(\eta(X))\xi, -\eta([\varphi X, Y])\partial_t) = \\ &= ([\varphi, \varphi](X, Y) - d\eta(X, Y)\xi, (-L_{\varphi X} \eta)(Y) + (L_{\varphi Y} \eta)(X))\partial_t; \\ [J, J]((X, 0), (0, \partial_t)) &= [(X, 0), (0, \partial_t)] + [(\varphi X, -\eta(X)\partial_t), (-\xi, 0)] - \\ &\quad - J[(X, 0), (-\xi, 0)] - J[(\varphi X, -\eta(X)\partial_t), (0, \partial_t)] = \\ &= (-[\varphi X, \xi], -\xi(\eta(X))\partial_t) - J(-[X, \xi], 0) = ((L_\xi \varphi)(X), -(L_\xi \eta)(X))\partial_t. \end{aligned}$$

Таким образом, условие интегрируемости пара-комплексной структуры  $J$  выражается обращением в нуль четырех тензоров:

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= [\varphi, \varphi](X, Y) - d\eta(X, Y)\xi, \quad N^{(2)}(X, Y) = (L_{\varphi X} \eta)(Y) - (L_{\varphi Y} \eta)(X), \\ N^{(3)}(X, Y) &= (L_\xi \varphi)X, \quad N^{(4)}(X, Y) = (L_\xi \eta)(X). \end{aligned}$$

Однако из обращения в нуль тензора  $N^{(1)}$  следует, что и остальные тензоры также обращаются в нуль (доказательство этого полностью повторяет аналогичное доказательство из [5]). Поэтому условие нормальности параконтактной структуры только следующее:  $N^{(1)}(X, Y) = 0$ .

**Определение 4.** Нормальная параконтактная метрическая структура  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  называется пара-сасакиевой.

Эквивалентное условие:  $N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) - d\eta(X, Y)\xi = 0$ .

**Определение 5.** Параконтактная метрическая структура  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  называется  $K$ -контактной, если векторное поле Рибба  $\xi$  является киллинговым.

Многообразии Сасаки всегда является  $K$ -контактным.

### 3. Параконтактные структуры на центральных расширениях

Контактные алгебры Ли могут быть получены в результате центральных расширений симплектических алгебр Ли  $\mathfrak{h}$ . Напомним эту процедуру. Если имеется симплектическая алгебра Ли  $(\mathfrak{h}, \omega)$ , то центральное расширение  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$  есть алгебра Ли, в которой скобки Ли задаются следующим образом:

- $[X, \xi]_{\mathfrak{g}} = 0$ ;
- $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi$  для любых  $X, Y \in \mathfrak{h}$ ,

где  $\xi = \partial_t$  – единичный вектор из  $\mathbf{R}$ .

На алгебре Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$  контактная форма задается формой  $\eta = \xi^*$ , а  $\xi = \partial_t$  – поле Рибба. Если  $x = X + \lambda\xi$  и  $y = Y + \mu\xi$ , где  $X, Y \in \mathfrak{h}, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , тогда

$$d\eta(x, y) = -\eta([x, y]) = -\xi^*([X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi) = -\omega(X, Y).$$

Как известно, классы изоморфизмов центральных расширений алгебры Ли  $\mathfrak{h}$  находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами  $H^2(\mathfrak{h}, \mathbf{R})$ . Невырожденные элементы  $\omega$  из  $H^2(\mathfrak{h}, \mathbf{R})$  (симплектические алгебры Ли) определяют контактные структуры на  $\mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ .

Для задания аффинора  $\varphi$  на  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$  можно использовать почти пара-комплексную структуру  $J$  на  $\mathfrak{h}$  следующим образом: если  $x = X + \lambda\xi$ , где  $X \in \mathfrak{h}$ , то  $\varphi(x) = JX$ . Если эта почти пара-комплексная структура  $J$  на  $\mathfrak{h}$  будет еще и согласованной с  $\omega$ , т. е. обладать свойством  $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$ , то мы получим параконтактную (псевдориманову) метрическую структуру  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  на  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ , где

$$g(X, Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Пусть  $h(X, Y) = \omega(X, JY)$  – ассоциированная (псевдо)риманова метрика на симплектической алгебре Ли  $(\mathfrak{h}, \omega)$ . Тогда для  $x = X + \lambda\xi$  и  $y = Y + \mu\xi$ , где  $X, Y \in \mathfrak{h}$ , имеем

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= -d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y); \\ g(x, y) &= \omega(X, JY) + \lambda\mu = h(X, Y) + \lambda\mu; \\ \omega(X, Y) &= h(X, JY). \end{aligned}$$

**Предложение.** Центральное расширение  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$  почти пара-кэлеровой алгебры Ли  $\mathfrak{h}$  является  $K$ -контактной алгеброй Ли.

**Доказательство.** Как известно [5], контактное многообразие называется  $K$ -контактным, если  $L_{\xi}\varphi = 0$ . Для левинвариантных полей вида  $x = X + \lambda\xi$  и  $y = Y + \mu\xi$  и где  $X, Y \in \mathfrak{h}$  имеем

$$g((L_{\xi}\varphi)x, y) = g(L_{\xi}(\varphi x) - \varphi(L_{\xi}x), y) = 0,$$

поскольку  $L_{\xi}x = [\xi, X + \lambda\xi] = 0$ . Поэтому  $L_{\xi}\varphi = 0$ . ■

**Теорема 1.** Пусть  $(\mathfrak{h}, \omega, J)$  – почти пара-кэлерова алгебра Ли  $\mathfrak{h}$  и  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  – соответствующая ей параконтактная метрическая структура на центральном расширении  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ . Тогда кручение Нейенхайса  $[\varphi, \varphi]$  на  $\mathfrak{g}$  следующим образом выражается через тензор Нейенхайса  $N_J$  почти пара-комплексной структуры  $J$  на  $\mathfrak{h}$ :

$$[\varphi, \varphi](x, y) = N_J(X, Y) + d\eta(x, y)\xi,$$

где  $x = X + \lambda\xi$  и  $y = Y + \mu\xi$  и где  $Y, Y \in \mathfrak{h}$ .

**Доказательство.** Непосредственные вычисления:

$$\begin{aligned} [\varphi, \varphi](x, y) &= [\varphi, \varphi](X + \lambda\xi, Y + \mu\xi) = \\ &= \varphi^2[X + \lambda\xi, Y + \mu\xi] + [\varphi(X + \lambda\xi), \varphi(Y + \mu\xi)] - \\ &\quad - \varphi[X + \lambda\xi, \varphi(Y + \mu\xi)] - \varphi[\varphi(X + \lambda\xi), Y + \mu\xi] = \\ &= \varphi^2([X, Y]_{\mathfrak{h}}) + [J(X), J(Y)] - \varphi[X + \lambda\xi, J(Y)] - \varphi[J(X), Y + \mu\xi] = \\ &= + [X, Y]_{\mathfrak{h}} + [J(X), J(Y)]_{\mathfrak{h}} + \omega(JX, JY)\xi - \varphi[X, J(Y)] - \varphi[J(X), Y] = \\ &= + [X, Y]_{\mathfrak{h}} + [J(X), J(Y)]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi - \varphi([X, J(Y)]_{\mathfrak{h}} + \\ &\quad + \omega(X, JY)\xi) - \varphi([J(X), Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(JX, Y)\xi) = \\ &= [X, Y]_{\mathfrak{h}} + [J(X), J(Y)]_{\mathfrak{h}} - J([X, J(Y)]_{\mathfrak{h}}) - J([J(X), Y]_{\mathfrak{h}}) - \omega(X, Y)\xi = \\ &= N_J(X, Y) - \omega(X, Y)\xi = N_J(X, Y) + d\eta(X, Y)\xi = N_J(X, Y) + d\eta(x, y)\xi. \blacksquare \end{aligned}$$

**Следствие 1.** Тензор  $N^{(1)}(x, y)$  параконтактной метрической структуры  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  на центральном расширении  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$  выражается через тензор Нейенхайса  $N_J$  почти пара-комплексной структуры  $J$  на  $\mathfrak{h}$  по формуле

$$N^{(1)}(x, y) = N_J(X, Y),$$

где  $x = X + \lambda\xi$  и  $y = Y + \mu\xi$  и где  $Y, Y \in \mathfrak{h}$ .

**Доказательство.**  $N^{(1)}(x, y) = [\varphi, \varphi](x, y) - d\eta(x, y)\xi = N_J(X, Y) + d\eta(x, y)\xi - d\eta(x, y)\xi = N_J(X, Y)$ . ■

**Следствие 2.** Параконтактная метрическая структура  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  на центральном расширении  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$  является пара-сасакиевой тогда и только тогда, когда симплектическая алгебра  $(\mathfrak{h}, \omega, J)$  является пара-кэлеровой.

#### 4. Ковариантные производные и кривизна

В этом разделе мы установим формулы, связывающие свойства кривизны почти пара-кэлеровых алгебр Ли  $(\mathfrak{h}, \omega, J)$  и полученных из них центральными расширениями параконтактных структур  $(\mathfrak{g}, \eta, \xi, \varphi, g)$ . Пусть  $\nabla$  и  $D$  – ковариантные производные связностей Леви-Чивита на алгебрах Ли  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{h}$ , соответственно.

**Лемма.** Пусть  $(\omega, J, h)$  – почти пара-кэлерова структура на алгебре Ли  $\mathfrak{h}$  и  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  – соответствующая ей параконтактная метрическая структура на центральном расширении  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ . Тогда ковариантная производная  $\nabla$  на  $\mathfrak{g}$  выражается через ковариантную производную  $D$  на  $\mathfrak{h}$ , форму  $\omega$  и почти пара-комплексную структуру  $J$  на  $\mathfrak{h}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= (D_X Y)_{\mathfrak{h}} + \frac{1}{2} \omega(X, Y)\xi; \\ \nabla_X \xi &= \nabla_{\xi} X = \frac{1}{2} JX \text{ и } \nabla_{\xi} \xi = 0, \end{aligned}$$

где  $X, Y \in \mathfrak{h}$ .

**Доказательство.** Непосредственные вычисления проводятся с использованием шестичленной формулы [10], которая для левоинвариантных векторных полей  $x, y, z$  на группе Ли принимает вид:  $2g(\nabla_{[x, y]}, z) = g([x, y], z) + g([z, x], y) + g(x, [z, y])$ . Левоинвариантное векторное поле  $x$  на  $\mathfrak{g}$  мы представляем в виде  $x = X + \lambda\xi$ , где



$X \in \mathfrak{h}$ . Тогда с учетом  $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi$ ,  $[X, \xi]_{\mathfrak{g}} = 0$ , и ортогональности  $\mathfrak{h}$  и  $\xi$ , получаем для  $X, Y \in \mathfrak{h}$ :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = h([X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z) + h([Z, X]_{\mathfrak{h}}, Y) + h(X, [Z, Y]_{\mathfrak{h}}) = 2h(D_X Y, Z);$$

$$2g(\nabla_X Y, \xi) = g([X, Y]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g([\xi, X]_{\mathfrak{g}}, Y) + g(X, [\xi, Y]_{\mathfrak{g}}) = \omega(X, Y).$$

Следовательно,  $\nabla_X Y = (D_X Y)_{\mathfrak{h}} + \frac{1}{2} \omega(X, Y)\xi$ . Далее, с учетом  $h(X, Y) = \omega(X, JY)$ :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X \xi, Z) &= g([X, \xi]_{\mathfrak{g}}, Z) + g([Z, X]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(X, [Z, \xi]_{\mathfrak{g}}) = \\ &= \omega(Z, X) = \omega(Z, JX) = h(Z, X) = g(JX, Z); \end{aligned}$$

$$2g(\nabla_{\xi} \xi, Z) = g([\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, Z) + g[Z, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(\xi, [Z, \xi]_{\mathfrak{g}}) = 0;$$

$$2g(\nabla_X \xi, \xi) = g([X, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g([\xi, X]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(X, [\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}) = 0;$$

$$2g(\nabla_{\xi} \xi, \xi) = g([\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g[\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(\xi, [\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}) = 0.$$

Поэтому  $\nabla_X \xi = \frac{1}{2} JX \in \mathfrak{h}$ . Аналогично,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_{\xi} Y, Z) &= g([\xi, Y]_{\mathfrak{g}}, Z) + g([Z, \xi]_{\mathfrak{g}}, Y) + g(\xi, [Z, Y]_{\mathfrak{g}}) = \\ &= \omega(Z, Y) = \omega(Z, JY) = h(Z, Y) = g(JY, Z); \end{aligned}$$

$$2g(\nabla_{\xi} \xi, Z) = g([\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, Z) + g[Z, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(\xi, [Z, \xi]_{\mathfrak{g}}) = 0;$$

$$2g((\nabla_{\xi} Y, \xi) = g([\xi, Y]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g([\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, Y) + g(\xi, [\xi, Y]_{\mathfrak{g}}) = 0;$$

$$2g(\nabla_{\xi} \xi, \xi) = g([\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g[\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(\xi, [\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}) = 0.$$

Следовательно,  $\nabla_{\xi} Y = \frac{1}{2} JY \in \mathfrak{h}$ . ■

**Теорема 2.** Пусть  $(\omega, J, h)$  – почти пара-кэлерова структура на алгебре Ли  $\mathfrak{h}$  и  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  – соответствующая ей параконтактная метрическая структура на центральном расширении  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ . Тогда тензор кривизны  $R$  на  $\mathfrak{g}$  выражается через тензор кривизны  $R_{\mathfrak{h}}$  на  $\mathfrak{h}$ , форму  $\omega$  и почти пара-комплексную структуру  $J$  на  $\mathfrak{h}$  по формулам:

$$R(X, Y)Z = R_{\mathfrak{h}}(X, Y)Z + \frac{1}{2} D_Z \omega(X, Y)\xi - \frac{1}{4} (\omega(X, Z)JY - \omega(Y, Z)JX) - \frac{1}{2} \omega(X, Y)JZ;$$

$$R(X, Y)\xi = \frac{1}{2} ((D_X J)Y - (D_Y J)X);$$

$$R(X, \xi)Z = \frac{1}{2} (D_X J)Z + \frac{1}{4} g(X, Z)\xi, \quad R(X, \xi)\xi = -\frac{1}{4} X,$$

где  $X, Y \in \mathfrak{h}$ .

**Доказательство.** Заключается в непосредственных вычислениях по формуле  $R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$  с использованием формул ковариантных производных, полученных в Лемме 1. Например, возьмем сначала левинвариантные векторные поля вида  $X, Y, Z \in \mathfrak{h}$ . Тогда с учетом  $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi$ ,  $[X, \xi]_{\mathfrak{g}} = 0$ , ортогональности  $\mathfrak{h}$  и  $\xi$  и  $\nabla_X Y = (D_X Y)_{\mathfrak{h}} + \frac{1}{2} \omega(X, Y)\xi$ , получаем

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z = \\ &= \nabla_X \{D_Y Z + \frac{1}{2} \omega(Y, Z)\xi\} - \nabla_Y \{D_X Z + \frac{1}{2} \omega(X, Z)\xi\} - \nabla_{[X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi} Z = \\ \text{(Поскольку } \omega(Y, Z) \text{ – это постоянная функция, то } \nabla_X(\omega(Y, Z)) &= X(\omega(Y, Z)) = 0.) \\ &= D_X D_Y Z + \frac{1}{2} \omega(X, D_Y Z)\xi + \frac{1}{2} \omega(Y, Z)(\frac{1}{2} JX) - \\ &- \{D_Y D_X Z + \frac{1}{2} \omega(Y, D_X Z)\xi + \frac{1}{2} \omega(X, Z)(\frac{1}{2} JY)\} - \\ &- \{D_{[X, Y]} Z + \frac{1}{2} \omega([X, Y], Z)\xi\} - \omega(X, Y) \nabla_{\xi} Z = \\ &= R_{\mathfrak{h}}(X, Y)Z + \frac{1}{2} \{\omega(X, D_Y Z) - \omega(Y, D_X Z) - \omega([X, Y], Z)\} \xi + \\ &+ \frac{1}{4} \{\omega(Y, Z) JX - \omega(X, Z) JY\} - \frac{1}{2} \omega(X, Y) JZ. \end{aligned}$$

Для того чтобы упростить  $\omega(X, D_Y Z) - \omega(Y, D_X Z) - \omega([X, Y], Z)$  в последнем выражении, используем свойства  $D_X Z = D_Z X + [X, Z]$  и  $D_Y Z = D_Z Y + [Y, Z]$ . Тогда с учетом замкнутости формы  $\omega$ ,  $\omega(X, [Y, Z]) + \omega(Y, [Z, X]) + \omega(Z, [X, Y]) = d\omega(X, Y, Z) = 0$  и равенства  $Z\omega(X, Y) = (D_Z \omega)(X, Y) + \omega(D_Z X, Y) + \omega(X, D_Z Y) = 0$  получаем

$$\begin{aligned}
& \omega(X, D_Y Z) - \omega(Y, D_X Z) - \omega([X, Y], Z) = \\
& = \omega(X, D_Z Y + [Y, Z]) - \omega(Y, D_Z X + [X, Z]) - \omega([X, Y], Z) = \\
& = \omega(X, D_Z Y) + \omega(X, [Y, Z]) - \omega(Y, D_Z X) - \omega(Y, [X, Z]) - \omega([X, Y], Z) = \\
& = \omega(X, D_Z Y) - \omega(Y, D_Z X) + \omega(X, [Y, Z]) - \omega(Y, [X, Z]) - \omega([X, Y], Z) = \\
& = \omega(D_Z X, Y) + \omega(X, D_Z Y) = - (D_Z \omega)(X, Y).
\end{aligned}$$

Подставляя это полученное выражение, заканчиваем вычисления:

$$= R_{\mathfrak{h}}(X, Y)Z + \frac{1}{2} D_Z \omega(X, Y) \xi + \frac{1}{4} (\omega(Y, Z) JX - \omega(X, Z) JY) - \frac{1}{2} \omega(X, Y) JZ.$$

Рассмотрим случай  $R(X, Y)\xi$ , где  $X, Y \in \mathfrak{h}$ . Тогда с учетом равенств  $\nabla_X \xi = \frac{1}{2} JX$  и  $\nabla_\xi \xi = 0$  получаем

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\xi &= \nabla_X (\nabla_Y \xi) - \nabla_Y (\nabla_X \xi) - \nabla_{[X, Y]} \xi = \\
&= \nabla_X (\frac{1}{2} JY) - \nabla_Y (\frac{1}{2} JX) - \nabla_{\{[X, Y] + \omega(X, Y)\xi\}} \xi = \\
&= \nabla_X (\frac{1}{2} JY) - \nabla_Y (\frac{1}{2} JX) - \frac{1}{2} J[X, Y] = \\
&= \frac{1}{2} \{D_X JY + \frac{1}{2} \omega(X, JY)\xi\} - \frac{1}{2} \{D_Y JX + \frac{1}{2} \omega(Y, JX)\xi\} - \frac{1}{2} J[X, Y] = \\
&= \frac{1}{2} (D_X J)Y - \frac{1}{2} J(D_X Y) + \frac{1}{4} \omega(X, JY)\xi - \frac{1}{2} (D_Y J)X - \\
&\quad - \frac{1}{2} J(D_Y X) - \frac{1}{4} \omega(Y, JX)\xi - \frac{1}{2} J[X, Y] = \\
&= \frac{1}{2} (D_X J)Y - \frac{1}{2} (D_Y J)X + \frac{1}{2} J(D_X Y - D_Y X) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \omega(X, JY)\xi - \frac{1}{4} \omega(Y, JX)\xi - \frac{1}{2} J[X, Y] = \\
&= \frac{1}{2} (D_X J)Y - \frac{1}{2} (D_Y J)X + \frac{1}{2} J([X, Y]) + \frac{1}{4} h(X, Y)\xi - \\
&\quad - \frac{1}{4} h(Y, X)\xi - \frac{1}{2} J[X, Y] = \frac{1}{2} ((D_X J)Y - (D_Y J)X).
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай  $R(X, \xi)Y$ , где  $X, Y \in \mathfrak{h}$ . Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
R(X, \xi)Z &= \nabla_X (\nabla_\xi Z) - \nabla_\xi (\nabla_X Z) - \nabla_{[X, \xi]} Z = \\
&= \nabla_X (\frac{1}{2} JZ) - \nabla_\xi (D_X Z + \frac{1}{2} \omega(X, Z)\xi) = \frac{1}{2} \nabla_X (JZ) - \frac{1}{2} J(D_X Z) = \\
&= \frac{1}{2} \{D_X JZ + \frac{1}{2} \omega(X, JZ)\xi\} - \frac{1}{2} J(D_X Z) = \\
&= \frac{1}{2} \{(D_X J)Z + J(D_X Z) + \frac{1}{2} \omega(X, JZ)\xi\} - \frac{1}{2} J(D_X Z) = \\
&= \frac{1}{2} (D_X J)Z + \frac{1}{4} \omega(X, JZ)\xi = \frac{1}{2} (D_X J)Z + \frac{1}{4} g(X, Z)\xi.
\end{aligned}$$

Аналогично устанавливается последняя формула:

$$R(X, \xi)\xi = \nabla_X (\nabla_\xi \xi) - \nabla_\xi (\nabla_X \xi) - \nabla_{[X, \xi]} \xi = -\frac{1}{2} \nabla_\xi (JX) = -\frac{1}{2} \frac{1}{2} J(JX) = -\frac{1}{4} X. \blacksquare$$

В случае пара-кэлеровой структуры на алгебре Ли  $\mathfrak{h}$  имеем,  $D\omega = 0$  и  $DJ = 0$ . Поэтому формулы для кривизны будут более простого вида. Если дополнительно учесть формулу  $\omega(Y, Z)JX - \omega(X, Z)JY = h(Y, JZ)JX - h(X, JZ)JY$ , то получаем

**Следствие 3.** Пусть  $(\omega, J, h)$  – пара-кэлерова структура на алгебре Ли  $\mathfrak{h}$  и  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  – соответствующая ей контактная пара-сасакиева структура на центральном расширении  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ . Тогда тензор кривизны  $R$  на  $\mathfrak{g}$  выражается через тензор кривизны  $R_{\mathfrak{h}}$  на  $\mathfrak{h}$ , форму  $\omega$  и почти пара-комплексную структуру  $J$  на  $\mathfrak{h}$  следующим образом:

$$R(X, Y)Z = R_{\mathfrak{h}}(X, Y)Z - \frac{1}{4} h(X, JZ)JY + \frac{1}{4} h(Y, JZ)JX - \frac{1}{2} h(X, JY)JZ;$$

$$R(X, Y)\xi = 0;$$

$$R(X, \xi)Z = \frac{1}{4} g(X, Z)\xi;$$

$$R(X, \xi)\xi = -\frac{1}{4} X,$$

где  $X, Y \in \mathfrak{h}$ .

Напомним, что тензор Риччи  $Ric$  в псевдоримановом случае определяется формулой:

$$Ric(X, Y) = \sum_i \varepsilon_i g(R(e_i, Y)Z, e_i),$$

где  $\{e_i\}$  – ортонормированный базис на  $\mathfrak{g}$  и  $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ . Мы будем выбирать базис алгебры  $\mathfrak{g}$  вида  $\{e_1, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}\} = \{E_1, \dots, E_{2n}, \xi\}$ , где  $E_i \in \mathfrak{h}$  и  $\xi$  – поле Рибба. В следующих вычислениях считаем, что индекс  $i$  меняется от 1 до  $2n + 1$ , а индекс  $j$  – от 1 до  $2n$ . Кроме того, мы считаем, что почти пара-комплексная структура на  $\mathfrak{h}$  является интегрируемой, так что  $\mathfrak{h}$  – это пара-кэлерова алгебра Ли.

**Теорема 3.** Пусть  $(\omega, J, h)$  – пара-кэлерова структура на алгебре Ли  $\mathfrak{h}$  и  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  – соответствующая ей параконтактная структура Сасаки на центральном расширении  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ . Тогда тензор Риччи  $Ric$  на  $\mathfrak{g}$  выражается через тензор Риччи  $Ric_{\mathfrak{h}}$  на  $\mathfrak{h}$ , форму  $\omega$  и почти пара-комплексную структуру  $J$  на  $\mathfrak{h}$  следующим образом:

$$Ric(Y, Z) = Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) + \frac{1}{2} h(Y, Z);$$

$$Ric(Y, \xi) = 0, Ric(\xi, \xi) = -n/2,$$

где  $X, Y \in \mathfrak{h}$ .

**Доказательство.** В ортонормированном базисе  $\{e_1, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}\} = \{E_1, \dots, E_{2n}, \xi\}$  алгебры  $\mathfrak{g}$ , где  $E_j \in \mathfrak{h}$ , для  $Y, Z \in \mathfrak{h}$  получаем

$$\begin{aligned} Ric(Y, Z) &= \sum_i \varepsilon_i g(R(e_i, Y)Z, e_i) = \\ &= \sum_i \varepsilon_i g(R_{\mathfrak{h}}(e_i, Y)Z + 1/4 \omega(Y, Z)Je_i - 1/4 \omega(e_i, Z)JY - 1/2 \omega(e_i, Y)JZ, e_i) = \\ &= \sum_j \varepsilon_j h(R_{\mathfrak{h}}(E_j, Y)Z, E_j) - \frac{1}{4} \varepsilon_i \omega(Y, Z) h(JE_j, E_j) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \varepsilon_i \omega(E_j, Z) h(JY, E_j) - \frac{1}{2} \varepsilon_j \omega(E_j, Y) h(JZ, E_j) + g(R(\xi, Y)Z, \xi) = \\ &= Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) - \frac{1}{4} \sum_j \varepsilon_j \omega(E_j, Z) h(JY, E_j) - \frac{1}{2} \varepsilon_j \omega(E_j, Y) h(JZ, E_j) - \frac{1}{4} g(Y, Z) = \\ &= Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) - \frac{1}{4} \sum_j \varepsilon_j h(E_j, JZ) h(E_j, JY) - \frac{1}{2} \varepsilon_j h(E_j, JY) h(E_j, JZ) - \frac{1}{4} h(Y, Z) = \\ &= Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) - \frac{1}{4} h(JY, JZ) - \frac{1}{2} h(JY, JZ) - \frac{1}{4} h(Y, Z) = \\ &= Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) + \frac{1}{4} h(Y, Z) + \frac{1}{2} h(Y, Z) - \frac{1}{4} h(Y, Z) = \\ &= Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) + \frac{1}{2} h(Y, Z). \end{aligned}$$

Далее,

$$Ric(Y, \xi) = \sum_i g(R(e_i, Y)\xi, e_i) = \sum_j \varepsilon_j g(R(E_j, Y)\xi, E_j) + g(R(\xi, Y)\xi, \xi) = -\frac{1}{4} g(Y, \xi) = 0.$$

$$\begin{aligned} Ric(\xi, \xi) &= \sum_j \varepsilon_j g(R(e_j, \xi)\xi, e_j) = \sum_j \varepsilon_j g(R(E_j, \xi)\xi, E_j) + g(R(\xi, \xi)\xi, \xi) = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_j \varepsilon_j g(E_j, E_j) = -\frac{1}{4} \sum_j \varepsilon_j \varepsilon_j = -n/2. \blacksquare \end{aligned}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bejan C.L., Eken S., Kılıç E. Legendre Curves on Generalized Paracontact Metric Manifolds // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2019. V. 42. P. 185–199. DOI 10.1007/s40840-017-0475-y.
2. Prakasha D.G., Veeresha P. Para-Sasakian manifolds and \*-Ricci solitons // Afrika Matematika. V. 30. Iss. 7–8. P. 989–998. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13370-019-00698-9>.
3. De U.C., Han Y., Mandal K. On Para-Sasakian Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions // Filomat. 2017. V. 31. No. 7. P. 1941–1947. DOI 10.2298/FIL1707941D.
4. Alekseevsky D. V., Cortes V., Galaev A. and Leistner T. Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy // J. Reine Angew. Math. 2009. V. 635. P. 23–69. DOI: <https://doi.org/10.1515/CRELLE.2009.075>.
5. Blair D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry // Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1976.

6. Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А. Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна // Успехи математических наук. 2009. Т. 64. Вып. 1(385). С. 3–50. <https://doi.org/10.4213/rm9262>.
7. Smolentsev N.K. Left-invariant almost para-complex structures on six-dimensional nilpotent Lie groups // Cornell University Library: arXiv:1801.07991v2 math.DG. 15 p.
8. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. 2008. V. 26. Iss. 5. P. 544–552. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.04.001>.
9. Goze M., Khakimdjanyov Y., Medina A. Symplectic or contact structures on Lie groups. Differential Geom. Appl. 2004. V. 21. No. 1. P. 41–54. DOI: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006.
10. Smolentsev N.K. Invariant pseudo-Sasakian and K-contact structures on seven-dimensional nilpotent Lie groups // Science Evolution. 2017. V. 2. No. 1. P. 91–99.
11. Kobayashi S. and Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. Vol. 1 and 2. New York; London: Interscience Publ., 1963.

Статья поступила 20.08.2019 г.

Smolentsev N. K. (2019) LEFT-INVARIANT PARA-SASAKIAN STRUCTURES ON LIE GROUPS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 27–37

DOI 10.17223/19988621/62/3

Keywords: para-complex structures; para-Sasakian structures; para-Sasakian manifold; para-Kähler structures; left-invariant paracontact structures.

Paracontact structures on manifolds are currently being studied quite actively; there are several different approaches to the definition of the concepts of paracontact and para-Sasakian structures. In this paper, the paracontact structure on a contact manifold  $(M^{2n+1}, \eta)$  is determined by an affinor  $\varphi$  which has the property  $\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$ , where  $\xi$  is the Reeb field and  $I$  is the identity automorphism. In addition, it is assumed that  $d\eta(\varphi X, \varphi Y) = -d\eta(X, Y)$ . This allows us to define a pseudo-Riemannian metric by the equality  $g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$ . In this paper, Sasaki paracontact structures are determined in the same way as conventional Sasaki structures in the case of contact structures. A paracontact metric structure  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  on  $\square \square M^{2n+1}$  is called para-Sasakian if the almost para-complex structure  $J$  on  $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$  defined by the formula  $J(X, f\partial_t) = (\varphi X - f\xi, -\eta(X)\partial_t)$ , is integrable. In this paper, we obtain tensors whose vanishing means that the manifold is para-Sasakian. In the case of Lie groups, it is shown that left-invariant para-Sasakian structures can be obtained as central extensions of para-Kähler Lie groups. In this case, the relations between the curvature of the para-Kähler Lie group and the curvature of the corresponding para-Sasakian Lie group are found.

AMS Mathematical Subject Classification: 53C15, 53D10, 53C25, 53C50

Nikolay K. SMOLENTSEV (Dr. Sci. of Physics and Mathematics, professor of Fundamental Mathematics department of Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: smolennk@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Bejan C.L., Eken S., Kılıç E. (2019) Legendre Curves on Generalized Paracontact Metric Manifolds. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 42. pp. 185–199. DOI 10.1007/s40840-017-0475-y.
2. Prakasha D.G., Veeresha P. (2019) Para-Sasakian manifolds and \*-Ricci solitons. *Afrika Matematika*. 30(7–8). pp. 989–998. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13370-019-00698-9>.
3. De U.C., Han Y., Mandal K. (2017) On Para-Sasakian Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions. *Filomat*. 31(7). pp. 1941–1947. DOI: 10.2298/FIL1707941D.
4. Alekseevsky D.V., Cortes V., Galaev A., Leistner T. (2009) Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy. *J. Reine Angew. Math.* 635. pp. 23–69. DOI: <https://doi.org/10.1515/CRELLE.2009.075>.

5. Blair D.E. (1976) *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*. Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer–Verlag.
6. Alekseevsky D.V., Medori C., Tomassini A. (2009) Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russ. Math. Surv.* 64(1). pp. 1–43. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9262>.
7. Smolentsev N.K. (2018) Left-invariant almost para-complex structures on six-dimensional nilpotent Lie groups. arXiv:1801.07991v2 math.DG. 15 p.
8. Diatta A. (2008) Left invariant contact structures on Lie groups. *Diff. Geom. and its Appl.* 26(5). pp. 544–552. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.04.001>.
9. Goze M., Khakimjanov Y., Medina A. (2004) Symplectic or contact structures on Lie groups. *Differential Geom. Appl.* 21(1). pp. 41–54. DOI: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006.
10. Smolentsev N.K. (2017) Invariant pseudo-Sasakian and K-contact structures on seven-dimensional nilpotent Lie groups. *Science Evolution.* 2(1). pp. 91–99.
11. Kobayashi S., Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry. Vol. 1, 2*. New York; London: Interscience Publ.

Received: August 20, 2019

УДК 517.2; 519.64  
DOI 10.17223/19988621/62/4

MSC 45E05; 31B10

Э.Г. Халилов, М.Н. Бахшалыева

## О ПРОИЗВОДНОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ<sup>1</sup>

Дана формула для вычисления производной логарифмического потенциала двойного слоя и изучены некоторые основные свойства оператора, порожденного производной логарифмического потенциала двойного слоя в обобщенных пространствах Гельдера.

**Ключевые слова:** уравнения Лапласа, кривая Ляпунова, производная логарифмического потенциала двойного слоя, криволинейный сингулярный интеграл, обобщенные пространства Гельдера.

Известно [1], что краевые задачи для уравнения Лапласа приводятся к сингулярному интегральному уравнению, зависящему от нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя

$$W(x) = \int_L \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \rho(y) dL_y, \quad x \in L,$$

где  $L \subset R^2$  – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\vec{n}(y)$  – внешняя единичная нормаль в точке  $y \in L$ ,  $\rho(y)$  – непрерывная функция на кривой  $L$ , а  $\Phi(x, y)$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad x, y \in R^2, \quad x \neq y.$$

Построенные Ляпуновым контрпримеры показывают [2], что для потенциалов простого и двойного слоев с непрерывной плотностью производные, вообще говоря, не существуют. Следует отметить, что в работе [3] доказана ограниченность оператора, порожденного прямым значением производной акустического потенциала простого слоя в обобщенных пространствах Гельдера, а в работе [4] дана приемлемая формула для вычисления производной акустического потенциала двойного слоя и изучены основные свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя в обобщенных пространствах Гельдера. Исходя из этих результатов, в работе [5] построена кубатурная формула для нормальной производной акустического потенциала двойного слоя, а в работах [6–8] исследованы приближенные решения интегральных уравнений краевых задач для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. Однако до сих пор теоретически не обосновано исследование приближенных решений сингулярных интегральных уравнений краевых задач для уравнения Лапласа, зависящих от нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя. Причина заключается в том, что не найдена приемлемая формула для вычисления производной логарифмического потенциала двойного слоя и не исследованы основные

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке "Университетского гранта" АГУНП (грант № ADNSU-2018-1-01).

свойства оператора  $(A\rho)(x) = \frac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)}$ ,  $x \in L$ , в обобщенных пространствах Гёльдера, чему и посвящена настоящая работа.

## 2. Существование и формула вычисления производной логарифмического потенциала двойного слоя

Через  $C(L)$  обозначим пространство всех непрерывных функций на  $L$  с нормой  $\|\rho\|_\infty = \max_{x \in L} |\rho(x)|$ , а для функции  $\varphi(x) \in C(L)$  введем модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi, \delta) = \delta \sup_{\tau \geq \delta} \frac{\overline{\omega}(\varphi, \tau)}{\tau}, \quad \delta > 0,$$

где  $\overline{\omega}(\varphi, \tau) = \max_{\substack{|x-y| \leq \tau \\ x, y \in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|$ .

**Теорема 1.** Пусть  $L \subset R^2$  – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\rho(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция на  $L$  и

$$\int_0^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда логарифмический потенциал двойного слоя  $W(x)$  имеет на  $L$  производную, причем

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}} W(x) = & -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{(\overline{yx}, \vec{n}(y)) \overline{yx}}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\vec{n}(y)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y, \quad x \in L \end{aligned} \quad (1)$$

и 
$$|\overline{\text{grad}} W(x)| \leq M \left( \|\rho\|_\infty + \|\overline{\text{grad} \rho}\|_\infty + \int_0^d \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt \right), \quad \forall x \in L,$$

где последний интеграл в равенстве (1) существует в смысле главного значения Коши.

**Доказательство.** Известно, что [9]

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\overline{yx}, \vec{n}(y))}{|x-y|^2} dL_y = -\frac{1}{2}, \quad x \in L,$$

тогда выражение  $W(x)$  можно представить в виде

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\overline{yx}, \vec{n}(y))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y - \frac{1}{2} \rho(x), \quad x \in L.$$

Функция  $\rho(x)$  непрерывно дифференцируема, поэтому, принимая во внимание неравенства

$$|(\overline{yx}, \vec{n}(y))| \leq M^2 |x-y|^{1+\alpha}, \quad \forall x, y \in L,$$

<sup>2</sup> здесь и далее через  $M$  будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

получаем, что

$$\left| \frac{(\overline{yx}, \overline{n}(y))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) \right| \leq M \|\overline{\text{grad}}\rho\|_{\infty} |x-y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in L,$$

и, следовательно, функция  $W(x)$  имеет на  $L$  производную, причем

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}}W(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \overline{\text{grad}}_x \left[ \frac{(\overline{yx}, \overline{n}(y))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) \right] dL_y - \frac{1}{2} \overline{\text{grad}}\rho(x) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{(\overline{yx}, \overline{n}(y)) \overline{yx}}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\overline{n}(y)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y, \quad x \in L. \end{aligned}$$

Как видно, интеграл

$$\int_L \frac{(\overline{yx}, \overline{n}(y)) \overline{yx}}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y \quad (2)$$

сходится как несобственный и

$$\left| \int_L \frac{(\overline{yx}, \overline{n}(y)) \overline{yx}}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y \right| \leq M \|\overline{\text{grad}}\rho\|_{\infty}.$$

Очевидно, что

$$\int_L \frac{\overline{n}(y)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y = \int_L \frac{\overline{n}(y) - \overline{n}(x)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y + \overline{n}(x) \int_L \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x-y|^2} dL_y.$$

Из неравенства

$$|\overline{n}(y) - \overline{n}(x)| \leq M |x-y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in L,$$

получаем, что интеграл

$$\int_L \frac{\overline{n}(y) - \overline{n}(x)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y$$

сходится как несобственный, причем

$$\left| \int_L \frac{\overline{n}(y) - \overline{n}(x)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y \right| \leq M \|\overline{\text{grad}}\rho\|_{\infty}.$$

Остается доказать, что интеграл

$$\int_L \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x-y|^2} dL_y$$

существует в смысле главного значения Коши. Пусть  $d > 0$  есть радиус стандартной окружности для  $L$  [9] и  $L_d(x) = \{y \in L : |y-x| < d\}$ ,  $x \in L$ . Так как существует такая точка  $\tilde{y} = x + \overline{\theta}(y-x)$ , что

$$\rho(y) - \rho(x) = (\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}), \overline{xy}), \quad x, y \in L,$$

поэтому

$$\int_L \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x-y|^2} dL_y = \int_{L \setminus L_d(x)} \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x-y|^2} dL_y +$$



$$+ \int_{L_d(x)} \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}) - \overline{\text{grad}}\rho(x), \overline{xy})}{|x-y|^2} dL_y + \int_{L_d(x)} \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x), \overline{xy})}{|x-y|^2} dL_y,$$

где  $\overline{\theta} = (\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2)$  и  $\overline{\theta}_i \in (0, 1)$ ,  $i = 1, 2$ . Как видно, интеграл

$$\int_{L/L_d(x)} \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x-y|^2} dL_y$$

существует как собственный. Кроме того, принимая во внимание формулу вычисления криволинейного интеграла, получим

$$\left| \int_{L_d(x)} \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}) - \overline{\text{grad}}\rho(x), \overline{xy})}{|x-y|^2} dL_y \right| \leq M \int_0^d \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt < +\infty.$$

Теперь докажем, что интеграл

$$\int_{L_d(x)} \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x), \overline{xy})}{|x-y|^2} dS_y = \frac{\partial\rho(x)}{\partial x_1} \int_{L_d(x)} \frac{y_1 - x_1}{|x-y|^2} dL_y + \frac{\partial\rho(x)}{\partial x_2} \int_{L_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{|x-y|^2} dL_y$$

существует в смысле главного значения Коши. Известно (см.[9]), что для любой точки  $x \in L$  окрестность  $L_d(x)$  пересекается с прямой, параллельной нормали  $\vec{n}(x)$ , в единственной точке, либо вообще не пересекается, т.е. множество  $L_d(x)$  однозначно проектируется на промежуток  $\Omega_d(x)$ , лежащий на прямой  $\Gamma(x)$ , касательной к  $L$  в точке  $x$ . На куске  $L_d(x)$  выберем локальную прямоугольную систему координат  $(u, v)$  с началом в точке  $x$ , в которой ось  $v$  направим вдоль нормали  $\vec{n}(x)$ , а ось  $u$  направим вдоль положительного направления касательной прямой  $\Gamma(x)$ . Тогда координатами точки  $x$  будут  $(0, 0)$ . Кроме того, в этих координатах окрестность  $L_d(x)$  можно задать уравнением  $v = f(u)$ ,  $u \in \Omega_d(x)$ , причем

$$f \in H_{1,\alpha}(\Omega_d(x)) \text{ и } f(0) = 0, f'(0) = 0.$$

Здесь через  $H_{1,\alpha}(\Omega_d(x))$  обозначено линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на  $\Omega_d(x)$  функций  $f$ , удовлетворяющих условию

$$|f'(u_1) - f'(u_2)| \leq M_f |u_1 - u_2|^\alpha, \quad \forall u_1, u_2 \in \Omega_d(x),$$

где  $M_f$  – положительная постоянная, зависящая от  $f$ , а не от  $u_1$  и  $u_2$ . Обозначим через  $\Gamma_d(x)$  часть касательной прямой  $\Gamma(x)$  в точке  $x \in L$ , заключенной внутри окружности радиуса  $d$  с центром в точке  $x$ . Известно [10], что если  $\tilde{y} \in \Gamma(x)$  есть проекция точки  $y \in L$ , то

$$|x - \tilde{y}| \leq |x - y| \leq C_1 |x - \tilde{y}|, \quad \text{mes}L_d(x) \leq C_2 \text{mes}\Gamma_d(x),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – положительные постоянные, зависящие лишь от  $L$ , а через  $\text{mes}L_d(x)$  обозначена длина кривой  $L_d(x)$ . Пусть  $d_0 = d/C_1$ . Очевидно, что  $(-d_0, d_0) \subset \Omega_d(x)$ . По формуле вычисления криволинейного интеграла, получаем

$$\int_{L_d(x)} \frac{y_1 - x_1}{|x - y|^2} dL_y = \int_{\Omega_d(x)} \frac{u \sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u^2 + (f(u))^2} du = \int_{\Omega_d(x)(-d_0, d_0)} \frac{u \sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u^2 + (f(u))^2} du + \int_{-d_0}^{d_0} \frac{du}{u} +$$

$$+ \int_{-d_0}^{d_0} \frac{u \left( \sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du + \int_{-d_0}^{d_0} u \left( \frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du.$$

Слагаемые интегралы в правой части этого равенства обозначим через  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $A_4$  соответственно.

Как видно, интеграл  $A_1$  существует как собственный, а интеграл  $A_2$  существует в смысле главного значения Коши и равен нулю. Кроме того, учитывая, что (см. [9])

$$|f'(u)| \leq M |u|^\alpha \quad (3)$$

находим

$$|A_3| = \left| \int_{-d_0}^{d_0} \frac{u (f'(u))^2}{(u^2 + (f(u))^2) \left( 1 + \sqrt{1 + (f'(u))^2} \right)} du \right| \leq M \int_{-d_0}^{d_0} |u|^{2\alpha-1} du \leq M.$$

Так как

$$|f(u)| = |f(u) - f(0)| \leq M |u|^{1+\alpha}, \quad (4)$$

то для интеграла  $A_4$  имеем

$$|A_4| = \left| \int_{-d_0}^{d_0} \frac{u (f(u))^2}{u^2 (u^2 + (f(u))^2)} du \right| \leq M \int_{-d_0}^{d_0} |u|^{2\alpha-1} du \leq M.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{L_d(x)} \frac{y_1 - x_1}{|x - y|^2} dL_y \right| \leq M.$$

Кроме того, принимая во внимание (4), имеем:

$$\left| \int_{L_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{|x - y|^2} dL_y \right| = \left| \int_{\Omega_d(x)} \frac{f(u) \sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u^2 + (f(u))^2} du \right| \leq M \int_{\Omega_d(x)} |u|^{\alpha-1} du \leq M.$$

В результате получаем, что

$$\left| \int_{L_d(x)} \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x), \overline{xy})}{|x - y|^2} dS_y \right| \leq M \|\overline{\text{grad}} \rho\|_\infty, \quad \forall x \in L.$$

Этим и завершается доказательство теоремы.

**Следствие 1.** Пусть  $L \subset R^2$  – простая замкнутая кривая Ляпунова,  $\rho(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция на  $L$  и

$$\int_0^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}} \rho, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда логарифмический потенциал двойного слоя  $W(x)$  имеет на  $\forall x \in L$  нормальную производную, причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x)}{\partial \bar{n}(x)} = & -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{(\overline{yx}, \bar{n}(y))(\overline{yx}, \bar{n}(x))}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\bar{n}(y), \bar{n}(x))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y, \quad x \in L, \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\left| \frac{\partial W(x)}{\partial \bar{n}(x)} \right| \leq M \left( \|\rho\|_\infty + \|\overline{\text{grad}}\rho\|_\infty + \int_0^d \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt \right), \quad \forall x \in L,$$

где последний интеграл в равенстве (5) существует в смысле главного значения Коши.

### 3. Некоторые свойства оператора, порожденного производной логарифмического потенциала двойного слоя

Сначала докажем справедливость оценки А. Зигмунда для производной логарифмического потенциала двойного слоя.

**Теорема 2.** Пусть  $L \subset R^2$  – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\rho(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция на  $L$  и

$$\int_0^{\text{diam}L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда при  $0 < \alpha < 1$

$$\omega(\overline{\text{grad}}W, h) \leq M_\rho \left( h^\alpha + \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam}L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t^2} dt \right),$$

а при  $\alpha = 1$

$$\omega(\overline{\text{grad}}W, h) \leq M_\rho \left( h |\ln h| + \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam}L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t^2} dt \right),$$

где  $M_\rho$  – положительная постоянная, зависящая лишь от  $L$  и  $\rho$ .

**Доказательство.** Пусть  $0 < \alpha < 1$ . Возьмем любые точки  $x', x'' \in L$ , такие, чтобы величина  $h = |x' - x''|$  была достаточно малой. Принимая во внимание формулу (1), имеем

$$\begin{aligned} & \overline{\text{grad}}W(x') - \overline{\text{grad}}W(x'') = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_L \left[ \frac{(\overline{x'y}, \bar{n}(y)) \overline{yx'}}{|x' - y|^4} (\rho(y) - \rho(x')) - \frac{(\overline{x''y}, \bar{n}(y)) \overline{yx''}}{|x'' - y|^4} (\rho(y) - \rho(x'')) \right] dL_y + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_L \left( \frac{\rho(y) - \rho(x')}{|x' - y|^2} - \frac{\rho(y) - \rho(x'')}{|x'' - y|^2} \right) \bar{n}(y) dL_y. \end{aligned} \quad (6)$$

Слагаемые интегралы в правой части равенство (6) обозначим через  $Q(x', x'')$  и  $R(x', x'')$  соответственно.

Так как (2) является интегралом со слабой особенностью, то нетрудно доказать, что

$$|Q(x', x'')| \leq M \left( h \|\rho\|_\infty + h^\alpha \|\overline{\text{grad}}\rho\|_\infty \right).$$

Оценим выражение  $R(x', x'')$ . Ввиду того, что существуют такие точки  $\tilde{y}' = x' + \theta'(y - x')$  и  $\tilde{y}'' = x'' + \theta''(y - x'')$ , что

$$\rho(y) - \rho(x') = \left( \overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}'), \overline{x'y'} \right) \quad (7)$$

и 
$$\rho(y) - \rho(x'') = \left( \overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}''), \overline{x''y} \right), \quad (8)$$

где  $\theta' = (\theta'_1, \theta'_2)$ ,  $\theta'' = (\theta''_1, \theta''_2)$  и  $\theta'_i, \theta''_i \in (0, 1)$ ,  $i = 1, 2$ , то в этом случае выражение  $R(x', x'')$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} R(x', x'') &= \frac{1}{2\pi} \int_{L \setminus L_d(x')} \left( \frac{\rho(y) - \rho(x')}{|x' - y|^2} - \frac{\rho(y) - \rho(x'')}{|x'' - y|^2} \right) \bar{n}(y) dL_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{L_d(x') \\ (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))}} \left[ \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}') - \overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} - \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}'') - \overline{\text{grad}}\rho(x''), \overline{x''y})}{|x'' - y|^2} \right] \bar{n}(y) dL_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{L_{h/2}(x')} \left[ \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}') - \overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} - \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}'') - \overline{\text{grad}}\rho(x''), \overline{x''y})}{|x'' - y|^2} \right] \bar{n}(y) dL_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{L_{h/2}(x'')} \left[ \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}') - \overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} - \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}'') - \overline{\text{grad}}\rho(x''), \overline{x''y})}{|x'' - y|^2} \right] \bar{n}(y) dL_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{L_d(x') \\ (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))}} \left[ \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x')) - \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x''), \overline{x''y})}{|x'' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x'')) \right] dL_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{L_{h/2}(x')} \left[ \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x')) - \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x''), \overline{x''y})}{|x'' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x'')) \right] dL_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{L_{h/2}(x'')} \left[ \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x')) - \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x''), \overline{x''y})}{|x'' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x'')) \right] dL_y + \\ &\quad + \frac{\bar{n}(x') - \bar{n}(x'')}{2\pi} \int_{L_d(x')} \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} dL_y + \\ &\quad + \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \int_{L_d(x')} \left[ \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} - \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x''), \overline{x''y})}{|x'' - y|^2} \right] dL_y. \quad (9) \end{aligned}$$

Слагаемые интегралы в равенстве (9) обозначим через  $R_1(x', x'')$ ,  $R_2(x', x'')$ ,  $R_3(x', x'')$ ,  $R_4(x', x'')$ ,  $R_5(x', x'')$ ,  $R_6(x', x'')$ ,  $R_7(x', x'')$ ,  $R_8(x', x'')$  и  $R_9(x', x'')$  соответственно.

Очевидно, что  $|R_1(x', x'')| \leq M h \|\rho\|_\infty$ .

Выражение  $R_2(x', x'')$  представим в виде

$$\begin{aligned} R_2(x', x'') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{L_d(x') \setminus \\ (L_{h/2}(x') \cup \\ L_{h/2}(x''))}} (\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}') - \overline{\text{grad}}\rho(x''), \overline{x'y'}) \left( \frac{1}{|x' - y|^2} - \frac{1}{|x'' - y|^2} \right) \bar{n}(y) dL_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{L_d(x') \setminus \\ (L_{h/2}(x') \cup \\ L_{h/2}(x''))}} \left[ \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}') - \overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}''), \overline{x'y'})}{|x'' - y|^2} + \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}') - \overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y'})}{|x'' - y|^2} \right] \bar{n}(y) dL_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{L_d(x') \setminus (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))} \frac{n(y) - n(x')}{|x' - y|^2} (\overline{\text{grad}}\rho(x'') - \overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y'}) dL_y + \\ &+ \frac{n(x')}{2\pi} \int_{L_d(x') \setminus (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))} \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x'') - \overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} dL_y. \end{aligned}$$

Слагаемые интегралы в правой части последнего равенства обозначим через  $R_{2,1}(x', x'')$ ,  $R_{2,2}(x', x'')$ ,  $R_{2,3}(x', x'')$  и  $R_{2,4}(x', x'')$  соответственно.

Так как для любого  $y \in L_d(x') \setminus (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))$

$$|x' - y| \leq |x' - x''| + |x'' - y| \leq 3|x'' - y|,$$

а также

$$|x'' - y| \leq 3|x' - y|,$$

то имеем

$$|R_{2,1}(x', x'')| \leq M h \int_h^d \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t^2} dt.$$

Очевидно, что существует такая точка  $\tilde{x} = x' + \theta(x'' - x')$ , что

$$\rho(x'') - \rho(x') = (\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{x}), \overline{x'x''}), \quad (10)$$

где  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ ,  $\theta_i \in (0, 1)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ . Тогда учитывая равенства (7), (8) и (10), получаем, что

$$\begin{aligned} (\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{x}), \overline{x'x''}) &= \rho(x'') - \rho(x') = (\rho(y) - \rho(x')) - (\rho(y) - \rho(x'')) = \\ &= (\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}'), \overline{x'y'}) + (\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}''), \overline{x'y'}) = \\ &= (\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}') - \overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}''), \overline{x'y'}) + (\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}''), \overline{x'x''}), \end{aligned}$$

а значит,

$$(\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}') - \overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}''), \overline{x'y'}) = (\overline{\text{grad}}\rho(\tilde{x}) - \overline{\text{grad}}\rho(\tilde{y}''), \overline{x'x''}).$$

В этом случае нетрудно показать, что

$$\left| R_{2,2}(x', x'') \right| \leq M h \int_h^d \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t^2} dt.$$

Очевидно, что  $\left| R_{2,3}(x', x'') \right| \leq M \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h)$ .

Оценим выражение  $R_{2,4}(x', x'')$ . Для этого на куске  $L_d(x')$  выберем локальную прямоугольную систему координат  $(u, v)$  с началом в точке  $x'$ , в которой ось  $v$  направим вдоль нормали  $\vec{n}(x')$ , а ось  $u$  направим вдоль положительного направления касательной прямой  $\Gamma(x')$ . Тогда координатами точки  $x'$  будут  $(0, 0)$ , а координаты точки  $x''$  обозначим через  $(u'', f(u''))$ . Пусть  $h_0 = |u''|$  и через  $\Omega_{h/2}(x', x'')$  обозначим проекцию множества  $L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x'')$  на касательной прямой  $\Gamma(x')$ . Тогда по формуле вычисления криволинейного интеграла, получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{L_d(x') \setminus (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))} \frac{(\overline{\text{grad} \rho}(x') - \overline{\text{grad} \rho}(x''), \overline{x'y})}{|x' - y|^2} dL_y = \\ & = \left( \frac{\partial \rho(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_2} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{f(u) \sqrt{1 + (f'(u))^2} du}{u^2 + (f(u))^2} + \\ & + \left( \frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{u \left( \sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du + \\ & + \left( \frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} u \left( \frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du + \\ & + \left( \frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Учитывая (3) и (4), получаем, что

$$\sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \leq M |u|^{2\alpha}, \quad \forall u \in \Omega_d(x')$$

и 
$$\left| \frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right| \leq M |u|^{2\alpha-2}, \quad \forall u \in \Omega_d(x') \setminus 0.$$

Следовательно,

$$\left| \left( \frac{\partial \rho(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_2} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{f(u) \sqrt{1 + (f'(u))^2} du}{u^2 + (f(u))^2} \right| \leq M \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h),$$

$$\left| \left( \frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{u \left( \sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du \right| \leq M \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h)$$

и 
$$\left| \left( \frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} u \left( \frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du \right| \leq M \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h).$$

Так как 
$$\int_{(-d_0, d_0) \setminus (-2h, 2h)} \frac{du}{u} = \int_{-d_0}^{-2h} \frac{du}{u} + \int_{2h}^{d_0} \frac{du}{u} = 0,$$

то 
$$\left( \frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{du}{u} =$$
  

$$= \left( \frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \left( \int_{\Omega_d(x') \setminus (-d_0, d_0)} \frac{du}{u} + \int_{(-2h, 2h) \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{du}{u} \right).$$

Отсюда имеем

$$\left| \left( \frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{du}{u} \right| \leq$$
  

$$\leq M \left( \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) \int_{h/C_1}^{2h} \frac{du}{u} \right) \leq M \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h),$$

а значит,

$$|R_{2,4}(x', x'')| \leq M \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h).$$

В результате находим

$$|R_2(x', x'')| \leq M \left( \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + h \int_h^d \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t^2} dt \right).$$

Также, принимая во внимание полученные выше неравенства, можно доказать, что

$$|R_3(x', x'')| \leq M \left( \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt \right),$$

$$|R_4(x', x'')| \leq M \left( \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt \right)$$

и 
$$|R_5(x', x'')| \leq M \left( \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + h^\alpha \|\overline{\text{grad} \rho}\|_\infty \right).$$

Учитывая неравенство

$$h/2 \leq |y - x''| \leq 3h/2, \quad y \in L_{h/2}(x'),$$

имеем

$$|R_6(x', x'')| \leq \frac{\|\overline{\text{grad} \rho}\|_\infty}{2\pi} \left( \int_{L_{h/2}(x')} \frac{dL_y}{|x' - y|^{1-\alpha}} + \int_{L_{h/2}(x')} \frac{dL_y}{|x'' - y|^{1-\alpha}} \right) \leq$$
  

$$\leq M \|\overline{\text{grad} \rho}\|_\infty \left( \int_0^{h/2} \frac{du}{u^{1-\alpha}} + \frac{mes L_{h/2}(x')}{(h/2)^{1-\alpha}} \right) \leq M h^\alpha \|\overline{\text{grad} \rho}\|_\infty$$

и 
$$|R_7(x', x'')| \leq M h^\alpha \|\overline{\text{grad} \rho}\|_\infty.$$

Так как интеграл

$$\int_{L_d(x')} \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y})}{|x' - y|^2} dL_y$$

сходится в смысле главного значения Коши, то

$$\left| \int_{L_d(x')} \frac{(\overline{\text{grad}}\rho(x'), \overline{x'y})}{|x' - y|^2} dL_y \right| \leq M \|\overline{\text{grad}}\rho\|_\infty.$$

Тогда

$$|R_8(x', x'')| \leq M h^\alpha \|\overline{\text{grad}}\rho\|_\infty.$$

Представим выражение  $R_9(x', x'')$  в виде

$$\begin{aligned} R_9(x', x'') &= \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \left( \frac{\partial\rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{L_d(x')} \frac{y_1 - x'_1}{|x' - y|^2} dL_y + \\ &+ \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \left( \frac{\partial\rho(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_2} \right) \int_{L_d(x')} \frac{y_2 - x'_2}{|x' - y|^2} dL_y + \\ &+ \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_1} \left( \int_{L_d(x')} \frac{y_1 - x'_1}{|x' - y|^2} dL_y - \int_{L_d(x')} \frac{y_1 - x''_1}{|x'' - y|^2} dL_y \right) + \\ &+ \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_2} \left( \int_{L_d(x')} \frac{y_2 - x'_2}{|x' - y|^2} dL_y - \int_{L_d(x')} \frac{y_2 - x''_2}{|x'' - y|^2} dL_y \right). \end{aligned}$$

Слагаемые в правой части последнего равенства обозначим через  $R_{9,1}(x', x'')$ ,  $R_{9,2}(x', x'')$ ,  $R_{9,3}(x', x'')$  и  $R_{9,4}(x', x'')$  соответственно.

Ввиду того, что интегралы

$$\int_{L_d(x')} \frac{y_1 - x'_1}{|x' - y|^2} dL_y \quad \text{и} \quad \int_{L_d(x')} \frac{y_2 - x'_2}{|x' - y|^2} dL_y$$

сходятся в смысле главного значения Коши, то

$$|R_{9,1}(x', x'')| \leq M \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h) \quad \text{и} \quad |R_{9,2}(x', x'')| \leq M \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h).$$

Известно, что в смысле главного значения Коши

$$\int_{-d_0}^{d_0} \frac{du}{u} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{u''-d_0+h_0}^{u''+d_0-h_0} \frac{du}{u-u''} = 0.$$

Тогда выражение  $R_{9,3}(x', x'')$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_{9,3}(x', x'') &= \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_1} \left[ - \int_{(-d_0, d_0) \setminus (u''-d_0+h_0, u''+d_0-h_0)} \frac{du}{u-u''} + \right. \\ &+ \left. \int_{\Omega_d(x') \setminus (-d_0, d_0)} \left( \frac{u}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{u-u''}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} \right) \sqrt{1+(f'(u))^2} du + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \int_{(-d_0, d_0) \setminus ((-h_0/2, h_0/2) \cup (u^*-h_0/2, u^*+h_0/2))} \frac{u'' \left( \sqrt{1+(f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du + \\
 & + \int_{((-h_0/2, h_0/2) \cup (u^*-h_0/2, u^*+h_0/2)) \setminus (-d_0, d_0)} \frac{(u-u'') \left( (u-u'')^2 - u^2 + (f(u)-f(u''))^2 - (f(u))^2 \right)}{\left( u^2 + (f(u))^2 \right) \left( (u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2 \right)} \times \\
 & \times \left( \sqrt{1+(f'(u))^2} - 1 \right) du + \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \frac{u \left( \sqrt{1+(f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du + \int_{u^*-h_0/2}^{u^*+h_0/2} \frac{u \left( \sqrt{1+(f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du - \\
 & - \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \frac{(u-u'') \left( \sqrt{1+(f'(u))^2} - 1 \right)}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} du - \frac{\sqrt{1+(f'(u''))^2} - 1}{1+(f'(u''))^2} \int_{u^*-h_0/2}^{u^*+h_0/2} \frac{du}{u-u''} - \\
 & - \int_{u^*-h_0/2}^{u^*+h_0/2} \frac{(u-u'') \left( \sqrt{1+(f'(u))^2} - \sqrt{1+(f'(u''))^2} \right)}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} du - \\
 & - \left( \sqrt{1+(f'(u''))^2} - 1 \right) \int_{u^*-h_0/2}^{u^*+h_0/2} \frac{1}{u-u''} \left( \frac{(u-u'')^2}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} - \frac{1}{1+(f'(u''))^2} \right) du + \\
 & + \int_{(u^*-d_0+h_0, u^*+d_0-h_0) \setminus (-d_0, d_0)} \left( u \left( \frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) - (u-u'') \left( \frac{1}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} - \frac{1}{(u-u'')^2} \right) \right) du + \\
 & + \int_{((-h_0/2, h_0/2) \cup (u^*-h_0/2, u^*+h_0/2)) \setminus (u^*-d_0+h_0, u^*+d_0-h_0)} u'' \left( \frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du + \\
 & + \int_{((-h_0/2, h_0/2) \cup (u^*-h_0/2, u^*+h_0/2)) \setminus (u^*-d_0+h_0, u^*+d_0-h_0)} \left( \left( \frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{1}{(u-u'')^2 (1+(f'(u''))^2)} - \frac{1}{u^2} \right) \right) (u-u'') du + \\
 & + \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \left( \frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) u du + \int_{u^*-h_0/2}^{u^*+h_0/2} \left( \frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) u du + \\
 & + \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \left( \frac{1}{(u-u'')^2 (1+(f'(u''))^2)} - \frac{1}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} \right) (u-u'') du + \\
 & + \int_{u^*-h_0/2}^{u^*+h_0/2} \left( \frac{1}{(u-u'')^2 (1+(f'(u''))^2)} - \frac{1}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} \right) (u-u'') du \Big].
 \end{aligned}$$

Так как существует такая точка  $u_* = u'' + \tilde{\theta}(u - u'')$ , что

$$f(u) - f(u'') = f'(u_*)(u - u''),$$

где  $\tilde{\theta} \in (0, 1)$ , то нетрудно убедиться, что

$$|R_{9,3}(x', x'')| \leq M \|\overline{\text{grad}}\rho\|_{\infty} h^{\alpha}.$$

Также можно показать, что

$$|R_{9,4}(x', x'')| \leq M \|\overline{\text{grad}}\rho\|_{\infty} h^{\alpha}.$$

Следовательно,

$$|R_9(x', x'')| \leq M \left( h^{\alpha} \|\overline{\text{grad}}\rho\|_{\infty} + \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h) \right),$$

а значит,

$$|R(x', x'')| \leq M \left( h^{\alpha} \|\overline{\text{grad}}\rho\|_{\infty} + \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam}L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t^2} dt \right).$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений  $Q(x', x'')$  и  $R(x', x'')$ , получаем, что если  $0 < \alpha < 1$ , то

$$\begin{aligned} & \left| \overline{\text{grad}}W(x') - \overline{\text{grad}}W(x'') \right| \leq \\ & \leq M \left[ h^{\alpha} (\|\rho\|_{\infty} + \|\overline{\text{grad}}\rho\|_{\infty}) + \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam}L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t^2} dt \right]. \end{aligned}$$

Из доказательства теоремы ясно, что если  $\alpha = 1$ , то

$$\begin{aligned} & \left| \overline{\text{grad}}W(x') - \overline{\text{grad}}W(x'') \right| \leq \\ & \leq M \left[ h |\ln h| (\|\rho\|_{\infty} + \|\overline{\text{grad}}\rho\|_{\infty}) + \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam}L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t^2} dt \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(h) = \begin{cases} h^{\alpha} + \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam}L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t^2} dt, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ h |\ln h| + \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam}L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t^2} dt, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Учитывая, что  $\lim_{h \rightarrow 0} \psi(h) = 0$ , функция  $\psi(h)$  не убывает, а функция  $\psi(h)/h$  не возрастает, получим доказательство теоремы.

**Следствие 2.** Пусть  $L \subset R^2$  – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\rho(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция на  $L$  и

$$\int_0^{\text{diam}L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда при  $0 < \alpha < 1$

$$\omega\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{n}}, h\right) \leq M_\rho \left( h^\alpha + \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam}L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t^2} dt \right),$$

а при  $\alpha = 1$

$$\omega\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{n}}, h\right) \leq M_\rho \left( h |\ln h| + \omega(\overline{\text{grad}}\rho, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam}L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t^2} dt \right),$$

где  $M_\rho$  - положительная постоянная, зависящая лишь от  $L$  и  $\rho$ .

Пусть  $\varphi \in \chi$ . Через  $H(\varphi)$  обозначим линейное пространство всех непрерывных на  $L$  функций  $\rho$ , удовлетворяющих условию

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq C_\rho \varphi(|x - y|), \quad x, y \in L,$$

где  $C_\rho$  - положительная постоянная, зависящая от  $L$  и  $\rho$ , а не от  $x$  и  $y$ . Обозначим также через  $H_1(\varphi)$  линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на  $L$  функций  $\psi$ , удовлетворяющих условию

$$|\overline{\text{grad}}\psi(x) - \overline{\text{grad}}\psi(y)| \leq C_\psi \varphi(|x - y|), \quad x, y \in L,$$

где  $C_\psi$  - положительная постоянная, зависящая от  $L$  и  $\psi$ , а не от  $x$  и  $y$ . Известно [11], что пространства  $H(\varphi)$  и  $H_1(\varphi)$  являются банаховыми пространствами с соответствующими нормами

$$\|\rho\|_{H(\varphi)} = \sup_{x \in L} |\rho(x)| + \sup_{\substack{x, y \in L \\ x \neq y}} \frac{|\rho(x) - \rho(y)|}{\varphi(|x - y|)}$$

и 
$$\|\psi\|_{H_1(\varphi)} = \sup_{x \in L} |\psi(x)| + \sup_{x \in L} |\overline{\text{grad}}\psi(x)| + \sup_{\substack{x, y \in L \\ x \neq y}} \frac{|\overline{\text{grad}}\psi(x) - \overline{\text{grad}}\psi(y)|}{\varphi(|x - y|)}.$$

Из теоремы 2 вытекает

**Теорема 3.** Пусть  $L \subset R^2$  - простая замкнутая кривая Ляпунова и  $\varphi \in J_0(S)$ .

Тогда оператор  $(B\rho)(x) = \overline{\text{grad}}W(x)$ ,  $x \in L$ , ограниченно действует из  $H_1(\varphi)$  в  $H(Z(\varphi))$ , причем

$$\|B\rho\|_{H(Z(\varphi))} \leq M \|\rho\|_{H_1(\varphi)}.$$

Через  $H_\beta(L)$  обозначим пространство всех непрерывных на  $L$  функций  $g$ , удовлетворяющих условию Гельдера

$$|g(x) - g(y)| \leq M_g |x - y|^\beta, \quad \forall x, y \in L,$$

где  $0 < \beta \leq 1$  и  $M_g$  - положительная постоянная, зависящая от  $g$ , а не от  $x$  и  $y$ .

Известно [11], что пространства  $H_\beta(L)$  и  $H_{1,\beta}(L)$  являются банаховыми пространствами с соответствующими нормами

$$\|g\|_\beta = \sup_{x \in L} |g(x)| + \sup_{\substack{x, y \in L \\ x \neq y}} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\beta}$$

$$\text{и} \quad \|\rho\|_{1,\beta} = \sup_{x \in L} |\rho(x)| + \sup_{x \in L} |\overline{\text{grad}}\rho(x)| + \sup_{\substack{x,y \in L \\ x \neq y}} \frac{|\overline{\text{grad}}\rho(x) - \overline{\text{grad}}\rho(y)|}{|x-y|^\beta}.$$

**Следствие 3.** Пусть  $L \subset R^2$  – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем  $0 < \alpha \leq 1$ , а  $\rho \in H_{1,\beta}(L)$ . Тогда логарифмический потенциал двойного слоя  $W(x)$  имеет на  $L$  непрерывную производную, причем

(а) если  $\alpha < \beta \leq 1$ , то  $\overline{\text{grad}}W \in H_\alpha(L)$  и  $\|\overline{\text{grad}}W\|_\alpha \leq M \|\rho\|_{1,\beta}$ ;

(б) если  $\beta \leq \alpha < 1$ , то  $\overline{\text{grad}}W \in H_\beta(L)$  и  $\|\overline{\text{grad}}W\|_\beta \leq M \|\rho\|_{1,\beta}$ ;

(с) если  $\alpha = 1, \beta < 1$ , то  $\overline{\text{grad}}W \in H_\beta(L)$  и  $\|\overline{\text{grad}}W\|_\beta \leq M \|\rho\|_{1,\beta}$ ;

(д) если  $\alpha = 1, \beta = 1$ , то  $\overline{\text{grad}}W \in H_\gamma(L)$  и  $\|\overline{\text{grad}}W\|_\gamma \leq M \|\rho\|_{1,1}$ , где  $\gamma \in (0,1)$ .

**Следствие 4.** Пусть  $L \subset R^2$  – простая замкнутая кривая Ляпунова и  $\varphi \in J_0(S)$ . Тогда оператор  $A$  ограниченно действует из  $H_1(\varphi)$  в  $H(Z(\varphi))$ , причем

$$\|A\rho\|_{H(Z(\varphi))} \leq M \|\rho\|_{H_1(\varphi)}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311с.
2. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953. 415 с.
3. Халилов Э.Г. О свойствах оператора, порожденного производной акустического потенциала простого слоя // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. Т. 17. № 1. 2017. С. 78–90.
4. Халилов Э.Г. Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 3. С. 690–700.
5. Khalilov E.H. Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential // Transactions of NAS of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences. V. 34. No. 1. 2014. P. 73–82.
6. Халилов Э.Г. О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1277–1283.
7. Халилов Э.Г. Конструктивный метод решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. No. 4. С. 544–555.
8. Khalilov E. H., Aliev A.R. Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. V. 41. № 16. 2018. P. 6921–6933.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
10. Кустов Ю.А., Мусаев Б.И. Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения // Деп. в ВИНТИ. № 4281-81. 60 с.
11. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 416 с.

Статья поступила 07.03.2019 г.

Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. (2019) ON THE DERIVATIVE OF THE DOUBLE-LAYER LOGARITHMIC POTENTIAL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 38–54

DOI 10.17223/19988621/62/4

Keywords: Laplace equations, Lyapunov curve, derivative of the double-layer logarithmic potential, curvilinear singular integral, generalized Hölder spaces.

In the paper, it is proved that if  $L \subset R^2$  is a simple closed Lyapunov curve with exponent  $0 < \alpha \leq 1$ , and  $\rho(x)$  is a continuously differentiable function on  $L$ , where

$$\int_0^{\text{diam } L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt < +\infty,$$

then the logarithmic potential of the double layer

$$W(x) = \int_L \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\bar{n}(y)} \rho(y) dL_y, \quad x \in L,$$

has a normal derivative on  $\forall x \in L$ ; moreover,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x)}{\partial\bar{n}(x)} = & -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{(\overline{yx}, \bar{n}(y))(\overline{yx}, \bar{n}(x))}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\bar{n}(y), \bar{n}(x))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y, \quad x \in L, \end{aligned} \quad (1)$$

and

$$\left| \frac{\partial W(x)}{\partial\bar{n}(x)} \right| \leq M \left( \|\rho\|_\infty + \|\overline{\text{grad}}\rho\|_\infty + \int_0^d \frac{\omega(\overline{\text{grad}}\rho, t)}{t} dt \right), \quad \forall x \in L,$$

where  $\omega(f, t)$  denotes the modulus of continuity of the functions  $f$ ,  $\bar{n}(y)$  is the external unit normal at the point  $y \in L$ ,  $\Phi(x, y)$  is the fundamental solution of the Laplace equation, i.e.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, \quad x, y \in R^2, \quad x \neq y,$$

and the last integral in equality (1) exists in the sense of the principal value of Cauchy.

Let  $\varphi \in \chi = \left\{ f : f \uparrow, \lim_{\delta \rightarrow 0} f(\delta) = 0, f(\delta) / \delta \downarrow \right\}$ . We denote by  $H(\varphi)$  the linear space of all continuous functions  $\rho$  on  $L$  satisfying the condition

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq C_\rho \varphi(|x-y|), \quad x, y \in L,$$

where  $C_\rho$  is a positive constant depending on  $L$  and  $\rho$ , not on  $x$  and  $y$ . We also denote by  $H_1(\varphi)$  the linear space of all continuously differentiable functions  $\psi$  on  $L$  satisfying the condition

$$\left| \overline{\text{grad}}\psi(x) - \overline{\text{grad}}\psi(y) \right| \leq C_\psi \varphi(|x-y|), \quad x, y \in L,$$

where  $C_\psi$  is a positive constant depending on  $L$  and  $\psi$ , not on  $x$  and  $y$ .

In addition, the paper shows the validity of A. Zygmund's estimate for the normal derivative of the logarithmic potential of a double layer, and it is proved that the operator  $(A\rho)(x) = \frac{\partial W(x)}{\partial\bar{n}(x)}, x \in L$ , operates boundedly from a generalized space  $H_1(\varphi)$  to a generalized space  $H(Z(\varphi))$ , where

$$Z(\phi) = \begin{cases} h^\alpha + \phi(h) + \int_0^h \frac{\phi(t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} L} \frac{\phi(t)}{t^2} dt, & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ h|\ln h| + \phi(h) + \int_0^h \frac{\phi(t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} L} \frac{\phi(t)}{t^2} dt, & \text{if } \alpha = 1. \end{cases}$$

AMS Mathematical Subject Classification: 45E05; 31B10

**Financial support.** This work was supported by the University Grant of the ASOIU (grant no. ADNSU-2018-1-01).

*Elnur H. KHALILOV* (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of "General and Applied Mathematics" of the Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: elnurkhalil@mail.ru

*Mehpara N. BAKHSHALIYEVA* (PhD student of the department of "General and Applied Mathematics" of the Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: mehparebaxshaliyeva93@gmail.com

Received: March 7, 2019

#### REFERENCES

1. Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral equation methods in scattering theory*. John Wiley & Sons. 271 p.
2. Gyunter N.M. (1967) *Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics*. F. Ungar Publ. Co. 338 p.
3. Khalilov E.H. (2018) Properties of the operator generated by the derivative of the acoustic single layer potential. *Journal of Mathematical Sciences*. 231(2). pp. 168–180.
4. Khalilov E.H. (2014) Some properties of the operators generated by a derivative of the acoustic double layer potential. *Siberian Mathematical Journal*. 55(3). pp. 564–573. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446614030173>.
5. Khalilov E.H. (2014) Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential. *Transactions of NAS of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences*. 34(1). pp. 73–82.
6. Khalilov E.H. (2016) On an approximate solution of a class of boundary integral equations of the first kind. *Differential equations*. 52(9). pp. 1234–1240. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266116090147>.
7. Khalilov E.H. (2018) Constructive method for solving a boundary value problem with impedance boundary condition for the Helmholtz equation. *Differential Equations*. 54(4). pp. 539–550. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266118040109>.
8. Khalilov E.H., Aliev A.R. (2018) Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 41(16). pp. 6921–6933. DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.5204>.
9. Vladimirov V.S. (1971) *Equations of mathematical physics*. New York: Marcel Dekker publ. 426 p.
10. Kustov Yu.A., Musaev B.I. (1981) *Kubaturnaya formula dlya dvumernogo singulyarnogo integrala i ee prilozheniya* [The cubature formula for a two-dimensional singular integral and their applications]. Submitted to VINITI. 4281-81. 60 p.
11. Guseinov A.I., Mukhtarov Kh.Sh. (1980) *Vvedenie v teoriyu nelineynykh singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Nonlinear Singular Integral Equations], Moscow: Nauka publ. 416 p.

УДК 517.956.22  
DOI 10.17223/19988621/62/5

MSC 35A08, 35J25, 35J70, 35J75

Т.Г. Эргашев, Н.М. Сафарбаева

## ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ОДНИМ СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Фундаментальные решения многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом в полупространстве построены недавно. Для вышеназванного эллиптического уравнения в конечной односвязной области изучается задача Дирихле. Используя свойства одного из фундаментальных решений, построена функция Грина, с помощью которой единственное решение поставленной задачи в конечной области, ограниченной многомерной полусферой, найдено в явном виде.

**Ключевые слова:** *многомерное уравнение Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом, задача Дирихле, фундаментальное решение, формула Гаусса – Остроградского, функция Грина.*

Известно, что теория краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами является одним из центральных разделов современной теории уравнений в частных производных, которые встречаются при решении многих важных вопросов прикладного характера [1, 2]. Подробную библиографию и изложение исследований основных краевых задач для вырождающихся уравнений различного типа, в частности для двумерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, можно найти в монографиях [3–5].

При исследовании краевых задач для эллиптических уравнений всех (двух или более) размерностей с сингулярными коэффициентами важную роль играют фундаментальные решения данного уравнения. Фундаментальные решения двумерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом (уравнения Трикоми) были известны еще в первой половине прошлого столетия, и они успешно использованы при решении основных краевых задач и построении теории потенциала для этого уравнения. Для такого же уравнения с двумя сингулярными коэффициентами фундаментальные решения, которые выражаются через гипергеометрические функции Аппеля двух переменных, построены в [6] и, используя известные формулы разложения функций Аппеля двух переменных по гипергеометрическим функциям Гаусса, решения краевых задач найдены в явном виде.

Настоящая работа посвящается исследованию задачи Дирихле для одного сингулярного уравнения Гельмгольца. Фундаментальные решения двумерных и трехмерных уравнений Гельмгольца с двумя и тремя сингулярными коэффициентами соответственно построены в работах [7, 8], и эти фундаментальные решения применены к нахождению явных решений основных краевых задач для уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами [9–13]. К такому направлению исследований примыкают также работы [14, 15].

В недавно опубликованных работах [16–18] представлены фундаментальные решения для многомерных (более трехмерных) уравнений Гельмгольца с одним, двумя и тремя сингулярными коэффициентами соответственно. Как известно, фундаментальные решения уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициен-

тами выражаются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию, число переменных которой зависит от числа сингулярных коэффициентов уравнения. Для исследования свойств любой гипергеометрической функции многих переменных необходимы формулы разложения, позволяющие представить эту функцию многих переменных через бесконечную сумму произведений нескольких гипергеометрических функций с одной переменной, а это, в свою очередь облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных. В [19] введен в рассмотрение новый класс конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных, через которые выписываются фундаментальные решения для одного многомерного уравнения Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами. Доказана формула разложения для нововведенных конфлюэнтных функций, дающая возможность определить порядок особенности найденных фундаментальных решений.

Настоящая работа посвящена к исследованию задачи Дирихле для уравнения

$$H_{\beta}^{(m,\lambda)}(u) := \sum_{k=1}^{m-1} u_{x_k x_k} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y} u_y - \lambda^2 u = 0 \quad (1)$$

в конечной односвязной области, ограниченной в полупространстве  $y > 0$ , где  $m \geq 2$  – размерность пространства,  $\beta$  – действительное число, причем  $0 < 2\beta < 1$ , а  $\lambda$  – действительное или чисто мнимое постоянное.

При исследовании поставленной задачи важную роль играют фундаментальные решения уравнения (1), фундаментальные решения которого выписываются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию Горна от двух переменных [20]:

$$H_3(a, b; c; z, t) = \sum_{n,l=0}^{\infty} \frac{(a)_{n-l} (b)_n}{(c)_n n! l!} z^n t^l, \quad |z| < 1, \quad (2)$$

где  $a, b$  и  $c$  – постоянные, причем  $c \neq 0, 1, 2, \dots$ , а  $(\alpha)_k$  – известный символ Похгаммера:  $(\alpha)_0 = 1$ ,  $(\alpha)_k := \alpha(\alpha+1) \cdot \dots \cdot (\alpha+k-1)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Кроме того, имеет место следующая формула разложения [19] для конфлюэнтной гипергеометрической функции Горна от двух переменных, определенной формулой (2):

$$H_3(a, b; c; z, -t) = F(a, b; c; z) i_{1-a}(2\sqrt{t}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^{k+l} (k-1)! (b)_k}{l!(l-1)!(k-l)!(c)_k (1-a)_l} z^k t^l F(a+k, b+k; c+k; z) i_{1-a+l}(2\sqrt{t}), \quad (3)$$

где  $F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n$ ,  $|z| < 1$  – гипергеометрическая функция Гаусса

[20], а  $i_{\nu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(\nu+1)_n} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$  – нормированная модифицированная функция

Бесселя ( $i$ -функция Бесселя) [21].

Для уравнения (1) при  $\lambda = 0$  в работах [22–25] исследованы некоторые пространственные краевые задачи в конечных и бесконечных областях.



**Формула Грина и фундаментальные решения уравнения (1)**

Полупространство  $y > 0$  обозначим через  $R_m^+ = \{(x, y) : y > 0\}$ , где  $x = (x_1, \dots, x_{m-1})$ .

Рассмотрим тождество

$$y^{2\beta} [uH_\beta^{(m,\lambda)}(w) - wH_\beta^{(m,\lambda)}(u)] = y^{2\beta} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ u \frac{\partial w}{\partial x_k} - w \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^{2\beta} \left( u \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right].$$

Интегрируем обе части последнего тождества по области  $\Omega$ , расположенной в полупространстве  $y > 0$ , и, пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, получим

$$\int_{\Omega} y^{2\beta} [uH_\beta^{(m,\lambda)}(w) - wH_\beta^{(m,\lambda)}(u)] dx dy = \int_{\Gamma} \left[ y^{2\beta} \sum_{k=1}^{m-1} \left( u \frac{\partial w}{\partial x_k} - w \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \cos(n, x_k) + y^{2\beta} \left( u \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, y) \right] d\Gamma, \quad (4)$$

где  $dx := dx_1 dx_2 \dots dx_{m-1}$ ,  $\Gamma$  – граничная поверхность области  $\Omega$ ,  $n$  – внешняя нормаль к поверхности  $\Gamma$ .

Формула Грина (4) выводится при следующих предположениях: функции  $u(x, y)$ ,  $w(x, y)$  и их частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области  $\bar{\Omega}$ , частные производные второго порядка непрерывны внутри  $\Omega$  и интегралы по  $\Omega$ , содержащие  $H_\beta^{(m,\lambda)}(u)$  и  $H_\beta^{(m,\lambda)}(w)$ , имеют смысл. Если  $H_\beta^{(m,\lambda)}(u)$  и  $H_\beta^{(m,\lambda)}(w)$  не обладают непрерывностью вплоть до  $\Gamma$ , то это – многомерные несобственные интегралы, которые получаются как пределы по любой последовательности областей  $\Omega_k$ , которые содержатся внутри  $\Omega$ , когда эти области  $\Omega_k$  стремятся к  $\Omega$ , так что всякая точка, находящаяся внутри  $\Omega$ , попадает внутрь областей  $\Omega_k$ , начиная с некоторого номера  $k$ .

Если  $u$  и  $w$  суть решения уравнения (1), то из формулы (4) имеем

$$\int_{\Gamma} y^{2\beta} \left( u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma = 0, \quad (5)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  означает нормальную производную:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{k=1}^{m-1} \cos(n, x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} + \cos(n, y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (6)$$

Полагая в формуле (4)  $w \equiv 1$  и заменяя  $u$  на  $u^2$ , получим

$$\int_{\Omega} y^{2\beta} \left[ \sum_{k=1}^{m-1} u_{x_k}^2 + u_y^2 + \lambda^2 u^2 \right] dx dy = \int_{\Gamma} y^{2\beta} u \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma, \quad (7)$$

где  $u(x, y)$  – решения уравнения (1). Равенство (7) играет важную роль при доказательстве единственности решения краевых задач.

Наконец, из формулы (5), полагая  $w \equiv 1$ , будем иметь

$$\int_{\Gamma} y^{2\beta} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0. \quad (8)$$

Формула (8) утверждает, что интеграл от нормальной производной решения уравнения (1) по граничной поверхности равен нулю.

Фундаментальные решения уравнения (1) найдены в [16]:

$$q_0(x, y; \xi, \eta) = \gamma_0 r^{-2\beta_0} H_3(\beta_0, \beta; 2\beta; \theta, \mu); \quad (9)$$

$$q_1(x, y; \xi, \eta) = \gamma_1 r^{-2\beta_1} y^{1-2\beta} \eta^{1-2\beta} H_3(\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; \theta, \mu), \quad (10)$$

где

$$\beta_0 = \frac{m}{2} - 1 + \beta, \quad \gamma_0 = 2^{2\beta_0 - m} \frac{\Gamma(\beta_0)\Gamma(\beta)}{\pi^{m/2}\Gamma(2\beta)},$$

$$\beta_1 = \frac{m}{2} - \beta, \quad \gamma_1 = 2^{2\beta_1 - m} \frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(1-\beta)}{\pi^{m/2}\Gamma(2-2\beta)}, \quad m \geq 2; \quad (11)$$

$$\xi := (\xi_1, \dots, \xi_{m-1}); \quad \theta = 1 - \frac{r_1^2}{r^2} = -\frac{4y\eta}{r^2}, \quad \mu = -\frac{\lambda^2}{4} r^2, \quad (12)$$

$$r^2 = \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - \xi_k)^2 + (y - \eta)^2, \quad r_1^2 = \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - \xi_k)^2 + (y + \eta)^2. \quad (13)$$

Здесь  $H_3(a, b; c; z, t)$  – конфлюэнтная гипергеометрическая функция Горна, определенная формулой (2).

Функции, определенные формулами (9) и (10), по переменным  $(x, y)$  являются решениями уравнения (1), причем они имеют особенность порядка  $1/r^{m-2}$  при  $r \rightarrow 0$  [16] и, следовательно, являются фундаментальными решениями уравнения (1).

Нетрудно видеть, что

$$\left( y^{2\beta} \frac{\partial q_0(x, y; \xi, \eta)}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad q_1(x, 0; \xi, \eta) = 0$$

для всех  $x$ .

### Постановка и единственность решения задачи

Пусть  $\Omega \subset R_m^+$  – область, ограниченная плоскостью  $D = \{(x, y): y = 0, -a_k < x_k < b_k, k = \overline{1, m-1}\}$  и поверхностью  $S$ , которая пересекается с областью  $D$ . Линию пересечения обозначим через  $L = S \cap D$ .  $a_k, b_k = \text{const} > 0, k = \overline{1, m-1}$ . Поверхность  $S$  пересекает ось  $Oy$  при  $y = a, a > 0$ .

**Задача Дирихле.** Найти в области  $\Omega$  регулярное решение  $u(x, y)$  уравнения (1), непрерывное в замкнутой области  $\overline{\Omega}$  и удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \overline{D}, \quad u|_S = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{S},$$

где  $\tau(x)$  и  $\varphi(x, y)$  – заданные непрерывные функции, причем  $\varphi(x, y)|_L = \tau(x)|_L$ .

Докажем единственность решения поставленной задачи. Нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\int_{\Omega} y^{2\beta} u H_{\beta}^{(m)}(u) dx dy = - \int_{\Omega} y^{2\beta} \left[ \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \lambda^2 u^2 \right] dx dy + \\ + \int_{\Omega} \left[ y^{2\beta} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( y^{2\beta} u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy .$$

Пусть  $u$  – решение уравнения (1). Тогда воспользовавшись формулой Гаусса – Остроградского, получим

$$\int_{\Omega} y^{2\beta} \left[ \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \lambda^2 u^2 \right] dx dy = \\ = - \int_D \tau(x) \left( y^{2\beta} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx + \int_S y^{2\beta} \varphi(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Если теперь рассмотреть однородный случай задачи Дирихле (т.е.  $\varphi(x, y) \equiv 0$ ,  $\tau(x) \equiv 0$ ), то

$$\int_{\Omega} y^{2\beta} \left[ \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \lambda^2 u^2 \right] dx dy = 0.$$

Отсюда следует, что  $u(x, y) = 0$  в  $\bar{\Omega}$ . Тем самым доказана единственность решения задачи Дирихле.

### Существование решения задачи Дирихле

Существование решения задачи Дирихле докажем методом функции Грина. Для этого положим, что  $a_k = b_k = R$ ,  $k = \overline{1, m-1}$ , и  $S$  является полусферой с центром в начале системы координат, радиусом  $R$ , т.е.  $S = \left\{ (x, y) : \sum_{k=1}^{m-1} x_k^2 + y^2 = R^2 \right\}$ .

**Определение.** Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения (1) называется функция  $G_1(x, y; \xi, \eta)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1) внутри области  $\Omega$ , кроме точки  $(\xi, \eta)$ , эта функция есть регулярное решение уравнения (1);

2) удовлетворяет граничному условию

$$G_1(x, y; \xi, \eta) \Big|_{S \cup \bar{D}} = 0, \quad (14)$$

3) может быть представлена в виде

$$G_1(x, y; \xi, \eta) = q_1(x, y; \xi, \eta) + w_1(x, y; \xi, \eta), \quad (15)$$

где  $q_1(x, y; \xi, \eta) = \gamma_1 r^{-2\beta_1} y^{1-2\beta} \eta^{1-2\beta} H_3(\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; \theta, \mu)$  – фундаментальное решение уравнения (1), определенное формулой (10), а  $\gamma_1, r, \theta$  и  $\mu$  определяются формулами (11) – (13). Здесь  $w_1(x, y; \xi, \eta)$  – регулярное решение уравнения (1) везде внутри  $\Omega$ .

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части  $w_1(x, y; \xi, \eta)$ , которая в силу (14) и (15) должна удовлетворять граничным условиям

$$w_1(x, y; \xi, \eta)|_S = -q_1(x, y; \xi, \eta)|_S, \quad w_1(x, 0; \xi, \eta) = 0.$$

Для области  $\Omega$ , ограниченной плоскостью  $y = 0$  и полусферой  $S$ , функция Грина задачи Дирихле имеет вид

$$G_1(x, y; \xi, \eta) = q_1(x, y; \xi, \eta) - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\beta_1} q_1(x, y; \bar{\xi}, \bar{\eta}),$$

где 
$$\rho^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2 + \eta^2, \quad \bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{m-1}), \quad \bar{\xi}_k = \frac{R^2}{\rho^2} \xi_k, \quad \bar{\eta} = \frac{R^2}{\rho^2} \eta.$$

Пусть  $(\xi, \eta) \in \Omega$ . Вырежем из области  $\Omega$   $m$ -мерный шар малого радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $(\xi, \eta)$ , оставшуюся часть  $\Omega$  обозначим через  $\Omega_\varepsilon$ , а через  $C_\varepsilon$  –  $m$ -мерную сферу вырезанного шара. Используя формулу (4), получим

$$\begin{aligned} & \int_{C_\varepsilon} y^{2\beta} \left[ u \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial u}{\partial n} \right] dC_\varepsilon = \\ & = \int_D \tau(x) \left\{ y^{2\beta} \frac{\partial}{\partial y} G_1(x, y; \xi, \eta) \right\} \Big|_{y=0} dx - \int_S y^{2\beta} \varphi(S) \frac{\partial G_1(x, \xi)}{\partial n} dS. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя формулы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z} H_3(a, b; c; z, t) = \frac{ab}{c} H_3(a+1, b+1; c+1; z, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_3(a, b; c; z, t) = \frac{1}{a-1} H_3(a-1, b; c; z, t),$$

и смежное соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{c} z H_3(a+1, b+1; c+1; z, t) - \frac{1}{a-1} t H_3(a-1, b; c; z, t) = \\ & = a H_3(a+1, b; c; z, t) - a H_3(a, b; c; z, t), \end{aligned}$$

нетрудно вычислить частные производные фундаментального решения  $q_1(x, y; \xi, \eta)$ :

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_k} = -2\beta_1 \gamma_1 (x_k - \xi_k) y^{1-2\beta} \eta^{1-2\beta} r^{-2\beta_1-2} H_3(1+\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; \theta, \mu), \quad k = \overline{1, m-1},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial y} &= (1-2\beta) \gamma_1 y^{-2\beta} \eta^{1-2\beta} r^{-2\beta_1} H_3(\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; \theta, \mu) - \\ & - 2\beta_1 \gamma_1 y^{1-2\beta} \eta^{2-2\beta} r^{-2\beta_1-2} H_3(1+\beta_1, 2-\beta; 3-2\beta; \theta, \mu) - \\ & - 2\beta_1 \gamma_1 (y-\eta) y^{1-2\beta} \eta^{1-2\beta} r^{-2\beta_1-2} H_3(1+\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; \theta, \mu). \end{aligned}$$

Теперь, воспользовавшись определением нормальной производной (см. формулу (6)), окончательно находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial n} &= 2\beta_1 \gamma_1 y^{1-2\beta} \eta^{1-2\beta} r^{-2\beta_1} H_3(1+\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; \theta, \mu) \frac{\partial}{\partial n} \left[ \ln \frac{1}{r} \right] + \\ &+ 2\beta_1 \gamma_1 y^{1-2\beta} \eta^{2-2\beta} r^{-2\beta_1-2} H_3(1+\beta_1, 2-\beta; 3-2\beta; \theta, \mu) - \\ &- (1-2\beta) \gamma_1 y^{-2\beta} \eta^{1-2\beta} r^{-2\beta_1} H_3(\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; \theta, \mu). \end{aligned} \quad (17)$$

Левую часть равенства (16) разделим на три интеграла:

$$\int_{C_\varepsilon} y^{2\beta} \left[ u \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial u}{\partial n} \right] dC_\varepsilon = J_1 + J_2 + J_3, \quad (18)$$

где

$$J_1 = \int_{C_\varepsilon} y^{2\beta} u(x, y) \frac{\partial q_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} dC_\varepsilon, \quad (19)$$

$$J_2 = - \left( \frac{R}{\rho} \right)^{2\beta_1} \int_{C_\varepsilon} y^{2\beta} u(x, y) \frac{\partial q_1(x, y; \bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial n} dC_\varepsilon,$$

$$J_3 = - \int_{C_\varepsilon} y^{2\beta} G_1(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} dC_\varepsilon.$$

Сначала выражение нормальной производной (17) подставим в (19), затем в правой части полученного равенства (19) переходим в обобщенную сферическую систему координат вида

$$x_1 = \xi_1 + \varepsilon \Phi_1, \dots, x_{m-1} = \xi_{m-1} + \varepsilon \Phi_{m-1}, \quad y = \eta + \varepsilon \Phi_m,$$

где

$$\Phi_1 = \cos \varphi_1, \quad \Phi_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad \Phi_3 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \dots,$$

$$\Phi_{m-1} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}, \quad \Phi_m = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}$$

$$[\varepsilon \geq 0, 0 \leq \varphi_1 \leq \pi, \dots, 0 \leq \varphi_{m-2} \leq \pi, 0 \leq \varphi_{m-1} \leq 2\pi].$$

После несложных преобразований первое слагаемое  $J_1$  принимает вид

$$J_1 = J_{11} + J_{12} + J_{13},$$

где

$$\begin{aligned} J_{11} &= 2\beta_1 \gamma_1 \eta^{1-2\beta} \varepsilon^{-2\beta_1-2+m} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \int_0^\pi \sin \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{m-3} d\varphi_{m-3} \dots \\ &\dots \int_0^\pi (\eta + \varepsilon \Phi_m) u(\xi_1 + \varepsilon \Phi_1, \dots, \xi_{m-1} + \varepsilon \Phi_{m-1}, \eta + \varepsilon \Phi_m) H_{31}(\varepsilon) \sin^{m-2} \varphi_1 d\varphi_1, \\ J_{12} &= 2\beta_1 \gamma_1 \eta^{2-2\beta} \varepsilon^{-2\beta_1-3+m} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \int_0^\pi \sin \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{m-3} d\varphi_{m-3} \dots, \end{aligned}$$

$$\dots \int_0^\pi (\eta + \varepsilon \Phi_m) u(\xi_1 + \varepsilon \Phi_1, \dots, \xi_{m-1} + \varepsilon \Phi_{m-1}, \eta + \varepsilon \Phi_m) H_{32}(\varepsilon) \sin^{m-2} \varphi_1 d\varphi_1,$$

$$J_{13} = -(1-2\beta) \gamma_1 \eta^{1-2\beta} \varepsilon^{-2\beta_1-1+m} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \int_0^\pi \sin \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{m-3} d\varphi_{m-3} \dots$$

$$\dots \int_0^\pi u(\xi_1 + \varepsilon \Phi_1, \dots, \xi_{m-1} + \varepsilon \Phi_{m-1}, \eta + \varepsilon \Phi_m) H_{33}(\varepsilon) \sin^{m-2} \varphi_1 d\varphi_1,$$

$$H_{31}(\varepsilon) = H_3 \left( 1 + \beta_1, 1 - \beta; 2 - 2\beta; 1 - \frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}, -\frac{\lambda^2}{4} \varepsilon^2 \right),$$

$$H_{32}(\varepsilon) = H_3 \left( 1 + \beta_1, 2 - \beta; 3 - 2\beta; 1 - \frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}, -\frac{\lambda^2}{4} \varepsilon^2 \right),$$

$$H_{33}(\varepsilon) := H_3 \left( \beta_1, 1 - \beta; 2 - 2\beta; 1 - \frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}, -\frac{\lambda^2}{4} \varepsilon^2 \right), \quad r_{1\varepsilon}^2 = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2 + (2\eta + \varepsilon \Phi_m)^2.$$

Для полного вычисления  $J_1$  сначала вычислим  $J_{11}$ . Воспользовавшись формулой разложения (3), получим

$$H_{31}(\varepsilon) = F \left( 1 + \beta_1, 1 - \beta; 2 - 2\beta; 1 - \frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2} \right) i_{1-a}(\lambda\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^{k+l} (k-1)! (1-\beta)_k}{(k-l)! l! (l-1)! (2-2\beta)_k (-\beta_1)_l} \times$$

$$\times x^k y^l F \left( 1 + \beta_1 + k, 1 - \beta + k; 2 - 2\beta + k; 1 - \frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2} \right) i_{1-a+l}(\lambda\varepsilon). \quad (20)$$

Теперь применяем к каждой гипергеометрической функции Гаусса, входящей в формулу (20), известную формулу Больца [20]:

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} F \left( c-a, b; c; \frac{z}{z-1} \right).$$

В результате получим

$$H_{31}(\varepsilon) = \left( \frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2} \right)^{\beta-1} F \left( 1 - 2\beta - \beta_1, 1 - \beta; 2 - 2\beta; 1 - \frac{\varepsilon^2}{r_{1\varepsilon}^2} \right) i_{1-a}(\lambda\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^{k+l} (k-1)! (1-\beta)_k}{(k-l)! l! (l-1)! (2-2\beta)_k (-\beta_1)_l} \times$$

$$\times x^k y^l \left( \frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2} \right)^{\beta-1-k} F \left( 1 - 2\beta - \beta_1, 1 - \beta + k; 2 - 2\beta + k; 1 - \frac{\varepsilon^2}{r_{1\varepsilon}^2} \right) i_{1-a+l}(\lambda\varepsilon).$$

Теперь функцию  $H_{31}(\varepsilon)$  подставим в интеграл  $J_{11}$  и после этого в правой части  $J_{11}$  переходим к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{11} = \beta_1 \gamma_1 2^{2\beta-1} u(\xi, \eta) F(1-2\beta-\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; 1) \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \int_0^\pi \sin \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{m-3} d\varphi_{m-3} \dots \int_0^\pi \sin^{m-2} \varphi_1 d\varphi_1.$$

В силу известной формулы суммирования [20]

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c-a-b > 0$$

будем иметь

$$F(1-2\beta-\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; 1) = \frac{\Gamma(\beta_1+\beta)\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta_1)}. \quad (21)$$

Нетрудно вычислить, что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \int_0^\pi \sin \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{m-3} d\varphi_{m-3} \dots \int_0^\pi \sin^{m-2} \varphi_1 d\varphi_1 = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}. \quad (22)$$

Принимая во внимание (21) и (22), а также имея в виду значения  $\beta_1$  и  $\gamma_1$  (см. (11)), получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{11} = u(\xi, \eta). \quad (23)$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{12} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_3 = 0. \quad (24)$$

Теперь вычислим предел  $\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} \frac{\partial G_1}{\partial y}$  и нормальную производную  $\frac{\partial G_1(x, \xi)}{\partial n}$

на полусфере  $S$ . После этих вычислений, с учетом (18), (23) и (24), из (16) имеем

$$u(\xi, \eta) = (1-2\beta)\gamma_1 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\beta_1} \Gamma(1-\beta_1) \eta^{1-2\beta} \int_D \tau(x) [X^{-\beta_1} I_{-\beta_1}(\lambda X) - Y^{-\beta_1} I_{-\beta_1}(\lambda Y)] dx + \\ + 2\beta_1 \gamma_1 \eta^{1-2\beta} \int_S y \varphi(S) H_3(1+\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; \theta, \mu) \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^{2+2\beta_1}} dS, \quad (25)$$

где

$$X^2 := \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - \xi_k)^2 + \eta^2,$$

$$Y^2 := \sum_{k=1}^{m-1} \left(R - \frac{x_k \xi_k}{R}\right)^2 + \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1, j \neq k}^{m-1} x_k^2 \xi_j^2 + \frac{\eta^2}{R^2} \sum_{k=1}^{m-1} x_k^2 - (m-2)R^2;$$

$$I_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha+n)k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2n} - \text{известная модифицированная функция Бесселя.}$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

**Теорема.** Существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения (1) и оно представляется формулой (25).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961.
2. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.
3. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.
4. Gilbert R.P. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. New York, London: Academic Press, 1969.
5. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
6. Hasanov A. Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration // Int. J. Applied Mathematics and Statistics. 2008. V. 13 (8). P. 41–49.
7. Hasanov A. Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2007. 52(8). P. 673–683. DOI: 10.1080/17476930701300375.
8. Urinov A.K., Karimov E.T. On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter // Applied Mathematical Letters. 2011. V. 24. P. 314–319. DOI: 10.1016/j.aml.2010.10.013.
9. Salakhitdinov M.S., Hasanov A. A solution of the Neumann-Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2008. V. 53(4). P. 355–364. DOI: 10.1080/17476930701769041.
10. Salakhitdinov M.S., Hasanov A. The Dirichlet problem for the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Eurasian Mathematical Journal. 2012. V. 3(4). P. 99–110.
11. Салахитдинов М.С., Хасанов А. Краевая задача  $ND_1$  для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13(1). С.109–116.
12. Лернер М.Е., Ренин О.А. Нелокальные краевые задачи на вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37(11). С. 1562–1564.
13. Ренин О.А., Лернер М.Е. О задаче Дирихле для обобщенного двусесимметрического уравнения Гельмгольца в первом квадранте // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 1998. № 6. С. 5–8. DOI: 10.14498/vsgtu1.
14. Эргашев Т.Г. Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 41–49. DOI: 10.17223/19988621/46/6.
15. Эргашев Т.Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двусесимметрического уравнения Гельмгольца // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 45–56. DOI: 10.17223/19988621/50/4.
16. Mavlyaviev R.M., Garipov I.B. Fundamental solutions of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2017. V. 62(3). P. 284–296. DOI:10.1080/17476933.2016.1218853.
17. Ergashev T.G., Hasanov A. Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation // Uzbek Mathematical Journal. 2018. No. 1. P. 55–64.
18. Ergashev T.G. On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients // Computers and Mathematics with Applications. 2019. № 77. P. 69–76. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.09.014.
19. Уринов А.К., Эргашев Т.Г. Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С.45–56. DOI 10.17223/19988621/55/5.
20. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.



21. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. 224 с.
22. Agostinelli C. Integrazione dell'equazione differenziale  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + x^{-1}u_x = f$  e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. 1937. V. 6(26). P. 7–8.
23. Олевский М.Н. Решения задачи Дирихле, относящейся к уравнению  $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = \rho$  для полусферической области // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 767–770.
24. Назинов И.Т. Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 69–85. DOI: 10.3103/S1066369X1103008X.
25. Салахитдинов М.С., Хасанов А. К теории многомерного уравнения Геллерстедта // Узбекский математический журнал. 2007. № 3. С. 95–109.

Статья поступила 23.09.2019 г.

Ergashev T.G., Safarbayeva N.M. (2019) DIRICHLET PROBLEM FOR THE MULTIDIMENSIONAL HELMHOLTZ EQUATION WITH ONE SINGULAR COEFFICIENT. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 55–67

DOI 10.17223/19988621/62/5

Keywords: multidimensional Helmholtz equation with one singular coefficient, Dirichlet problem, fundamental solution, Gauss–Ostrogradsky formula, Green function.

In the study of boundary value problems for elliptic equations with singular coefficients, fundamental solutions play an important role, which is expressed by hypergeometric functions of one, two, or more variables depending on the number of the singularity. An interesting case is the Helmholtz equation with one or two singularities, and many authors solved various boundary value problems for a two-dimensional Helmholtz equation. However, relatively few works are devoted to the study of an equation with one singular coefficient, when the dimension of the equation exceeds three. The main obstacle in this direction is the lack of explicit fundamental solutions for the multidimensional Helmholtz equation with at least one singular coefficient. Fundamental solutions for the multidimensional Helmholtz equation with one singular coefficient in the half-space were found recently. In this paper, the Dirichlet problem for the above-mentioned elliptic equation in a finite simply connected domain is studied. Using the properties of one of the fundamental solutions, the Green function was constructed. With the help of the function, the solution of the problem in a finite region bounded by the multidimensional hemisphere is found in an explicit form.

Tuhtasin G. ERGASHEV (V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: ertuhtasin@mail.ru

Nigora M. SAFARBAYEVA (Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: akmal09.07.85@mail.ru

#### REFERENCES

1. Bers L. (1958) *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*. New York; London.
2. Frankl F.I. (1973) *Izbrannyye trudy po gazovoy dinamike* [Selected Works on Gas Dynamics]. Moscow: Nauka.
3. Smirnov M.M. (1966) *Vyrozhdayushchiesya ellipticheskie i giperbolicheskie uravneniya* [Degenerate elliptic and hyperbolic equations]. Moscow: Nauka.
4. Gilbert R. (1969) *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations*. New York; London: Academic Press.

5. Bitsadze A.V. (1981) *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow: Nauka.
6. Hasanov A. (2008) Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*. 13(8). pp. 41–49.
7. Hasanov A. (2007) Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 52(8). pp. 673–683. DOI: 10.1080/17476930701300375.
8. Urinov A.K., Karimov E.T. (2011) On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter. *Applied Mathematical Letters*. 24. pp. 314–319. DOI: 10.1016/j.aml.2010.10.013.
9. Salakhitdinov M.S., Hasanov A. (2008) A solution of the Neumann–Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 53(4). pp. 355–364. DOI: 10.1080/17476930701769041.
10. Salakhitdinov M.S., Hasanov A. (2012) The Dirichlet problem for the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Eurasian Mathematical Journal*. 3(4). pp. 99–110.
11. Salakhitdinov M.S., Hasanov A. (2011) Krayevaya zadacha  $ND_1$  dlya obobshchennogo osesimmetricheskogo uravneniya Gel'mgol'tsa [The boundary problem  $ND_1$  for the generalized axially symmetric Helmholtz equation]. *Doklady Adygs'koy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk -Reports of International Academy of Sciences of Adygey*. 13(1). pp.109–116.
12. Lerner M.E., Repin O.F. (2001) Nonlocal boundary value problems in a vertical half-strip for a generalized axisymmetric Helmholtz equation. *Differential equations*. 37(11). pp. 1640–1642.
13. Repin O.F., Lerner M.E. (1998) O zadache Dirikhle dlya obobshchennogo dvoosimmetricheskogo uravneniya Gel'mgol'tsa v pervom kvadrante [On the Dirichlet problem for the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation in the first quadrant]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskiye nauki – Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 6. pp. 5–8. DOI: 10.14498/vsgtu1.
14. Ergashev T.G. (2017) Obobshchennyye resheniya odnogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya vtorogo roda so spektralnym parametrom [Generalized solutions of the degenerate hyperbolic equation of the second kind with a spectral parameter]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 41–49. DOI: 10.17223/19988621/46/6.
15. Ergashev T.G. (2017) Chetvertyi potentsial dvoynogo sloya dlya obobshchennogo dvoosimmetricheskogo uravneniya Gel'mgol'tsa [The fourth double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 45–56. DOI: 10.17223/19988621/50/4.
16. Mavlyaviev R.M., Garipov I.B. (2017) Fundamental solutions of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 62(3). pp. 284–296. DOI:10.1080/17476933.2016.1218853.
17. Ergashev T.G., Hasanov A. (2018) Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Uzbek Mathematical Journal*. 1. pp. 55–64.
18. Ergashev T.G. (2019) On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*. 77. pp. 69–76. DOI:10.1016/j.camwa.2018.09.014.
19. Urinov A.K., Ergashev T.G. (2018) Konflyuentnyye gipergeometricheskiye funktsii mnogikh peremennykh i ikh primeneniye k nakhozheniyu fundamental'nykh resheniy obobshchennogo uravneniya Gel'mgol'tsa s singulyarnymi koeffitsientami [Confluent hypergeometric functions of many variables and their application to finding fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with singular coefficients]. *Vestnik Tomskogo*

- gosudarstvennogo universiteta. *Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 45–56. DOI 10.17223/19988621/55/5.
20. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. (1953) Higher Transcendental Functions. 1. New York, Toronto and London: McGraw-Hill Book Company.
  21. Sitnik S.M., Shishkina E.L. (2019) Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsialnykh uravneniy s operatorami Besselya [Method of transformation operators for differential equations with Bessel operators]. Moscow: FIZMATLIT.
  22. Agostinelli C. (1937) Integrazione dell'equazione differenziale  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + x^{-1}u_x = f$  e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*. 6(26). pp. 7–8.
  23. Olevskii M.N. (1949) Resheniya zadachi Dirikhle, odnosyashchiesya k uravneniyu  $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = \rho$  dlya polusfericheskoy oblasti [Solution of the Dirichlet problem regarding to the equation  $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = \rho$  for a hemispherical domain]. *Doklady Akademii Nauk SSSR – Reports of the Sciences Academy of USSR*. 64(6). pp. 767–770.
  24. Nazipov I.T. (2011) Solution of the spatial Tricomi problem for a singular mixed-type equation by the method of integral equations. *Russian Mathematics*. 55(3). pp. 61–76. DOI: 10.3103/S1066369X1103008X.
  25. Salakhiddinov M.S., Hasanov A. (2007) K teorii mnogomernogo uravneniya Gellershtedta. [On the theory of the multidimensional Gellerstedt equation]. *Uzbekskiy matematicheskiy zhurnal – Uzbek Mathematical Journal*. 3. pp. 95–109.

Received: September 23, 2019

## МЕХАНИКА

УДК 532.543

DOI 10.17223/19988621/62/6

**В.А. Архипов, О.В. Матвиенко, И.К. Жарова,  
Е.А. Маслов, К.Г. Перфильева, А.М. Булавко**

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЖИДКО-КАПЕЛЬНОГО ХЛАДАГЕНТА ПРИ АВИАЦИОННОМ ТУШЕНИИ ПОЖАРОВ<sup>1</sup>

Представлена математическая модель эволюции облака жидко-капельного аэрозоля в атмосфере при сбросе хладагента в очаг пожара из водосливного устройства летательного аппарата. Модель включает уравнения движения полидисперсных капель в поле силы тяжести с учетом их дробления, испарения и силы ветра. Приведены некоторые результаты расчетов траектории, температуры и размеров капель для типичных условий авиационного тушения пожаров.

**Ключевые слова:** авиационное тушение пожаров, жидко-капельное облако, гравитационное осаждение, высокотемпературная среда, очаг пожара, дробление и испарение капель, математическое моделирование.

Одним из эффективных способов тушения крупных пожаров, особенно в труднодоступных районах, является сброс хладагента в очаг пожара с борта самолета или вертолета. В качестве хладагента используется, как правило, тонкораспыленная вода. При воздействии распыленной воды на пламя реализуется объемно-поверхностный механизм взаимодействия. Тонкораспыленная вода охлаждает зону горения и одновременно за счет испарения блокирует паром доступ кислорода к горящим элементам. Эффективное использование этого способа базируется на закономерностях осаждения жидко-капельного облака и его взаимодействия со средой вблизи очага пожара. Эти закономерности являются фундаментальной основой для разработки оптимальных режимов использования средств авиации для тушения пожаров с учетом реальных условий.

Основной объем публикаций по проблемам пожаротушения с применением авиации относится к техническим аспектам реализации процесса сброса хладагента в очаг пожара [1, 2]. При моделировании процессов тушения очага пожара необходимо рассматривать три стадии: процесс разрушения макрообъема жидкости, сбрасываемого из сливного устройства с образованием первичного облака полидисперсных капель [3, 4]; эволюция аэрозольного облака при осаждении в изотермических условиях [5, 6]; взаимодействие жидко-капельного облака с очагом пожара [7, 8].

Ввиду сложности процесса разрушения макрообъема жидкости теоретическое описание не позволяет получить приемлемых для практики рекомендаций по высоте образования и характеристикам первичного облака капель [3]. Перспектив-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 15-19-10014).

ным подходом является моделирование на основе экспериментальных исследований на специальных установках с последующим обобщением результатов в виде критериального уравнения, включающего числа Рейнольдса, Вебера, Бонда, Фруда и соответствующие симплексы [4, 9 – 11].

В настоящей работе рассмотрена математическая модель эволюции аэрозольного облака, образующегося после фрагментирования макрообъема жидкого хладагента и взаимодействие капель с очагом пожара. Приведены результаты численного моделирования движения, нагрева и испарения полидисперсных капель воды, поступающих в очаг пожара.

### Математическая постановка задачи

Формирование первичного жидко-капельного облака происходит при выбросе в атмосферу хладагента массой  $M$  вследствие аэродинамического дробления макрообъема жидкости на фрагменты в виде полидисперсных сферических капель разного начального радиуса  $r_{s0}$ . Фрагментирование макрообъема жидкого хладагента реализуется на заданной высоте  $h$ . Динамика жидко-капельного облака рассматривается как гравитационное осаждение капель каждого размера с учетом скорости и направления ветра, скорости подъема нагретого воздуха из очага пожара. В процессе эволюции жидко-капельного облака учитывается теплообмен капель с окружающей средой и изменение их размеров за счет испарения. При осаждении учитываются процессы дробления капель. В рамках указанных положений динамика и тепломассообмен жидко-капельного облака в декартовой системе координат  $\{x, y, z\}$  (ось  $Oz$  направлена вертикально вверх, ось  $Ox$  – в направлении движения летательного аппарата) описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= \varphi(u - u_s), \quad \frac{dv_s}{dt} = \phi(v - v_s), \quad \frac{dw_s}{dt} = \varphi(w - w_s) - g, \\ \frac{dT_s}{dt} &= \frac{3}{2} \frac{\lambda}{r_s^2 \rho_s c_p} \text{Nu}(T - T_s) - \frac{q_{\text{vap}} m_{\text{vap}}}{m_s c_p}, \quad \frac{dr_s}{dt} = -\frac{k}{\rho_s} \frac{p_0}{p - p_0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Система (1) дополняется кинематическими соотношениями:

$$\frac{dx}{dt} = u_s, \quad \frac{dy}{dt} = v_s, \quad \frac{dz}{dt} = w_s. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2)  $\mathbf{U}(u, v, w)$ ,  $\mathbf{U}_s(u_s, v_s, w_s)$  – векторы скорости воздуха и капль;  $t$  – время;  $\varphi = 3\rho C_D |\mathbf{U} - \mathbf{U}_s| / (8\rho_s r_s)$ ;  $\rho, \rho_s$  – плотность воздуха и жидкости;  $r_s$  – радиус капли;  $C_D$  – коэффициент аэродинамического сопротивления;  $g$  – ускорение свободного падения;  $T, T_s$  – температура воздуха и капли (осредненная по объему капли);  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности воздуха;  $c_p$  – удельная теплоемкость жидкости;  $\text{Nu}$  – число Нуссельта;  $q_{\text{vap}}$  – удельная теплота испарения жидкости;  $m_{\text{vap}}$  – масса испарившейся жидкости;  $m_s$  – масса капли;  $k$  – коэффициент массоотдачи;  $p, p_0$  – давление окружающей среды и парциальное давление пара.

В предположении о сферической форме капель значения коэффициента аэродинамического сопротивления  $C_D$  и числа Нуссельта  $\text{Nu}$  определялись в зависимости от режимов обтекания по формулам [12]:

- стоксовский режим ( $\text{Re} \leq 1$ ):

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}}, \quad \text{Nu} = 2,$$

- переходный режим ( $1 < Re < 10^3$ ):

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt[3]{Re}}, \quad Nu = 2 + 0.6 Re^{1/2} Pr^{1/3};$$

- турбулентный режим ( $Re > 10^3$ ):

$$C_D = 0.44, \quad Nu = \frac{0.37 Re^{0.8} Pr}{1 + 2.443 Re^{-0.1} (Pr^{2/3} - 1)},$$

где  $Pr$  – число Прандтля.

Число Рейнольдса рассчитывалось по относительному движению капли

$$Re = \frac{2\rho|U - U_s|r_s}{\mu},$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости воздуха.

Зависимость коэффициента динамической вязкости от температуры определялась по формуле Сазерленда (Sutherland):

$$\mu = \frac{0.68 \cdot 10^{-2}}{T + 122} \left( \frac{T}{273} \right)^{3/2}.$$

В качестве критерия дробления капель за счет неустойчивости Рэлея–Тейлора принималось критическое значение числа Бонда  $Bo_* = (4\rho_s g r_s^2) / \sigma = 90$  ( $g$  – уско- рение массовых сил,  $\sigma$  – поверхностное натяжение), за счет неустойчивости Кельвина–Гельмгольца – критическое значение числа Вебера  $We_* = 2\rho|U - U_s|^2 r_s / \sigma = 17$ . Предполагалось, что при достижении критических значений числа Бонда или числа Вебера капля дробится на две сферические капли равной массы [11]. Процесс испарения моделировался в соответствии с моделью приведенной пленки [13] и диффузионной моделью [6].

При выбросе в атмосферу макрообъема жидкого хладагента в результате спонтанного дробления отдельных неустойчивых фрагментов образуется первичное облако капель жидкости. Дифференциальная функция счетного распределения капель в первичном облаке близка к экспоненциальной. При численном моделировании была принята функция распределения числа капель жидкости по размерам [14]:

$$f(r_{s0}) = a \exp(-3.12r_{s0}), \quad (3)$$

где  $a = 1.575 \text{ мм}^{-1}$  – нормирующий множитель.

При проведении расчетов с учетом распределения (3) рассматривались шесть фракций капель одинакового радиуса  $(r_{s0})_i$ . Значения счетной  $C_{ni}$  и массовой  $C_{mi}$  доли капель каждой фракции приведены в таблице.

Доли каждой фракции в первичном облаке хладагента

Фракция	$(r_{s0})_i$ , мм	$C_{ni}$ , %	$C_{mi}$ , %
1	0.5	54.7	1.2
2	1.0	25.0	9.5
3	1.5	11.5	19.7
4	2.0	5.3	24.9
5	2.5	2.4	24.3
6	3.0	1.1	20.4

В первом приближении очаг пожара можно моделировать областью радиусом  $r_0$  (радиус очага горения) с повышенной температурой на поверхности земли. Очаг пожара характеризуется высотой зоны горения  $z_0$  и средней температурой в зоне горения  $T_f$ . В случае стационарного горения эти величины рассматриваются как отражающие особенности рассматриваемой задачи; в общем случае необходимо рассматривать их изменение с течением времени.

При разработке методов расчета структуры течения в тепловой колонке можно использовать интегральный подход с целью количественного описания течения в целом [15]. В рамках этого подхода делаются предположения о форме профилей скорости, температуры и концентрации по горизонтальному сечению струи восходящего факела, а также о характере вовлечения окружающего воздуха по длине струи. Затем основные уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые интегрируются по продольной координате. Согласно экспериментальным данным, приведенным в монографии [16], радиальные распределения параметров течения  $w(r)$ ,  $\Delta T(r)$  в любом поперечном сечении подобны и соответствуют распределению Гаусса [17]:

$$w(r) = w_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right), \quad \Delta T(r) = (\Delta T)_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right), \quad (4)$$

где  $w_0$ ,  $(\Delta T)_0$  – вертикальная составляющая скорости и перегрев на оси тепловой колонки.

В монографии [18] показано, что в случае изотермической атмосферы с температурой  $T_a$  изменение радиуса тепловой колонки, температуры и вертикальной составляющей скорости на оси струи может быть описано следующими выражениями:

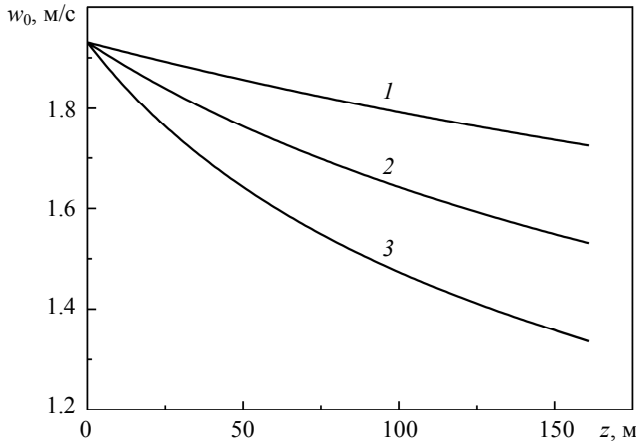
$$r = r_0 + \alpha z, \quad (\Delta T)_0 = (T_f - T_a) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-5/3}, \quad w_0 = w_* \frac{T_f - T_a}{T_a} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1/3}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  – коэффициент вовлечения, величина которого изменяется в диапазоне от 0.115 до 0.153;  $w_* = (0.6 \div 1.2)$  м/с – параметр, характеризующий скорость подъема продуктов горения.

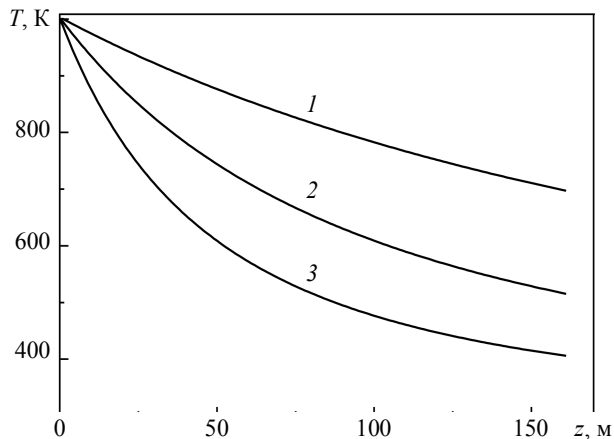
На рис. 1, 2 представлено изменение с высотой вертикальной составляющей скорости и температуры на оси тепловой колонки, рассчитанные для различных радиусов пожара ( $T_f = 1000$  К). Из рисунков видно, что с ростом высоты температура и вертикальная составляющая скорости уменьшаются. Увеличение размеров пожара приводит к увеличению выделяемой тепловой энергии. В результате температура на оси тепловой колонки, а также вертикальная составляющая скорости возрастают.

### Результаты численного моделирования

Численное моделирование эволюции облака жидко-капельного аэрозоля при осаждении в высокотемпературной среде проведено для различных начальных размеров капель воды (таблица). Предполагалось, что фрагментирование макрообъема жидкого хладагента реализуется на высоте  $h = 150$  м от поверхности земли на расстоянии 40 м от очага пожара. Температура окружающей среды составляла 20 °С. Математическое моделирование проводилось для случая полного штиля: скорость ветра полагалась равной нулю. В расчетах принималось, что радиус очага пожара составляет  $r_0 = 10$  м, средняя температура в зоне горения  $T_f = 750$  К, что соответствует лесному пожару средней интенсивности [19].



**Рис. 1.** Изменение с высотой вертикальной составляющей скорости на оси тепловой колонки: 1 –  $r_0 = 50$  м, 2 –  $r_0 = 20$  м, 3 –  $r_0 = 10$  м  
**Fig. 1.** Variation in the vertical velocity component on the heat column axis with the height:  $r_0 = (1) 50$ , (2) 20, and (3) 10 m



**Рис. 2.** Изменение с высотой температуры на оси тепловой колонки: 1 –  $r_0 = 50$  м, 2 –  $r_0 = 20$  м, 3 –  $r_0 = 10$  м  
**Fig. 2.** Variation in the temperature on the heat column axis with the height:  $r_0 = (1) 50$ , (2) 20, and (3) 10 m

Начальная температура капель выбиралась равной температуре окружающей среды. Вертикальная составляющая скорости каплей равна скорости их стационарного осаждения в турбулентном режиме [12], горизонтальная составляющая скорости каплей равна 10 м/с. Приведенные исходные данные соответствуют сбросу хладагента (воды) при пожаротушении с помощью водосливного устройства ВСУ–5, размещенного на борту вертолета [1].

На рис. 3 приведены траектории каплей различных начальных размеров (кривые 1 – 4), а также граница тепловой колонки (кривая 5). Как известно, движение каплей определяется их размером и скоростью. Сила сопротивления, действующая на капли с начальным размером  $d_{s0} = 1$  мм, приводит к значительному



уменьшению горизонтальной составляющей скорости. В результате капли этого размера оказываются не в состоянии проникнуть в центральную часть тепловой колонки (кривая 1). Основная часть траектории капль проходит через ее периферийную часть. В этой области происходит прогрев капль до 60–70 °С и выпадение на подстилающую поверхность. С увеличением начального размера капль происходит увеличение их инерционности. В результате этого горизонтальная составляющая скорости увеличивается и капли проникают в центральную часть тепловой колонки. При этом происходит их интенсивный нагрев и испарение на высоте 20–30 м от поверхности земли (рис. 4). Близость траекторий и температурных кривых для капль с начальным размером  $d_{s0} > 1.5$  мм объясняется процессами их дробления.

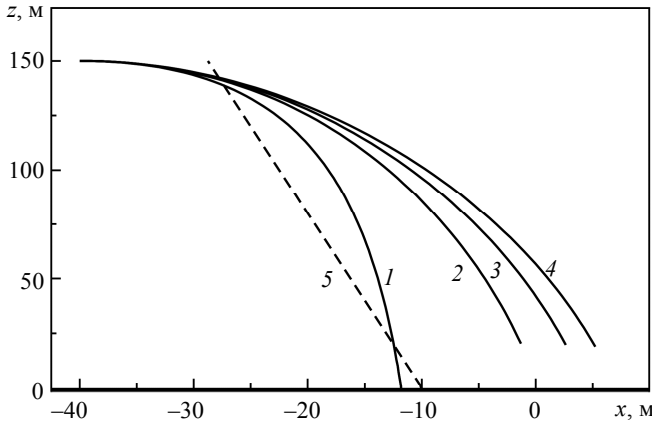


Рис. 3. Траектории капль: 1 –  $d_{s0} = 1$  мм, 2 –  $d_{s0} = 1.5$  мм, 3 –  $d_{s0} = 2$  мм, 4 –  $d_{s0} = 3$  мм, 5 – граница тепловой колонки

Fig. 3. Trajectories of the droplets:  $d_{s0} = (1)$  1, (2) 1.5, (3) 2, and (4) 3 mm; 5, a heat column boundary

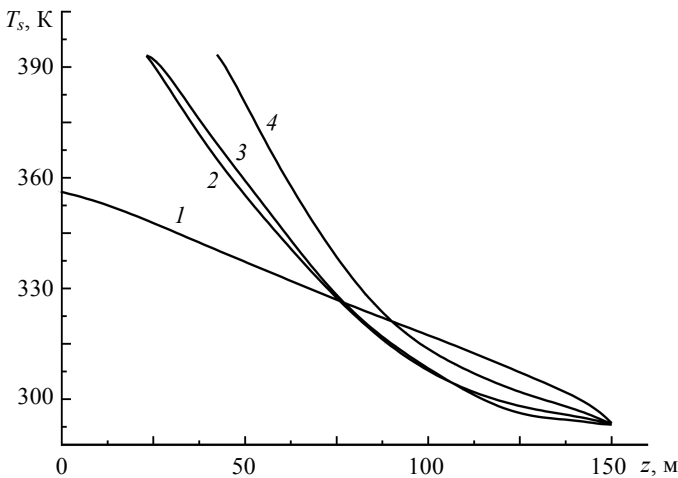


Рис. 4. Температура капль: 1 –  $d_{s0} = 1$  мм, 2 –  $d_{s0} = 1.5$  мм, 3 –  $d_{s0} = 2$  мм, 4 –  $d_{s0} = 3$  мм

Fig. 4. Temperature of the droplets:  $d_{s0} = (1)$  1, (2) 1.5, (3) 2, and (4) 3 mm

На рис. 5 представлены зависимости текущего диаметра капель от высоты, рассчитанные для различных начальных размеров капель. Как видно из рис. 5, можно выделить несколько этапов дробления капель. Сначала происходит разгон капель до скорости, соответствующей критическому значению числа Вебера. Затем следует серия дроблений капель по траектории их осаждения. После достижения гидродинамической устойчивости процессы дробления капель прекращаются. Таким образом, на высоте 70 м капли разных начальных фракций ( $d_{s0}$ ) достигают примерно одного размера.

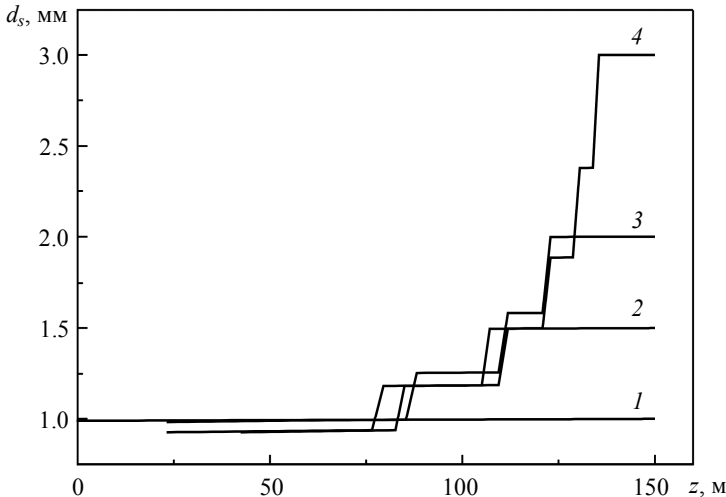


Рис. 5. Диаметр капель: 1 –  $d_{s0} = 1$  мм, 2 –  $d_{s0} = 1.5$  мм, 3 –  $d_{s0} = 2$  мм, 4 –  $d_{s0} = 3$  мм  
 Fig. 5. Diameter of the droplets:  $d_{s0} = (1)$  1, (2) 1.5, (3) 2, and (4) 3mm

### Выводы

- Представлена физико-математическая модель эволюции облака жидко-капельного аэрозоля при сбросе хладагента из водосливного устройства летательного аппарата. Модель включает уравнения движения и энергии полидисперсных капель при их гравитационном осаждении в атмосфере с учетом дробления капель по механизмам Рэля – Тейлора и Кельвина – Гельмгольца, нагрева и испарения капель, направления и скорости ветра.

- В качестве начальных данных задаются вертикальная координата образования первичного аэрозольного облака, начальная функция распределения капель по размерам, их начальная скорость и температура, параметры атмосферы, радиус очага пожара и средняя температура в зоне пожара. Для определения вертикальной координаты образования первичного аэрозольного облака предлагается использование экспериментальных данных, полученных на специальных установках, с последующим обобщением результатов в виде критериального уравнения, включающего числа Рейнольдса, Вебера, Бонда, Фруда и соответствующие симплексы.

- Приведены некоторые результаты расчетов траектории, температуры и размеров капель для типичных условий авиационного тушения пожара при отсутствии ветра.

• Разработанная модель может служить основой для выбора высоты и траектории сброса хладагента, обеспечивающих эффективное тушение пожара средствами авиации с учетом реальных метеорологических условий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Асовский В.П. Особенности тушения лесных пожаров вертолетами с использованием подвесных водосливных устройств // Научный вестник МГТУ ГА. Аэромеханика и прочность. 2009. № 138. С. 142–149.
2. Копылов Н.П., Карпов В.Н., Кузнецов А.Е., Федоткин Д.В., Хасанов И.Р., Сушкина Е.Ю. Особенности тушения лесных пожаров с применением авиации // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 59. С. 79–86. DOI 10.17223/19988621/59/8.
3. Кудров М.А. Динамика объема жидкости в газовом потоке с учетом деформации дробления и срыва капель // Научный вестник МГТУ ГА. Аэромеханика и прочность. 2010. № 151. С. 163–168.
4. Мешиков Е.Е., Орешков В.О., Ямбаев Г.М. Образование облака капель при разрушении водяного ядра в процессе свободного падения // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. № 15. С. 79–85.
5. Архипов В.А., Жарова И.К., Козлов Е.А., Ткаченко А.С. Прогнозирование экологических последствий распространения облака токсичных аэрозолей в районах падения отработанных ступеней ракет-носителей // Оптика атмосферы и океана. 2015. Т. 28. № 1. С. 89–93.
6. Arkhipov V.A., Kozlov E.A., Titov S.S., Tkachenko A.S., Usanina A.S., Zharova I.K. Evolution of a liquid-drop aerosol cloud in the atmosphere // Arabian Journal of Geosciences. 2016. No. 9. P. 114. DOI 10.1007/s12517-015-2161-4.
7. Алеханов Ю.В., Близицов М.В., Власов Ю.А. и др. Метод исследования взаимодействия диспергированной воды с пламенем // ФГВ. 2006. Т. 42. № 1. С. 57–64.
8. Volkov R.S., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Analysis of the effect exerted by the Initial temperature of atomized water on the integral characteristics of its evaporation during motion through the zone of “hot” gases // J. Engineering Physics and Thermophysics. 2014. V. 87. No. 2. P. 450–458.
9. Накоряков В.Е., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Деформация водяного снаряда при его свободном падении в воздухе // Докл. АН. 2016. Т. 467. № 5. С. 537–542. DOI: 10.7868/S0869565216110104.
10. Накоряков В.Е., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. О предельных поперечных размерах капельного облака при разрушении водяного массива в процессе падения с большой высоты // Докл. АН. 2017. Т. 475. № 2. С. 145–149. DOI: 10.7868/S0869565217020062
11. Архипов В.А., Басалаев С.А., Булавко А.Н., Золоторёв Н.Н., Перфильева К.Г., Поленчук С.Н. Установка для исследования динамики разрушения сферического макрообъема жидкости при свободном падении в воздухе // Патент на изобретение РФ № 2705965, опубл.: 12.11.2019. Бюл. № 32.
12. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
13. Архипов В.А., Матвиенко О.В., Трофимов В.Ф. Горение распыленного жидкого топлива в закрученном потоке // ФГВ. 2005. Т. 41. № 2. С. 26–37.
14. Ткаченко А.С., Маслов Е.А., Усанина А.С., Орлов С.Е. Программа расчета жидкокапельного аэрозольного облака // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016610567, опубл.: 20.02.2016.
15. Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
16. Бызова Н.Л., Гаргер Е.К., Иванов В.Н. Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси. Л.: Гидрометеоиздат, 1991. 280 с.
17. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1985.

18. Гебхарт Б., Джэйлуря Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло и массообмен. Т. 1. М.: Мир, 1991.
19. Grishin A.M. Mathematical modeling of forest fires and new methods of fighting them. Tomsk: Publishing House of the Tomsk State University, 1997. 390 p.

Статья поступила 13.11.2019 г.

Arkhipov V.A., Matvienko O.V., Zharova I.K., Maslov E.A., Perfilieva K.G., Bulavko A.M. (2019) MODELING OF THE DYNAMICS OF A LIQUID-DROPLET COOLANT UNDER AERIAL FIREFIGHTING *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 68–78

DOI 10.17223/19988621/62/6

Keywords: aerial firefighting, liquid-droplet cloud, gravitational deposition, high-temperature environment, seat of fire, fragmentation and evaporation of droplets, mathematical modeling.

A mathematical model of the evolution of liquid-droplet aerosol cloud during the coolant discharge from a helibucket into the seat of fire is presented. The analysis of the main stages of coolant discharge is carried out. In the process of gravitational deposition of droplet cloud, the following aspects are taken into account: the droplet fragmentation by the Rayleigh–Taylor and Kelvin–Helmholtz mechanisms; the evaporation in a temperature field of a convective column; and the effect of the wind on the trajectories of droplets. The temperature and velocity distributions along the convective column above the seat of fire are simulated using the Yu.A. Gostintsev model. The velocity of the droplets is calculated in accordance with a trajectory approach. The calculation of the droplet evaporation is carried out in the framework of diffusion model and reduced film model. The computational results on the characteristics of the cloud of droplets penetrating into the seat of fire under typical conditions of aerial firefighting with the use of helibucket are presented.

**Financial support:** This study was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 15-19-10014).

*Vladimir A. ARKHIPOV* (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

*Oleg V. MATVIENKO* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation). E-mail: matvolegv@mail.ru

*Irina K. ZHAROVA* (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zharova@niipmm.tsu.ru

*Evgeniy A. MASLOV* (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: maslov\_eugene@mail.ru

*Kseniya G. PERFIL'eva* (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

*Anton M. BULAVKO* (EMERCOM of Russia, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anbulavko@gmail.com

REFERENCES

1. Asovsky V.P. (2009) Osobennosti tusheniya lesnykh pozharov vertoletami s ispol'zovaniem podvesnykh vodoslivnykh ustroystv [Peculiarities of forest firefighting by helicopters with spillway devices on the external sling]. *Nauchnyy vestnik MGTU GA – Civil Aviation High Technologies*. 138. pp. 142–149.
2. Kopylov N.P., Karpov V.N., Kuznetsov A.E., Fedotkin D.V., Khasanov I.R., Sushkina E.Yu. (2019) Osobennosti tusheniya lesnykh pozharov s uchedom aviatsii [Peculiarities of the forest firefighting with the use of aircrafts]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 59. pp. 79–86. DOI: 10.17223/19988621/59/8.
3. Kudrov M.A. (2010) Dinamika ob"ema zhidkosti v gazovom potoke s uchedom deformatsii drobeniya i sryva kapel' [Dynamics of the fluid volume in the gas flow considering deformation, fragmentation and blowoff of drops]. *Nauchnyy vestnik MGTU GA – Civil Aviation High Technologies*. 151. pp. 163–168.
4. Meshkov E.E., Oreshkov V.O., Yambaev G.M. (2011) Obrazovanie oblakov kapel' pri razrushenii vodyanogo yadra v protsesse svobodnogo padeniya [Droplet cloud formation upon disintegration of free-falling water ball]. *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Technical Physics Letters*. 37(15). pp. 79–85. DOI: 10.1134/S1063785011080116.
5. Arkhipov V.A., Zharova I.K., Kozlov E.A., Tkachenko A.S. (2015) Prognozirovaniye ekologicheskikh posledstviy rasprostraneniya oblakov toksichnykh aerorozley [Prediction of ecological consequences of toxic aerosol clouds spreading in the fall areas of waste booster stages]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 28(1). pp. 89–93.
6. Arkhipov V.A., Kozlov E.A., Titov S.S., Tkachenko A.S., Usanina A.S., Zharova I.K. (2016) Evolution of a liquid-drop aerosol cloud in the atmosphere. *Arabian Journal of Geosciences*. 9(2). p. 114. DOI: 10.1007/s12517-015-2161-4.
7. Alekhanov Yu.V., Bliznetsov M.V., Vlasov Yu.A., Gerasimov S.I., Dudin V.I., Levushov A.E., Logvinov A.I., Lomtev S.A., Marmyshev V.V., Meshkov E.E., Semenov Yu.K., Tsykin S.V. (2006) Metod issledovaniya vzaimodeystviya dispergirovannoy vody s plamenem [Method for studying the interaction of dispersed water with flame]. *Fizika goreniya i vzryva – Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 42(1). pp. 57–64. DOI: 10.1007/s10573-006-0006-x.
8. Volkov R.S., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. (2014) Analysis of the effect exerted by the Initial temperature of atomized water on the integral characteristics of its evaporation during motion through the zone of “hot” gases. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 87(2). pp. 450–458. DOI: 10.1007/s10891-014-1031-3.
9. Nakoryakov V.E., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. (2016) Deformatsiya vodyanogo snaryada pri ego svobodnom padenii v vozdukhe [Deformation of a water projectile during its free fall in air]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Physics*. 467(5). pp. 537–542. DOI: 10.7868/S0869565216110104.
10. Nakoryakov V.E., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. (2017) O predel'nykh poperechnykh razmerakh kapel'nogo oblaka pri razrushenii vodyanogo massiva v protsesse padeniya s bol'shoy vysoty [Limited transverse sizes of a droplet cloud under disintegration of a water mass during its fall from a great height]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Physics*. 475(2). pp. 145–149. DOI: 10.7868/S0869565217020062.
11. Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Bulavko A.N., Zolotorev N.N., Perfilieva K.G., Polenchuk S.N. (2019) Ustanovka dlya issledovaniya dinamiki razrusheniya sfericheskogo makroob"ma zhidkosti pri svobodnom padenii v vozdukhe [Facility for studying the dynamics of the destruction of a spherical liquid macrovolume during its free fall in air]. RF Patent 2705965.
12. Nigmatulin R.I. (1991) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka.
13. Arkhipov V.A., Matvienko O.V., Trofimov V.F. (2005) Gorenije raspylennogo zhidkogo topliva v zakruchennom potoke [Combustion of sprayed liquid fuel in a swirling flow]. *Fizika goreniya i vzryva – Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 41(2). pp. 26–37. DOI: 10.1007/s10573-005-0016-0.

14. Tkachenko A.S., Maslov E.A., Usanina A.S., Orlov S.E. (2016) *Programma rascheta zhidkokapel'nogo aerazol'nogo oblaka* [Computational program for liquid-droplet aerosol cloud]. Certificate of state registration of computer programs 2016610567.
15. Berland M.E. (1975) *Sovremennye problemy atmosfery diffuzii i zagryazneniya atmosfery* [Modern problems of atmospheric diffusion and pollution]. Leningrad: Gidrometeoizdat.
16. Byzova N.L., Garger E.K., Ivanov V.N. (1991) *Eksperimental'nye issledovaniya atmosfery diffuzii i raschety rasseyaniya primesi* [Experimental studies of atmospheric diffusion and calculations of impurity scattering]. Leningrad: Gidrometeoizdat.
17. Berland M.E. (1985) *Prognoz i regulirovanie zagryazneniya atmosfery* [Prediction and regulation of atmospheric pollution]. Leningrad: Gidrometeoizdat.
18. Gebkhar B., Dzhayluriya Y., Makhadzhan R., Sammakiya B. (1991) *Svobodnokonvektivnye techeniya, teplo i massoobmen* [Free-convection currents, heat and mass transfer]. Part 1. Moscow: Mir.
19. Grishin A.M. (1997) *Mathematical Modeling of Forest Fires and New Methods of Fighting Them*. Tomsk: Publishing House of the Tomsk State University.

Received: November 13, 2019

УДК 533.69  
DOI 10.17223/19988621/62/7

Н.Н. Брагин, С.А. Орлов, С.В. Пейгин

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ КОМПОНОВКИ КРЫЛО – ФЮЗЕЛЯЖ ШИРОКОФЮЗЕЛЯЖНОГО ДАЛЬНЕМАГИСТРАЛЬНОГО САМОЛЕТА К ЕГО НАЧАЛЬНОЙ ФОРМЕ<sup>1</sup>

Приведены результаты исследования устойчивости алгоритма оптимального аэродинамического проектирования трехмерной компоновки крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета начальной форме. Показано, что алгоритм решения задачи определения геометрии, сочетающий высокоточное численное решение уравнений Навье – Стокса и глобальную оптимизацию поиска с распределенной параллельной реализацией, устойчив к выбору начальной формы крыла для двух сильно отличающихся вариантов задания начальной формы.

**Ключевые слова:** *оптимальная геометрия, уравнения Навье – Стокса, момент тангажа, коэффициент сопротивления, устойчивость процесса оптимизации.*

Одним из важнейших вопросов, возникающих при использовании алгоритма автоматического оптимального аэродинамического проектирования для решения практических задач по проектированию летательного аппарата является вопрос о том, насколько результат такого проектирования зависит от начальной формы оптимизируемой поверхности.

С практической точки зрения очень важно, чтобы алгоритм давал хорошие результаты не только в случае, когда начальная геометрия обладает приемлемыми аэродинамическими характеристиками, но и в случае, когда исходная форма в точках проектирования имеет высокий уровень полного сопротивления.

С математической точки зрения возникает вопрос об устойчивости алгоритма автоматического оптимального проектирования к начальной форме. Иными словами, если мы проведем две оптимизации с одинаковыми условиями и ограничениями, но для двух сильно отличающихся друг от друга начальных геометрий, то насколько будут отличаться друг от друга две полученные оптимальные геометрии? Для уединенного крыла такая задача рассматривалась в работе [1], в которой рассматривалось крыло, ранее исследованное в [2].

### 2. Постановка задачи

Каждый шаг оптимального проектирования летательного аппарата начинается с задания его начальной геометрической конфигурации. На первом таком шаге геометрическая модель поступает из начальной стадии проектирования вместе с заданными аэродинамическими характеристиками. В число этих характеристик входят условия полета (скорость и высота полета) и требуемые для устойчивого

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке прикладных научных исследований Министерства образования и науки РФ: уникальный идентификатор работ RFMEFI57617X0103.

полета значения коэффициента подъемной силы и момента тангажа, а также максимально допустимое значение сопротивления при заданных условиях полета. Эти параметры должны обеспечить выполнение основных требований к полету, таких как его дальность, полезная нагрузка, объем топливного бака и т.д.. Искомаемая геометрия ищется в классе аэродинамических форм, удовлетворяющих различным ограничениям, которые также определяются на начальной стадии проектирования. Традиционно геометрические ограничения относятся к максимальной относительной толщине базовых секционных профилей крыла, а ограничения, связанные с аэродинамическими характеристиками летательного аппарата, относятся к моменту тангажа конфигурации, коэффициенту подъемной силы при крейсерском полете и на режиме взлёта и т.д.

С математической точки зрения данная задача сводится к определению оптимальной формы летательного аппарата с компоновкой крыло – фюзеляж. Оптимальность этой формы понимается в том смысле, что значение коэффициента полного сопротивления данной компоновки является минимальным в заданных условиях аэродинамического проектирования и она одновременно удовлетворяет всем требуемым ограничениям геометрического и аэродинамического характера.

Математическая формулировка данной задачи оптимального аэродинамического дизайна может быть представлена следующим образом.

Одноточечная задача оптимального дизайна состоит в нахождении поверхности многосекционного пространственного крыла фиксированной формы в плане для летательного аппарата с компоновкой крыло – фюзеляж, которая отвечает следующим условиям:

- Значение коэффициента полного сопротивления всей компоновки  $C_X$  является минимальным.
  - Значение коэффициента подъемной силы  $C_Y$  всей компоновки равно заданному значению в точке аэродинамического дизайна.
  - Значение момента тангажа  $M_Z$  всей компоновки отвечает заданным условиям устойчивости полета летательного аппарата.
  - Значение относительной максимальной толщины каждой базовой секции крыла  $(t/c)_i$  не меньше заданного.
  - Значения локальных толщин каждой базовой секции крыла  $(y/l)_{ij}$  не меньше заданных.
  - Значение радиуса скругления передней кромки крыла  $(R_L)_i$  не меньше заданного.
  - Значения угла схода потока с задней кромки крыла  $(q_T)_i$  не меньше заданного.
- Здесь  $i$  – номер секций вдоль размаха крыла,  $i = 1, \dots, N_{ws}$ ,  $j$  – номер ограничения на локальную толщину в  $i$ -й секции,  $j = 1, \dots, N_{bs}(i)$ .

Многоточечная задача оптимального дизайна состоит в нахождении поверхности многосекционного пространственного крыла фиксированной формы в плане для летательного аппарата с компоновкой крыло – фюзеляж, которая отвечает следующим условиям [3]:

- Значение взвешенной комбинации коэффициентов полного сопротивления компоновки крыло – фюзеляж в нескольких точках проектирования является минимальным.
- Приведенные выше ограничения геометрического характера не зависят от условий дизайна и остаются неизменными.
- Ограничения аэродинамического характера задаются для каждой точки оптимизации по отдельности.



В нашем случае, поскольку для расчета целевой функции  $C_X$  необходимо учитывать эффекты вязко-невязкого взаимодействия, в качестве базовых уравнений используются осредненные по числу Рейнольдса уравнения Навье–Стокса, которые для вязкого сжимаемого газа можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{q}_t + \operatorname{div} \mathbf{C} = \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (1)$$

Здесь тензор  $\mathbf{C} = (\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})$  относится к конвективным членам уравнения, вязкий тензор  $\mathbf{V} = (\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$  содержит члены, связанные с эффектами молекулярного переноса,  $\mathbf{q} = \rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T$ ,  $\rho$  – плотность,  $(u, v, w)$  – вектор скорости,  $E$  – энергия,  $t$  – время,  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$  – невязкие (конвективные) потоки, и  $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$  – вязкие потоки.

Потоки невязкого характера имеют следующие компоненты:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = u\mathbf{q} + p(0, 1, 0, 0, u)^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = v\mathbf{q} + p(0, 0, 1, 0, v)^T,$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = w\mathbf{q} + p(0, 0, 0, 1, w)^T.$$

Вязкие потоки имеют следующие компоненты:

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \mu(0, \tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}, \bar{b}_1)^T,$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{q}) = \mu(0, \tau_{12}, \tau_{22}, \tau_{32}, \bar{b}_2)^T,$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{q}) = \mu(0, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{33}, \bar{b}_3)^T,$$

где составляющие тензора вязких напряжений задаются следующим образом:

$$\tau_{21} = \tau_{12} = u_y + v_x,$$

$$\tau_{31} = \tau_{13} = u_z + w_x,$$

$$\tau_{22} = (4/3)v_y - (2/3)u_x - (2/3)w_z,$$

$$\tau_{32} = \tau_{23} = u_z + w_y,$$

$$\tau_{33} = (4/3)w_z - (2/3)u_x - (2/3)v_y,$$

$$\bar{b}_1 = u\tau_{11} + v\tau_{12} + w\tau_{13} + (c^2)_x / ((\gamma - 1)\operatorname{Pr}),$$

$$\bar{b}_2 = u\tau_{21} + v\tau_{22} + w\tau_{23} + (c^2)_y / ((\gamma - 1)\operatorname{Pr}),$$

$$\bar{b}_3 = u\tau_{31} + v\tau_{32} + w\tau_{33} + (c^2)_z / ((\gamma - 1)\operatorname{Pr}).$$

В этих уравнениях  $\mu$  – вязкость,  $\gamma$  – отношение теплоемкостей газа,  $\operatorname{Pr}$  – число Прандтля,  $p = (\gamma - 1)[E - 0.5\rho(u^2 + v^2 + w^2)]$ ,  $c^2 = \gamma p / \rho$ ,  $H = (E + p) / \rho$ .

Вычисление коэффициента сопротивления для реальных форм самолетов до сих пор является достаточно сложной задачей. Значение коэффициента сопротивления на два порядка ниже остальных аэродинамических характеристик летательного аппарата и поэтому должен быть найдено с точностью порядка  $10^{-4} - 10^{-5}$ . В данной работе для численного решения задачи используется пакет OPTIMENGA\_AERO [3], который обеспечивает выполнение этого требования. В нем используется метод полных уравнений Навье – Стокса вязкой сжимаемой жидкости (1), основанный на аппроксимации конвективного оператора при помощи схемы высокого порядка точности ENO, а вязкие члены аппроксимируются центральными разностями. Для увеличения скорости итерационной сходимости

применяется многосеточный алгоритм. При этом на грубой сетке конвективный оператор аппроксимируется при помощи схемы первого порядка, а схема высокого порядка ENO только на самой мелкой сетке [3–5]. Для решения задачи оптимизации используется эвристический (генетический) алгоритм [6–9]. Генетические алгоритмы, как и любые другие прямые методы оптимизации, требуют чрезвычайно большого количества расчетов целевой функции, что делает невозможным задачи, если при каждом вычислении целевой функции решать систему уравнений Навье – Стокса. Поэтому в [3] используется следующий итерационный процесс. На каждой итерации в окрестности текущего наилучшего решения строится база данных из решений системы уравнений Навье – Стокса, а при поиске следующего приближения к оптимальному решению в качестве целевой функции используется аппроксимация по этой базе данных. При учете ограничений на оптимальное решение используется метод [10].

### 3. Результаты численных решений

При решении поставленной выше задачи оптимального аэродинамического дизайна, трехмерное крыло имело постоянную форму в плане и определялось пятью базовыми секциями по размаху крыла, которые описаны в [2], где рассматривалась оптимизация изолированного крыла, и [3], где рассматривалась устойчивость оптимизации изолированного крыла к начальным данным.

Трехточечная оптимизация проводилась в следующих точках проектирования:

- $M = 0.86$ ,  $C_Y = 0.55$  (с весом 0.75),
- $M = 0.87$ ,  $C_Y = 0.55$  (с весом 0.2),
- $M = 0.2$ ,  $C_Y = 1.0$  (с весом 0.05).

Были рассмотрены 2 варианта задания начальных форм крыла. В 1-м варианте секционные профили совпадали с исходной геометрией широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета. Все эти профили имели суперкритический характер, что и требуется для полета при высоких трансзвуковых числах Маха.

Во втором варианте начальная геометрия была намеренно выбрана абсолютно непригодной с аэродинамической точки зрения.

В частности, вместо суперкритического профиля на 1-й промежуточной секции крыла был поставлен симметричный профиль, в котором верхняя поверхность совпадала с верхней поверхностью исходного суперкритического профиля. Дополнительно полученный симметричный профиль был откалиброван, чтобы он отвечал всем требуемым ограничениям: имел максимальную относительную толщину 11.1 % и относительную толщину 8.9 % (при  $X/C = 0.16$ ) и 7.7 % (при  $X/C = 0.65$ ).

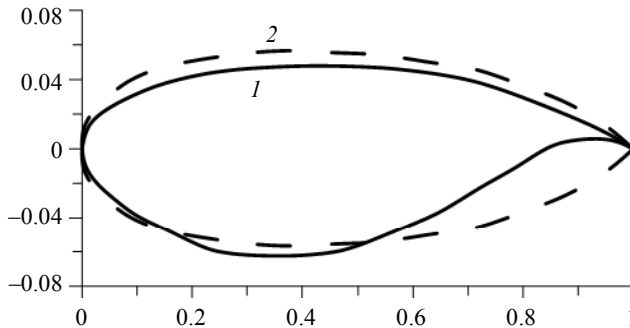
Сравнение данных начальных профилей для двух вариантов оптимизации представлено на рис. 1

Анализ распределения давления на поверхности в основной точке проектирования при  $M = 0.86$ ,  $C_Y = 0.55$  подтвердил предположение, что симметричный профиль в середине крыла абсолютно непригоден для данных условий обтекания.

Все это говорит о том, что с аэродинамической и геометрической точек зрения 2-й вариант начальной геометрии крыла находится очень далеко от оптимального решения.

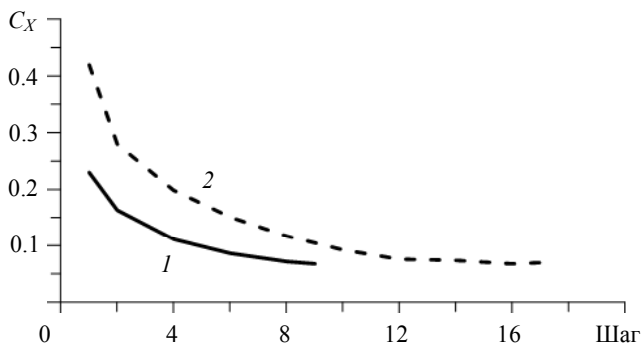
Перейдем теперь к сравнениям результатов этих двух трехточечных оптимизаций. Для получения оптимального решения для 1-го варианта задания начальной формы потребовалось 9 шагов оптимизационного алгоритма, в то время как

для достижения сходимости для 2-го варианта было необходимо 17 шагов. Соответствующая картина сходимости оптимизационного процесса приведена на рис. 2. В отличие от работы [1] для сходимости требуется несколько большее количество итераций, что объясняется наличием фюзеляжа.



**Рис. 1.** Сравнения начальных профилей в 1-й промежуточной секции крыла для конфигурации крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

**Fig. 1.** Comparison of the initial profiles in the first crank section of the wing of wing-fuselage configuration for a wide-body long-range aircraft (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)

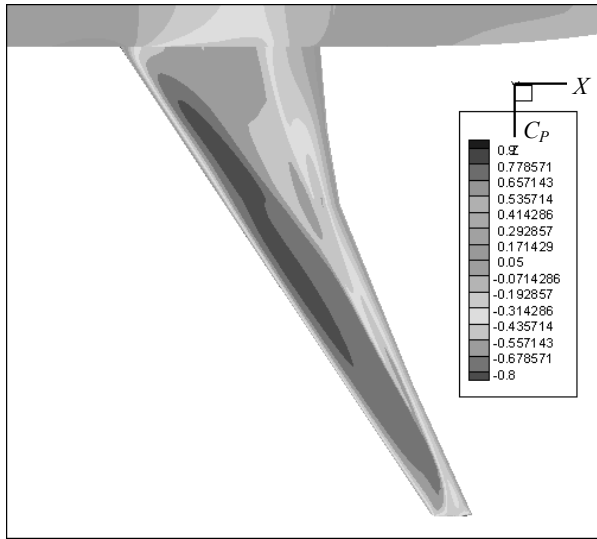


**Рис. 2.** История сходимости оптимизационного процесса. Зависимость коэффициента сопротивления от номера оптимизационного шага (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

**Fig. 2.** The history of optimization convergence. Drag coefficient as a function of optimization step number (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)

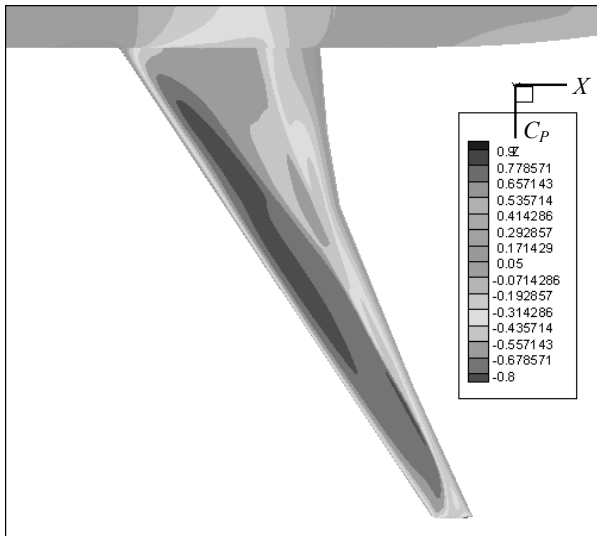
Результаты этих двух оптимальных аэродинамических проектирований оказались очень близкими и в широком диапазоне условий полета практически идентичными. В частности, в основной точке проектирования  $M = 0.86$ ,  $C_Y = 0.55$  сопротивление оптимального крыла для 1-го варианта составило 272.6 аэродинамических каунта против 273.0 для 2-го варианта.

Соответствующие распределения давления на поверхности оптимальных конфигураций (рис. 3 для 1-го варианта задания начальной геометрии и рис. 4 для 2-го варианта задания начальной геометрии) и секционные распределения давления (рис. 5, 6) оказались очень близки.



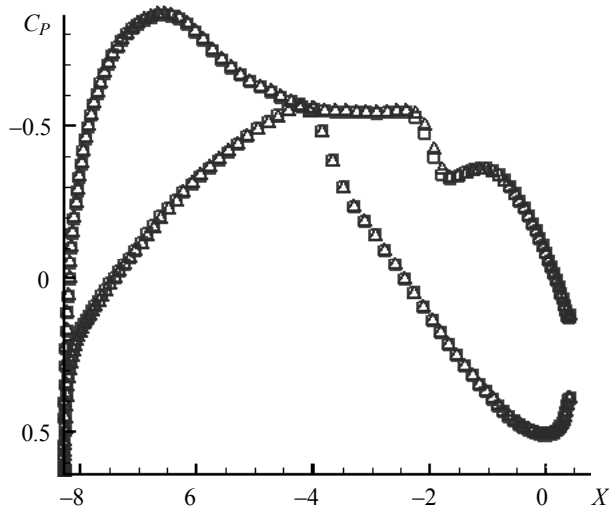
**Рис. 3.** Распределения коэффициента давления  $C_p$  на верхней поверхности оптимального крыла при  $M = 0.86$ ,  $C_Y = 0.55$

**Fig. 3.** Distribution of the pressure  $C_p$  on the upper surface of the optimal wing at  $M = 0.86$  and  $C_Y = 0.55$



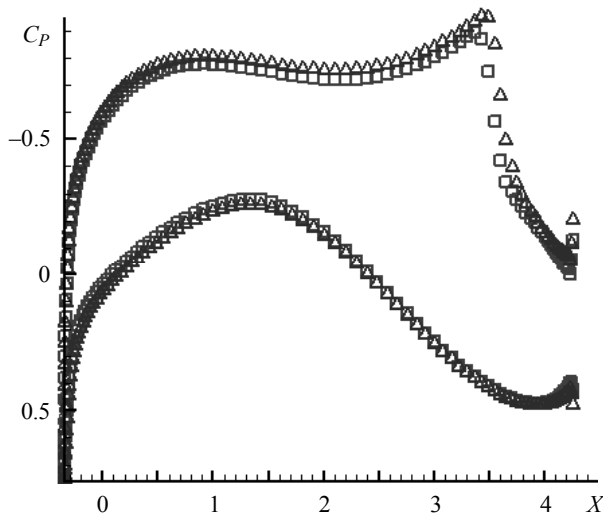
**Рис. 4.** Р Распределения коэффициента давления  $C_p$  на верхней поверхности оптимального крыла для 2-го варианта начальной геометрии при  $M = 0.86$ ,  $C_Y = 0.55$

**Fig. 4.** Distribution of the pressure  $C_p$  on the upper surface of the optimal wing for the second option of the initial geometry at  $M = 0.86$  and  $C_Y = 0.55$



**Рис. 5.** Сравнение секционных распределений коэффициента давления  $C_p$  поперек оптимального крыла в точке  $M=0.86$ ,  $C_Y=0.55$  при  $Z=8.0$  м (квадратные маркеры – первый вариант, треугольные маркеры – второй вариант)

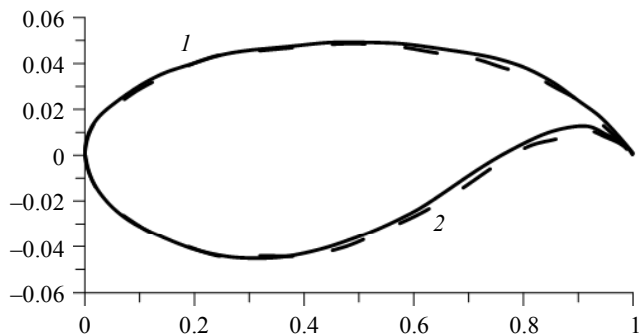
**Fig. 5.** Comparison of the distributions of pressure  $C_p$  along the optimal wing cross section for  $M=0.86$ ,  $C_Y=0.55$  at  $Z=8.0$  m (the squares denote the first option; the triangles, the second option)



**Рис. 6.** Сравнение секционных распределений коэффициента давления  $C_p$  поперек оптимального крыла в точке  $M=0.87$ ,  $C_Y=0.55$  при  $Z=20.0$  м (квадратные маркеры – первый вариант, треугольные маркеры – второй вариант)

**Fig. 6.** Comparison of the distributions of pressure  $C_p$  along the optimal wing cross section for  $M=0.87$ ,  $C_Y=0.55$  at  $Z=20.0$  m (the squares denote the first option; the triangles, the second option)

Об этом же говорят и сравнения оптимальных профилей для оптимизированных секций крыла (рис. 7).

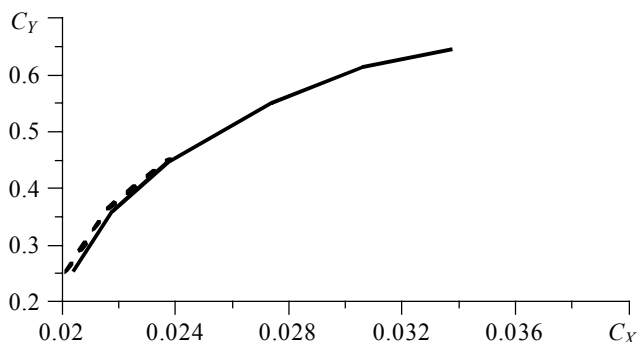


**Рис. 7.** Сравнения форм сечений оптимальных крыльев широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета для двух вариантов задания начальной геометрии (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

**Fig. 7.** Comparison of the cross section shapes of the optimal wings of a wing-body configuration for a wide-body long-range aircraft for two options of initial geometry specification (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)

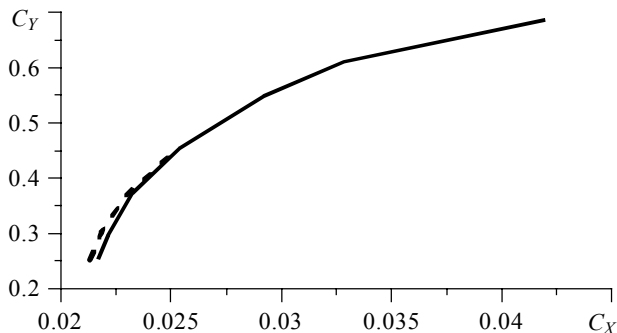
В заключение приведем данные по сравнению интегральных характеристик оптимальных геометрий, полученных для двух вариантов задания начальной формы.

На рис. 8 – 10 приведены сравнения соответствующих оптимальных поляр сопротивления.



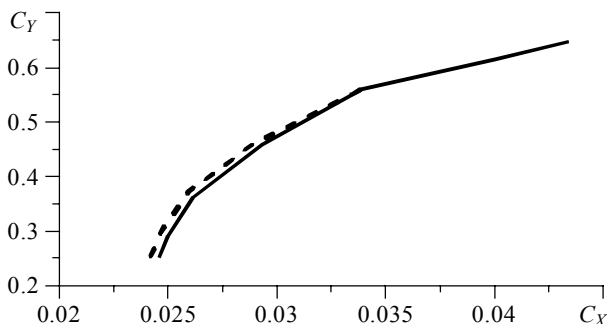
**Рис. 8.** Сравнение поляр сопротивления для оптимальных конфигураций крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета для двух вариантов начальной геометрии при  $M = 0.86$  (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

**Fig. 8.** Comparison of the drag polar for optimal wing-body configurations of the wide-body long-range aircraft for two options of the initial geometry at  $M = 0.86$  (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)



**Рис. 9.** Сравнение поляр сопротивления для оптимальных конфигураций крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета для двух вариантов начальной геометрии при  $M = 0.87$  (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

**Fig. 9.** Comparison of the drag polar for optimal wing-body configurations of the wide-body long-range aircraft for two options of the initial geometry at  $M = 0.87$  (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)



**Рис. 10.** Сравнение поляр сопротивления для оптимальных конфигураций крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета для двух вариантов начальной геометрии при  $M = 0.88$  (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

**Fig. 10.** Comparison of the drag polar for optimal wing-body configurations of the wide-body long-range aircraft for two options of the initial geometry at  $M = 0.88$  (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)

#### 4. Заключение

Анализ полученных аэродинамических характеристик оптимальных конфигураций крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета для двух вариантов задания начальной формы крыла показывает, что используемый алгоритм является устойчивым к заданию начальной формы, поскольку:

- оптимальные конфигурации обладают практически одним и тем же полным сопротивлением в основной точке проектирования  $C_Y = 0.55$ ,  $M = 0.86$  и в ее окрестности по числу Маха и углу атаки;

- формы оптимальных крыльев очень блики друг к другу;  
- оптимальные геометрии обладают очень близкими (практически идентичными) интегральными аэродинамическими характеристиками в широком диапазоне изменения условий полета.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Peigin, S.V., Timchenko, S.V., Epstein, B.S. The Stability of the Optimal Aerodynamic Design of an Isolated Three-Dimensional Wing to Its Initial Form // Technical Physics. 2018. V. 63(12). P. 1736–1742
2. Пейгин С.В., Пуцин Н.А., Болсуновский А.Л., Тимченко С.В. Оптимальное аэродинамическое проектирование крыла широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 117–129.
3. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO // Source of the Document 52nd AIAA Aerospace Sciences Meeting AIAA Science and Technology Forum and Exposition, SciTech 2014. DOI: 10.2514/6.2014-0569.
4. Epstein B, Averbuch A. and Yavneh I. An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows // Journal of Computational Physics. 2001. V. 168. P. 316–328. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.
5. Epstein B, Peigin S.V. Implementation of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier-Stokes Computations // International Journal of CFD. V. 18. No. 3. 2004. DOI: 10.1080/1061-8560310001621243.
6. Пейгин С.В., Periaux J., Тимченко С.В. Применение генетических алгоритмов для оптимизации формы тела по тепловому потоку // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 9. С. 111–122.
7. Казаков В.Ю., Пейгин С.В., Тимченко С.В. Оптимизация траектории входа в атмосферу земли по интегральному тепловому потоку // ЖПМТФ. 2000. Т. 41. No. 4. P. 112–121.
8. Michalewicz Z. Genetic algorithms + data structures = evolution programs. New York: Springer-Verlag, 1992. Artificial Intelligence. DOI: 10.1007/978-3-662-02830-8.
9. Тимченко С.В. Параллельный генетический алгоритм для решения задач многокритериальной оптимизации // Ползуновский вестник. 2012. № 2/1. С. 103–107.
10. Орлов С.А., Пейгин С.В., Степанов К.А. Тимченко С.В. Эффективная реализация нелинейных ограничений при оптимизации трехмерных трансзвуковых крыльев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1. С. 72–81. DOI: 10.17223/19988621/33/7.

Статья поступила 26.04.2019 г.

Bragin N.N., Orlov S.A., Peygin, S.V. (2019) INVESTIGATION OF THE STABILITY OF OPTIMAL AERODYNAMIC DESIGNING OF THE THREE-DIMENSIONAL WING-FUSELAGE LAYOUT FOR A WIDE-BODY LONG-RANGE AIRCRAFT WITH REGARD TO ITS INITIAL SHAPE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 79–90

DOI 10.17223/19988621/62/7

Keywords: optimal geometry, the Navier-Stokes equations, pitch moment, drag coefficient, stability of optimization.

In this paper, the results of investigation of the algorithm stability for optimal three-dimensional designing of a wing-fuselage configuration for a wide-body long-range aircraft with regard to its initial shape are presented. The solution to the problem of determining the geometry, which has a minimum value of the total drag coefficient under given geometric and aerodynamic constraints of various types, is obtained using the algorithm based on the combination of the



methods of highly accurate numerical solution to the Navier-Stokes equations and the methods of global search optimization with the use of distributed parallel technologies. The multipoint problem of optimal designing consists in the determination of the surface of a multi-sectional spatial wing of aircraft. In the aircraft plan, the wing shape is uniform. The optimal wing satisfies the following condition: the value of a weighted combination of drag coefficients for the wing-fuselage layout is minimal at several points of engineering design. The geometric constraints on the wing are independent of the designing conditions and remain unchanged. The aerodynamic constraints on the wing are imposed for each optimization point separately. It was shown that the algorithm is resistant to the choice of the initial shape of the wing, since the optimal geometries obtained for two very different options for initial shape assignment are very close to each other and have almost identical integral aerodynamic characteristics in the cruise flight mode and also in a wide range of this mode.

**Financial support:** This work was financially supported by applied research of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation: a unique identifier – RFMEFI57617X0103.

*Nikolay N. BRAGIN* (Central Aerohydrodynamic Institute, Moscow, Russian Federation).

*Sergey A. ORLOV* (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orlov@ftf.tsu.ru

*Sergey V. PEYGIN* (Doctor of Physics and Mathematics, OPTIMENGA-777 Ltd., Moscow, Russian Federation).

#### REFERENCES

1. Peigin S.V., Timchenko S.V., Epstein B.S. (2018) The stability of the optimal aerodynamic design of an isolated three-dimensional wing to its initial form. *Technical Physics*. 63(12). pp. 17361742. DOI: 10.1134/S1063784218120149.
2. Peygin S.V., Pushchin N.A., Bolsunovskiy A.L., Timchenko S.V. (2018) Optimal'noe aerodynamicheskoe proektirovanie kryla shirokofyuzelyazhnogo dalnemagistral'nogo samoleta [An optimal aerodynamic design for the wing of a wide-body long-range aircraft]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 117–129. DOI: 10.17223/19988621/51/10.
3. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. (2014) Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. DOI: 10.2514/6.2014-0569.
4. Epstein B., Averbuch A., Yavneh I. (2001) An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows. *Journal of Computational Physics*. 168(2). pp. 316–338. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.
5. Epstein B., Peigin S.V. (2004) Application of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier-Stokes Computations. *International Journal of CFD*. 18(3). pp. 289–293. DOI: 10.1080/1061-8560310001621243.
6. Peygin S.V., Periaux J., Timchenko S.V. (1998) Primenenie geneticheskikh algoritmov dlya optimizatsii formy tela po teplovomu potoku [Application of genetic algorithms in a body shape optimization in terms of a heat flux]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 10(9). pp. 111–122.
7. Kazakov V.Yu., Peygin S.V., Timchenko S.V. (2000) Optimizatsiya traektorii vkhoda v atmosferu zemli po integral'nomu teplovomu potoku [Optimization of the trajectory of the earth atmosphere entry according to the integral heat flux]. *Zhurnal prikladnoy matematiki i tekhnicheskoy fiziki – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 41(4). pp. 112–121.
8. Michalewicz Z. (1992) *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*. New York: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-3-662-02830-8.

9. Timchenko S.V. (2012) Parallelnyy geneticheskiy algoritm dlya resheniya zadach mnogokriterial'noy optimizatsii [A parallel genetic algorithm for solving multicriterion optimization problems]. *Polzunovskiy vestnik*. 2(1). pp. 103–107.
10. Orlov S.A., Peygin S.V., Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2015) Effektivnaya realizatsiya nelineynykh ogranicheniy pri optimizatsii trekhmernykh transzvukovykh kryl'ev [Effective implementation of nonlinear constraints in optimization of three-dimensional transonic wings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 33(1). pp. 72–81. DOI: 10.17223/19988621/33/7.

Received: April 24, 2019

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/62/8

А.М. Ильясов, Т.Ф. Киреев, Г.Т. Булгакова

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ  
ВОДОИЗОЛИРУЮЩИХ ЭКРАНОВ  
В ТРЕЩИНОВАТЫХ ПЛАСТАХ<sup>1</sup>**

В рамках модели идеально-пластического тела анализируется прочность двухслойного водоизолирующего экрана, примыкающего к стволу добывающей скважины в трещиноватом водонасыщенном пласте. Экран создается в результате закачки с последующим затвердеванием синтетической смолы в трещиновато-пористый пласт через добывающую скважину. Найдены области прочности и текучести внешнего и внутреннего слоев экрана в пространстве параметров задачи.

**Ключевые слова:** водоизолирующий экран, трещиновато-пористая среда, дифференциальный метод самосогласования, идеально-пластическое тело.

Большинство добывающих скважин на поздних стадиях разработки нефтенасыщенных пластов обводняются из-за прорыва нагнетаемой воды по высокопроницаемым пропласткам или вследствие фильтрации воды из ближайших водонасыщенных интервалов пласта по заколонному пространству скважины из-за разрушения цементного кольца между породой и эксплуатационной колонной.

Для водоизоляции обводненных интервалов пласта в нефтедобывающей промышленности применяются цементные растворы, сшивающиеся водные растворы полимеров или синтетические смолы.

Преимущество смол и водных растворов полимеров перед цементными растворами состоит в том, что они проникают в пласт на некоторую глубину. Дисперсные частицы цементного раствора не могут проникнуть в трещиновато-пористую породу, поскольку их характерный размер превышает характерный размер пор и трещин.

В свою очередь, водонепроницаемые барьеры, образованные водными растворами полимеров, имеют меньший порог прочности (устойчивости) в пористой среде по сравнению с барьерами, образованными отвердевшими смолами вследствие неустойчивости Сэфмана – Тейлора – прорыва «невязких пальцев» [1].

Для водоизоляции добывающих скважин в основном используются синтетические смолы трех типов: карбамидоформальдегидные, ацетонформальдегидные и фенолформальдегидные. В данной работе предложена модель для прогноза прочности двухслойного цилиндрического барьера, образованного синтетической смолой в трещиновато-пористом пласте. Построены диаграммы прочности в зависимости от объема водоизолирующего материала, забойного давления, геомеханических свойств пласта и упругих свойств водоизолирующего материала.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-41-020226 p\_a).

## 1. Постановка задачи

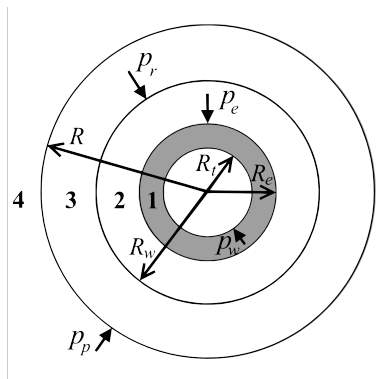
Для «отключения» обводненных пропластков пласта толщиной  $h$  проводится операция их водоизоляции путем закачки водоизолирующего материала в рассматриваемый интервал трещиновато-пористого пласта остановленной добывающей скважины. После затвердевания водоизолирующего материала проводится тест на герметичность эксплуатационной колонны в интервале водоизоляции – опрессовка колонны. Если герметичность скважины нарушена, то операция водоизоляции повторяется до полной герметичности эксплуатационной колонны. После водоизоляции добывающая скважина вновь вводится в эксплуатацию.

В большинстве случаев цементное кольцо между эксплуатационной колонной и породой бывает полностью разрушено (несвязно) из-за высоких депрессий при добыче углеводородной жидкости. Иногда остатки цементного камня удаляются фрезерованием. Поэтому можно принять схему, что водоизолирующий барьер представляет собой двухслойный цилиндр (рис. 1), состоящий из внутреннего слоя, примыкающего к внешней стенке эксплуатационной колонны и определяемого свойствами отвердевшей смолы, а также из внешнего слоя породы/смола, примыкающего к внутреннему слою. Если будет разрушаться внутренний слой барьера, то скважина может обводниться из вышележащих или нижележащих водоносных пропластков. Если же разрушается внешний слой барьера, то водоизоляция данного интервала пласта может быть охарактеризована как технологически неуспешная операция.

Оптимальной является ситуация, когда оба слоя барьера остаются неразрушенными после введения добывающей скважины в эксплуатацию.

Таким образом, при заданных параметрах материалов водоизолирующих барьеров необходимо определить режимы работы добывающей скважины, при которых не происходит разрушения слоев барьера.

## 2. Определение давлений на внутренних границах слоев водоизолирующего экрана



**Рис. 1.** Схема водоизолирующего барьера в плане: 1 – эксплуатационная колонна, 2 – отвердевшая смола, 3 – трещиноватая порода/смола, 4 – порода

**Fig. 1.** Plan view of a water shut-off baffle: 1, production casing; 2, cured resin; 3, fractured rock/resin; and 4, rock

При моделировании прочности водоизолирующих барьеров пренебрегается температурными напряжениями.

На рис. 1 и везде далее параметры эксплуатационной колонны обозначены нижним индексом 1; параметры внутреннего слоя водоизолирующего барьера (слой смолы) – нижним индексом 2; параметры внешнего слоя трещиноватая порода/смола – нижним индексом 3; параметры, относящиеся к породе в интервале водоизоляции, обозначены нижним индексом 4.

Кроме того, введены следующие обозначения:  $R_i$  – внутренний радиус эксплуатационной колонны;  $R_e$  – внешний радиус эксплуатационной колонны;  $R_w$  – внешний радиус внутреннего слоя водоизолирующего барьера (слой смолы);  $R$  – внешний радиус внешнего слоя породы/смола.

Также введены обозначения рабочих параметров скважины после ее ввода в эксплуатацию после водоизоляции:  $p_w$  – давление внутри эксплуатационной колонны;  $p_e$  – давление на внешней стенке эксплуатационной колонны (внутренней стенке внутреннего слоя барьера);  $p_r$  – давление на внешней границе внутреннего слоя барьера (на внутренней границе внешнего слоя барьера);  $p_p$  – давление на внешней границе внешнего слоя барьера.

Введем осредненную плотность, а также осредненные технические константы вышележащих пород – коэффициент Пуассона и модуль Юнга:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{H} \int_0^H \rho(z) dz, \quad \langle v \rangle = \frac{1}{H} \int_0^H v(z) dz, \quad \langle E \rangle = \frac{1}{H} \int_0^H E(z) dz, \quad (2.1)$$

где  $H$  – глубина залегания середины рассматриваемого водоизолирующего интервала пласта.

Выше было сказано, что при обводнении скважины контакт между породой и цементным кольцом не является идеальным и заколонное пространство в интервале водоизоляции заполнено пластовой водой, которая действует на породу с давлением  $p_{r0}$ .

В работе [2] получено решение для упругого трансверсально-изотропного полупространства с цилиндрической полостью радиуса  $R_w$  с учетом объемных сил и давлением  $p_{r0}$  внутри полости. Для изотропного полупространства решение упрощается. В этом случае давление на произвольном расстоянии от центра скважины ( $r > R_w$ )

$$p_{p0} = \frac{\langle v \rangle}{1 - \langle v \rangle} \langle \rho \rangle gH \left( 1 - \frac{R_w^2}{r^2} \right) + p_{r0} \frac{R_w^2}{r^2}, \quad (2.2)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести.

Поскольку пропласток в интервале водоизоляции насыщен водой, то к решению (2.2) нужно добавить нормальное напряжение в жидкой фазе. В этом случае давление на внешней границе внешнего слоя будет

$$p_{p0} = \frac{\langle v \rangle}{1 - \langle v \rangle} \langle \rho \rangle gH \left( 1 - \frac{R_w^2}{r^2} \right) + p_{r0} \frac{R_w^2}{r^2} + \alpha p, \quad (2.3)$$

где  $p$  – поровое давление в водоизолируемом интервале пласта;  $\alpha = K_4/K_{4m}$  – постоянная Био, где  $K_4$  и  $K_{4m}$  соответственно объемные модули водонасыщенного скелета породы и материала зерен скелета породы в интервале водоизоляции пласта.

Отметим, что решение (2.2) основано на гипотезе Динника [3] об отсутствии горизонтальных перемещений (деформаций). Кроме того, решение (2.2) не учитывает релаксацию [4] горизонтальных главных напряжений к вертикальному главному напряжению (гидростатическому напряженному состоянию) вследствие перехода материала пород в пластическое состояние (частный случай гипотезы Динника при  $\langle v \rangle = 0.5$ ), а также наличие в горных массивах тектонических напряжений. В последнем случае гипотеза Динника не выполняется. Тектонические напряжения могут приводить к кратному преобладанию горизонтальных напряжений над вертикальным напряжением. Для учета всех этих явлений в формуле (2.3) нужно выполнить замену  $\langle v \rangle / (1 - \langle v \rangle) \rightarrow \beta$ , где  $\beta$  принадлежит отрезку  $(0, \beta^*]$ ,  $\beta^* = 6 - 7$ .

Заметим, что предложенную в данной работе модель прогноза прочности водоизолирующего экрана можно применить как к трещиноватым, так и к трещиновато-пористым пластам. Поскольку в трещиновато-пористых средах проницаемость пористых блоков на несколько порядков меньше проницаемости системы трещин [5], то можно считать что, как и в случае чисто трещиноватых пластов, при закачке синтетическая смола фильтруется в основном в трещины. При этом коэффициент трещиноватости породы может составлять доли процента от ее коэффициента пористости. Смолы для водоизоляции пропластков закачивают в небольших объемах порядка  $V = 1 - 3 \text{ м}^3$ . Радиус внешней границы барьера можно оценить по формуле  $R = \sqrt{R_e^2 + V / \pi m h}$ , где  $m$  – коэффициент трещиноватости среды, а  $h$  – толщина обводненного пропластка. Полагая  $R_e = 0.073 \text{ м}$ ,  $R_w = 0.108 \text{ м}$ ,  $h = 10 \text{ м}$ ,  $m = (0.001 - 0.1)$ , получим следующую оценку:  $R = (0.568 - 9.772) \text{ м}$ . Следовательно, в породу смола проникает на расстояние порядка  $l = R - R_w = 0.46 - 9.664 \text{ м}$ .

Оценим относительные погрешности изменения упругих модулей породы  $\Delta_v$  и  $\Delta_E$ , а также ее плотности  $\Delta_p$  на расстоянии порядка  $l$  после водоизоляции. Согласно формулам (2.1), справедливы оценки

$$\Delta_v \sim \frac{h}{H} \frac{|\langle v \rangle - v_3|}{\langle v \rangle}, \quad \Delta_E \sim \frac{h}{H} \frac{|\langle E \rangle - E_3|}{\langle E \rangle}, \quad \Delta_p \sim \frac{h}{H} \frac{|\langle \rho \rangle - \rho_3|}{\langle \rho \rangle}. \quad (2.4)$$

Оценим относительное изменение давления  $p_p$  на внешней границе водоизолирующего барьера введенной в эксплуатацию добывающей скважины после ее водоизоляции по сравнению с давлением на внешней границе водоизолирующего барьера при остановленной скважине. Предварительно заметим, что поскольку изолируется только часть заколонного пространства протяженностью  $h$ , а остальная часть заколонного пространства протяженностью  $H - h$  заполнена пластовой водой из-за разрушения цементного камня, то давление в заколонном пространстве  $p_{r0}$  до водоизоляции отличается от давления в заколонном пространстве  $p_r$  после водоизоляции (но до введения скважины в эксплуатацию) с относительной погрешностью

$$\Delta_r = h / H. \quad (2.5)$$

Следовательно, согласно решению (2.3) с такой же погрешностью отличается давление на внешней границе водоизолирующего барьера до и после водоизоляции (но до введения скважины в эксплуатацию). С учетом этого замечания и предыдущей оценки из формулы (2.3) при  $r = R$  следует оценка

$$\Delta p_p = \frac{(p_{p0} - p_p)}{p_{p0}} = \frac{(p_{r0} - p_r) \frac{R_w^2}{R^2}}{\beta \langle \rho \rangle g H \left( 1 - \frac{R_w^2}{R^2} \right) + p_{r0} \frac{R_w^2}{R^2} + \alpha p}. \quad (2.6)$$

Для характерных параметров:

$$\begin{aligned} E_4 = \langle E \rangle &= 60 \text{ ГПа}, E_2 = 5 \text{ ГПа}, v_4 = \langle v \rangle = 0.25, \beta = 1/3, \\ v_2 &= 0.35, h = 10 \text{ м}, H = 2000 \text{ м}, \rho_4 = \langle \rho \rangle = 2500 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_2 &= 1250 \text{ кг/м}^3, R_w = 0.108 \text{ м}, R = 0.5 \text{ м}, p_{r0} = p = 200 \text{ атм}, \\ p_r &= 100 \text{ атм}, \alpha = 0.85, m = 0.01 \end{aligned}$$

с использованием правила смесей  $\varphi_3 = m\varphi_2 + (1-m)\varphi_4$ , где  $\varphi$  – упругие модули или плотность, из соотношений (2.4) – (2.6) следуют оценки относительных погрешностей осредненных упругих модулей и относительной погрешности  $\Delta p_p$  давления на внешней границе двухслойного барьера после водоизоляции.

До запуска добывающей скважины в эксплуатацию относительные погрешности равны  $\Delta_v = 0.002 \%$ ,  $\Delta_E = 0.000045 \%$ ,  $\Delta_p = 0.000025 \%$ ,  $\Delta_r = 0.5 \%$ . После запуска скважины относительная погрешность давления на внешней границе водоизоляционного экрана равна  $\Delta p_p = 1.4 \%$ . При учете пластического деформирования за геологические времена и наличия тектонических напряжений эта относительная погрешность только уменьшится, поскольку параметр  $\beta$  в формуле (2.6) увеличится. С ростом радиуса  $R$  внешнего слоя водоизолирующего экрана (объема смолы) относительная погрешность  $\Delta p_p$  также будет уменьшаться.

Выполненные оценки показывают, если вместо данных после запуска скважины использовать данные до водоизоляции, то максимальная относительная погрешность модели не превысит 2 %. С другой стороны, погрешность определения упругих модулей горных пород лежит в более широких пределах [6, 7]. Таким образом, погрешность представленной модели лежит в пределах погрешности входных параметров задачи.

Для определения давлений на внешней стенке эксплуатационной колонны  $p_e$  и внешней границе внутреннего слоя барьера  $p_r$  после запуска скважины решим задачу Ламе для трехслойного упругого цилиндра с заданными давлениями на его внутренней  $p_w$  и внешней  $p_p$  границах.

Как выше было сказано, после водоизоляции рассматриваемого интервала пласта проводится тест на герметичность скважины в этом интервале. Поэтому будем считать, что на границах контактов двухслойного барьера с колонной и породой, а также на границе между слоями барьера выполняются условия идеального контакта [8].

Таким образом, на контактных границах должны выполняться условия непрерывности вектора напряжения  $\sigma_n$  и радиальной компоненты вектора перемещения  $w$ :

$$w(R_e + 0) = w(R_e - 0) \quad (2.7)$$

$$\sigma_n(R_e + 0) = \sigma_n(R_e - 0) \quad (2.8)$$

$$w(R_w + 0) = w(R_w - 0) \quad (2.9)$$

$$\sigma_n(R_w + 0) = \sigma_n(R_w - 0) \quad (2.10)$$

Кроме того, должно быть выполнено граничное условие на внутренней стенке эксплуатационной колонны

$$\sigma_n(R_l) = -p_w \mathbf{n}, \quad (2.11)$$

а также внешней границе водоизолирующего барьера

$$\sigma_n(R) = -p_p \mathbf{n}. \quad (2.12)$$

Подробная запись соотношений (2.7) – (2.12) приводит к системе уравнений для определения вектора  $\mathbf{C}$ :

$$A\mathbf{C} = \mathbf{b} \quad (2.13)$$

где введены обозначения:

$$\mathbf{C} = (A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3)^T, \quad \mathbf{b} = (0, 0, 0, 0, -p_w, -p_p)^T, \quad (2.14)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

Для элементов матрицы  $A$  введены обозначения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= R_e, & a_{12} &= R_e^{-1}, & a_{13} &= -R_e = -a_{11}, & a_{14} &= -R_e^{-1} = -a_{12}, \\ a_{21} &= \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}, & a_{22} &= -\frac{E_1}{(1+\nu_1)} R_e^{-2}, & a_{23} &= -\frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}, & a_{24} &= \frac{E_2}{(1+\nu_2)} R_e^{-2}, \\ a_{33} &= R_w, & a_{34} &= R_w^{-1}, & a_{35} &= -R_w = -a_{33}, & a_{36} &= -R_w^{-1} = -a_{34}, \\ a_{43} &= \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} = -a_{23}, & a_{44} &= -\frac{E_2}{(1+\nu_2)} R_w^{-2}, & a_{45} &= -\frac{E_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}, \\ a_{46} &= \frac{E_3}{(1+\nu_3)} R_w^{-2}, & a_{51} &= \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} = a_{21}, & a_{52} &= -\frac{E_1}{(1+\nu_1)} R_e^{-2}, \\ a_{65} &= \frac{E_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)} = -a_{45}, & a_{66} &= -\frac{E_3}{(1+\nu_3)} R_w^{-2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Матрица (2.15) не вырождена, поэтому решение системы (2.13) имеет вид:

$$C = A^{-1} b. \quad (2.17)$$

После определения вектора констант  $C$  находится давление на внешней стенке эксплуатационной колонны  $p_e$ :

$$p_e = -\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} A_1 + \frac{E_1}{(1+\nu_1)} \frac{1}{R_e^2} B_1, \quad (2.18)$$

а также давление на внешней границе внутреннего слоя барьера  $p_r$ :

$$p_r = -\frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} A_2 + \frac{E_2}{(1+\nu_2)} \frac{1}{R_w^2} B_2. \quad (2.19)$$

### 3. Определение эффективных упругих модулей внешнего слоя экрана

Внешний слой барьера можно моделировать как двухфазный дисперсный композиционный материал, в котором роль матрицы играет водонасыщенный скелет породы, а роль наполнителя – частицы смолы с объемным содержанием  $\alpha_2$ , заполняющие трещиноватое пространство. Следовательно, необходимо определить упругие постоянные композита, армированного дисперсными включениями как параметры эффективной однородной изотропной среды. Для определения эффективных упругих модулей применим дифференциальный метод самосогласования, описанный в обзорной работе [9]. Будем моделировать заполненное синтетической смолой трещиноватое пространство хаотически расположенными игольчатыми включениями. Сами включения могут быть анизотропными. Для игольчатых включений дифференциальный метод самосогласования был применен в работе [10].



Для изотропной эквивалентной среды данный метод приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для определения двух упругих констант – модуля объемного сжатия  $K_3$  и модуля сдвига  $G_3$ . В принятых обозначениях имеем

$$\frac{dK_3}{d\alpha_2} = \frac{A_1 K_3}{1 - \alpha_2}, \quad \alpha_2 \in [0, m], \quad (3.1)$$

$$\frac{dG_3}{d\alpha_2} = \frac{B_1 G_3}{1 - \alpha_2}, \quad (3.2)$$

$$A_1 = \frac{(K_2 - K_3)(3K_3 + G_2 + 3G_3)}{K_3(3K_2 + G_2 + 3G_3)},$$

$$B_1 = \frac{3K_3(G_2 - G_3)C_1}{5G_3(G_2 + G_3)(3K_2 + G_2 + 3G_3)(3K_3G_2 + 3K_3G_3 + 7G_2G_3 + G_3^2)},$$

$$C_1 = (G_2 + G_3)[4G_3(3G_2 + 7G_3) + 3K_2(G_2 + 9G_3)] + G_3[8G_3(9G_2^2 + 23G_2G_3 + 8G_3^2) + 3K_2(7G_2^2 + 52G_2G_3 + 21G_3^2)],$$

с начальными условиями для объемного содержания смолы при  $\alpha_2 \rightarrow 0$ :

$$K_3(0) = \frac{E_4}{3(1 - 2\nu_4)}, \quad G_3(0) = \frac{E_4}{2(1 + \nu_4)}, \quad (3.3)$$

где  $E_4, \nu_4$  – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона трещиноватой или трещиновато-пористой водонасыщенной породы.

Пересчет технических констант эффективной среды проводится по обычным формулам теории изотропной упругости:

$$E_3 = \frac{9K_3G_3}{3K_3 + G_3}, \quad \nu_3 = \frac{3K_3 - 2G_3}{6K_3 + 2G_3} \quad (3.4)$$

#### 4. Области прочности и текучести слоев водоизолирующего экрана в пространстве параметров задачи

Далее определим области прочности и текучести слоев водоизолирующего барьера. Следуя работе [11], вводятся безразмерные параметры для однослойной изотропной идеально-пластической трубы

$$x = p/P, \quad \Sigma_s = \sigma_s/P, \quad \rho = R/r_0, \quad (4.1)$$

где  $x$  – отношение давлений соответственно на внутренней  $p$  и внешней  $P$  стенках трубы;  $\sigma_s$  – прочность материала трубы на сжатие;  $R$  – внешний радиус трубы;  $r_0$  – внутренний радиус трубы.

Использование введенных безразмерных параметров, приводит к условию прочности Губера – Мизеса для толстостенной трубы [11]:

$$\begin{aligned} a_1 x^2 + b_1 x + c_1 < 0, \quad a_1 = 3\rho^4 + (1 - 2\nu)^2 > 0, \\ b_1 = -2[3\rho^4 + \rho^2(1 - 2\nu)^2] < 0, \quad c_1 = 4(\nu^2 - \nu + 1)\rho^4 - (\rho^2 - 1)^2 \Sigma_s^2, \\ x_0 = -b_1/2a_1 > 1, \quad D = b_1^2 - 4a_1c_1, \\ x_{1,2} = (-b_1 \pm \sqrt{D})/2a_1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В таблице показаны области решения неравенства (4.2).

**Области прочности и текучести цилиндра при  $x \in [0,1]$**

Номер области решения неравенства (4.2)	Области изменения $D$ и $c_1$	Область изменения $x_0$	Положение корней $x_1, x_2$ относительно единицы	Область прочности	Область текучести
1	$D \leq 0$	$x_0 > 1$	–	–	$x \in [0,1]$
2.1	$D > 0, c_1 \geq 0$	$x_0 > 1$	$x_2 \in [0,1], x_1 > 1$	$x \in [x_2, 1]$	$x \in [0, x_2]$
2.2	$D > 0, c_1 \geq 0$	$x_0 > 1$	$x_1 > 1, x_2 > 1$	–	$x \in [0,1]$
3	$D > 0, c_1 < 0$	$x_0 > 1$	$x_1 > 1, x_2 < 0$	$x \in [0,1]$	–

При исследовании прочности внутреннего слоя барьера в (4.1) и (4.2) нужно положить

$$p = p_e, \quad P = p_r, \quad \Sigma_s = \sigma_{s2} / p_r, \quad \rho = R_w / R_e, \quad \nu = \nu_2, \quad (4.3)$$

где  $\sigma_{s2}$  – прочность смолы на сжатие;  $\nu_2$  – коэффициент Пуассона смолы.

При исследовании прочности внешнего слоя барьера нужно положить:

$$p = p_r, \quad P = p_p, \quad \Sigma_s = \sigma_{s3} / p_p, \quad \rho = R / R_w, \quad \nu = \nu_3, \quad (4.4)$$

где  $\sigma_{s3}$  – прочность композита смола/порода на сжатие;  $\nu_3$  – коэффициент Пуассона двухфазной среды смола/порода, который так же, как и модуль Юнга  $E_3$ , вычисляется по формулам (3.4) в результате решения системы ОДУ (3.1) – (3.3).

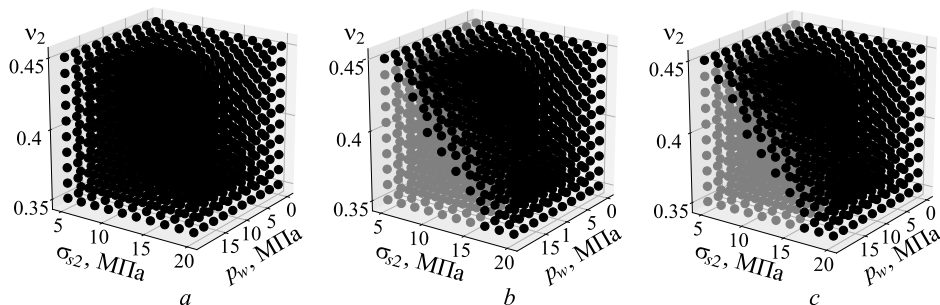
При нахождении областей прочности и текучести слоев водоизоляционного экрана согласно таблице и формулам (4.1), (4.2) использовались следующие параметры:  $R_r = 0.066$  м;  $R_e = 0.073$  м;  $R_w = 0.108$  м;  $\alpha = 0.85$ . Модуль Юнга стальной колонны равен  $E_1 = 204000$  МПа, а ее коэффициент Пуассона равен  $\nu_1 = 0.25$ . Средняя плотность породы равна  $\langle \rho \rangle = 2500$  кг/м<sup>3</sup>. Модуль Юнга смолы равен  $E_2 = 5$  ГПа. Трещиноватость породы варьировалась в пределах  $m = 0.001$ – $0.1$ . Поровое давление в водонасыщенном пропластке равно  $p = 20$  МПа. Радиус внешнего слоя барьера  $R$ , коэффициент Пуассона смолы  $\nu_2$ , прочность смолы  $\sigma_{s2}$  и забойное давление  $p_w$  варьировались.

В качестве трещиноватой породы рассматривается известняк. Прочность известняков на сжатие  $\sigma_{s4}$  лежит в диапазоне 21–343 МПа [6], а прочность фенолформальдегидных смол  $\sigma_{s2}$  – в диапазоне 7–21 МПа. Для определения прочности  $\sigma_{s3}$  двухфазного барьера смола/трещиноватая порода необходимо проводить серию экспериментов на трещиноватых ядрах, заполненных отвердевшей синтетической смолой. В данной работе прочность внешнего слоя барьера оценивалась по правилу смесей:

$$\sigma_{s3} = m \sigma_{s2} + (1 - m) \sigma_{s4} \quad (4.5)$$

На рис. 2 показаны трехмерные области прочности (черным цветом) и текучести (серым цветом):  $a$  – внешнего слоя;  $b$  – внутреннего слоя;  $c$  – обоих слоев одновременно в зависимости от прочности смолы  $\sigma_{s2}$ , забойного давления  $p_w$  и коэффициента Пуассона смолы  $\nu_2$  при фиксированной глубине проникновения смолы  $l = 0.5$  м, прочности породы  $\sigma_{s4} = 30$  МПа с коэффициентом трещиноватости  $m = 0.001$ , модуле Юнга с «мягким» водонасыщенным скелетом в интервале водоизоляции  $E_4 = 5$  ГПа и коэффициенте бокового давления  $\beta = 1/3$ . Видно, что

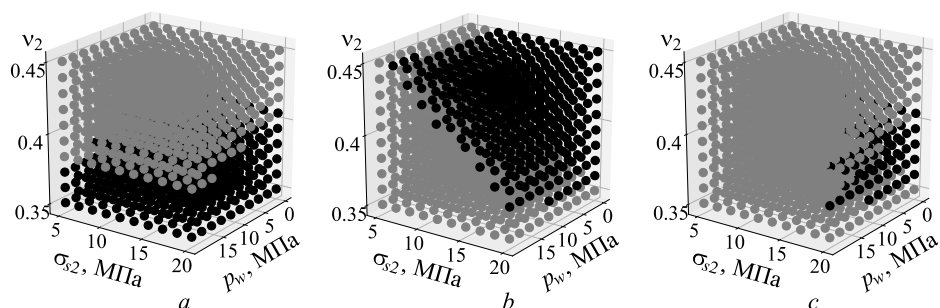
внешний слой (рис. 2, *a*) является прочным при любых параметрах, а внутренний слой (рис. 2, *b*), как и весь двухслойный водоизолирующий экран (рис. 2, *c*), имеет одинаковые области прочности в пространстве рассматриваемых параметров.



**Рис. 2.** Области прочности и текучести двухслойного водоизолирующего экрана: *a* – внешний слой, *b* – внутренний слой, *c* – оба слоя одновременно. Глубина проникновения смолы  $l = 0.5$  м, прочность водонасыщенной трещиноватой породы  $\sigma_{s4} = 30$  МПа, модуль Юнга водонасыщенного скелета  $E_4 = 5$  ГПа, коэффициент трещиноватости  $m = 0.001$ , коэффициент бокового давления  $\beta = 1/3$

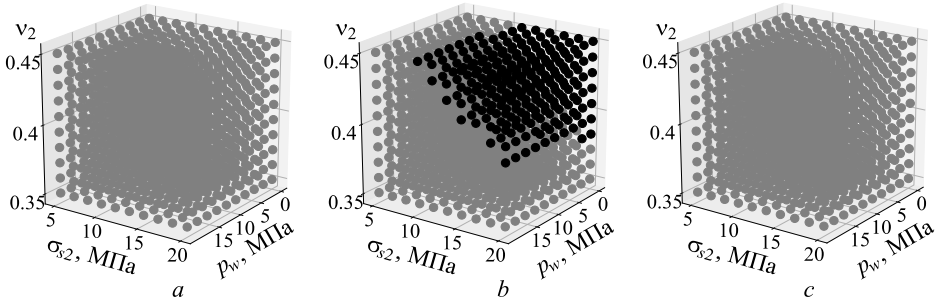
**Fig. 2.** The strength and yield areas of a two-layered water shut-off baffle: (*a*) outer layer, (*b*) inner layer, and (*c*) both layers. The penetration depth of a resin is  $l = 0.5$  m; the strength of a water-saturated fractured rock is  $\sigma_{s4} = 30$  MPa; Young’s modulus for water-saturated skeleton is  $E_4 = 5$  GPa; the fracture porosity is  $m = 0.001$ ; and the lateral pressure coefficient is  $\beta = 1/3$

На рис. 3 представлены графики для аналогичных параметров, при коэффициенте бокового давления  $\beta = 2/3$ . Из рис. 3, *a* видно, что область прочности внешнего слоя экрана существенно уменьшается по сравнению с предыдущим случаем. Внешний слой остается прочным при умеренных значениях коэффициента Пуассона смолы. Наоборот, область прочности внутреннего слоя водоизолирующего экрана смещается в сторону более высоких значений коэффициента Пуассона



**Рис. 3.** Области прочности и текучести двухслойного водоизолирующего экрана: *a* – внешний слой, *b* – внутренний слой, *c* – оба слоя одновременно. Глубина проникновения смолы  $l = 0.5$  м, прочность водонасыщенной трещиноватой породы  $\sigma_{s4} = 30$  МПа, модуль Юнга водонасыщенного скелета  $E_4 = 5$  ГПа, коэффициент трещиноватости  $m = 0.001$ , коэффициент бокового давления  $\beta = 2/3$

**Fig. 3.** The strength and yield areas of a two-layered water shut-off baffle: (*a*) outer layer, (*b*) inner layer, and (*c*) both layers. The penetration depth of a resin is  $l = 0.5$  m; the strength of a water-saturated fractured rock is  $\sigma_{s4} = 30$  MPa; Young’s modulus for water-saturated skeleton is  $E_4 = 5$  GPa; the fracture porosity is  $m = 0.001$ ; and the lateral pressure coefficient is  $\beta = 2/3$



**Рис. 4.** Области прочности и текучести двухслойного водоизолирующего экрана: *a* – внешний слой, *b* – внутренний, *c* – оба слоя одновременно. Глубина проникновения смолы  $l = 0.5$  м, прочность водонасыщенной трещиноватой породы  $\sigma_{s4} = 30$  МПа, модуль Юнга водонасыщенного скелета  $E_4 = 5$  ГПа, коэффициент трещиноватости  $m = 0.001$ , коэффициент бокового давления  $\beta = 1$

**Fig. 4.** The strength and yield areas of a two-layered water shut-off baffle: (*a*) outer layer, (*b*) inner layer, and (*c*) both layers. The penetration depth of a resin is  $l = 0.5$  m; the strength of a water-saturated fractured rock is  $\sigma_{s4} = 30$  MPa; Young's modulus for water-saturated skeleton is  $E_4 = 5$  GPa; the fracture porosity is  $m = 0.001$ ; and the lateral pressure coefficient is  $\beta = 1$

смолы, что видно из рис. 3, *b*. Область прочности экрана в целом существенно уменьшается, локализуясь в области умеренных значений коэффициента Пуассона и высоких значений прочности синтетической смолы (рис. 3, *c*).

Для коэффициента бокового давления  $\beta = 1$ , соответствующие графики показаны на рис. 4.

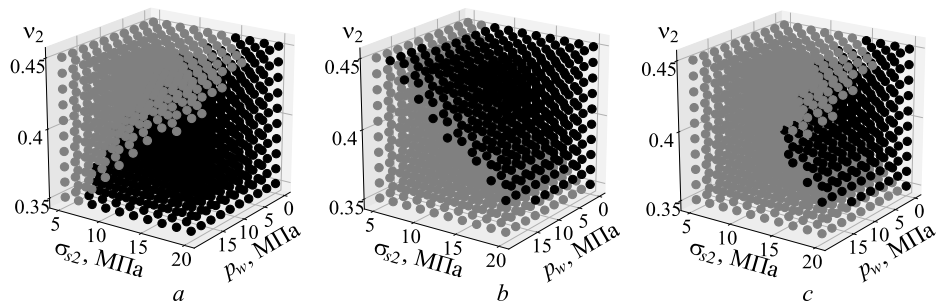
Из рис. 4, *a* видно, что внешний слой экрана разрушается при любых параметрах, а внутренний слой остается прочным в области умеренных и высоких значений коэффициента Пуассона и прочности смолы (рис. 4, *b*). На рис. 4, *c* показано, что операция водозащиты скважины в этом случае является неуспешной операцией. При увеличении тектонических напряжений ( $\beta = 2$  и  $\beta = 5$ ) водоизолирующие экраны также разрушаются.

Если коэффициент трещиноватости породы на порядок выше, т.е. равен  $m = 0.01$ , то области прочности слоев водоизолирующего экрана, для тех же параметров, что представлены на рис. 2 – 4, не изменятся.

Как показывают расчеты, если увеличивать объем закачки смолы, т.е. глубину ее проникновения в трещиновато-пористый пласт до 3 или 7 м, то успешность операции водозащиты скважины для пород с коэффициентом трещиноватости  $m = 0.001$  и  $0.01$  не повысится – результат будет совпадать с результатами, представленными на рис. 2 – 4.

Также были выполнены расчеты для тех же параметров, что показаны на рис. 2, но для породы с коэффициентом трещиноватости равным  $m = 0.1$ . Для коэффициента бокового давления  $\beta = 1/3$  области прочности и текучести слоев экрана остаются такими же, как и на рис. 2. Результаты расчетов для коэффициента бокового давления  $\beta = 2/3$  показаны на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что по сравнению с результатами на рис. 3 области прочности слоев экрана и всего экрана в целом в пространстве параметров увеличиваются. При более интенсивных тектонических напряжениях с коэффициентом бокового давления  $\beta = 1, 2$  и  $5$  внешний слой экрана разрушается при всех параметрах, а область прочности внутреннего слоя сильно уменьшается. При  $\beta = 5$  внутренний



**Рис. 5.** Области прочности и текучести двухслойного водоизолирующего экрана: *a* – внешний слой, *b* – внутренний, *c* – оба слоя одновременно. Глубина проникновения смолы  $l = 0.5$  м, прочность водонасыщенной трещиноватой породы  $\sigma_{s4} = 30$  МПа, модуль Юнга водонасыщенного скелета  $E_4 = 5$  ГПа, коэффициент трещиноватости  $m = 0.1$ , коэффициент бокового давления  $\beta = 2/3$

**Fig. 5.** The strength and yield areas of a two-layered water shut-off baffle: (*a*) outer layer, (*b*) inner layer, and (*c*) both layers. The penetration depth of a resin is  $l = 0.5$  m; the strength of a water-saturated fractured rock is  $\sigma_{s4} = 30$  MPa; Young's modulus for water-saturated skeleton is  $E_4 = 5$  GPa; the fracture porosity is  $m = 0.1$ ; and the lateral pressure coefficient is  $\beta = 2/3$

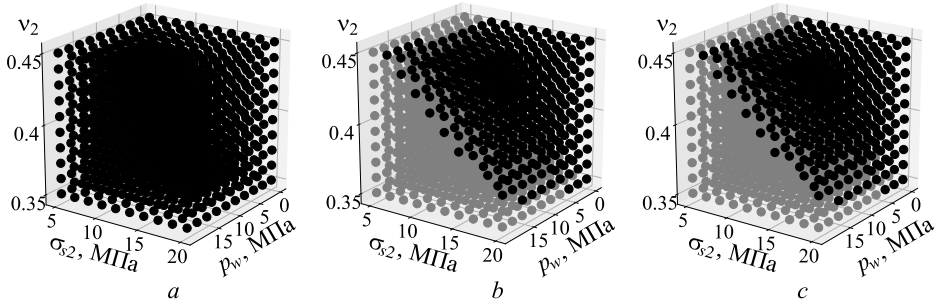
слой разрушается во всей области параметров. Таким образом, водоизоляция скважины при  $\beta = 1, 2, 5$  и выше является неуспешной технологической операцией. Увеличение объема закачанной смолы (глубина проникновения смолы равна  $l = 3$  и  $7$  м) не повышает эффективность процесса водоизоляции скважины.

Если водонасыщенный скелет породы является на порядок более «жестким», чем рассмотренные выше случаи, с модулем Юнга водонасыщенного скелета равным  $E_4 = 50$  ГПа, то при фиксированной глубине проникновения смолы  $l = 0.5$  м и коэффициенте трещиноватости породы равном  $m = 0.001$ , для коэффициентов бокового давления  $\beta = 1/2$  и  $\beta = 2/3$  области прочности в пространстве параметров увеличиваются не только по сравнению с соответствующими областями на рис. 2 и рис. 3, но и по сравнению с областями прочности на рис. 5 для породы, имеющей коэффициент трещиноватости на два порядка выше.

На рис. 6 представлены графики для тех же параметров при коэффициенте бокового давления  $\beta = 1$ . Сравнение с рис. 4 показывает, что в этом случае внешний слой экрана становится абсолютно прочным во всей области параметров (рис. 6, *a*), а для внутреннего слоя экрана область прочности в пространстве параметров увеличивается (рис. 6, *b*). В этом случае область прочности двухслойного водоизолирующего экрана совпадает с областью прочности внутреннего слоя (рис. 6, *c*).

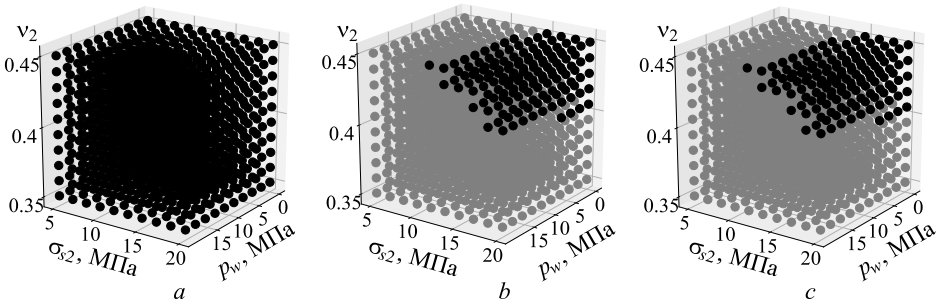
На рис. 7 показаны графики для тех же параметров задачи, что и на рис. 6, но при коэффициенте бокового давления  $\beta = 2$ . Из рис. 7, *a* видно, что внешний слой экрана по-прежнему остается прочным во всей области параметров, а область прочности внутреннего слоя значительно уменьшается, локализуясь в области высоких значений прочности смолы и коэффициента Пуассона смолы, (рис. 7, *b*). В этом случае также область прочности двухслойного водоизолирующего экрана в пространстве параметров совпадает с областью прочности внутреннего слоя экрана (рис. 7, *c*).

При коэффициенте бокового давления  $\beta = 5$  двухслойный экран разрушается при любых параметрах.



**Рис. 6.** Области прочности и текучести двухслойного водоизолирующего экрана: *a* – внешний слой, *b* – внутренний, *c* – оба слоя одновременно. Глубина проникновения смолы  $l = 0.5$  м, прочность водонасыщенной трещиноватой породы  $\sigma_{s4} = 30$  МПа, модуль Юнга водонасыщенного скелета  $E_4 = 50$  ГПа, коэффициент трещиноватости  $m = 0.001$ , коэффициент бокового давления  $\beta = 1$

**Fig. 6.** The strength and yield areas of a two-layered water shut-off baffle: (*a*) outer layer, (*b*) inner layer, and (*c*) both layers. The penetration depth of a resin is  $l = 0.5$  m; the strength of a water-saturated fractured rock is  $\sigma_{s4} = 30$  MPa; Young's modulus for water-saturated skeleton is  $E_4 = 50$  GPa; the fracture porosity is  $m = 0.001$ ; and the lateral pressure coefficient is  $\beta = 1$



**Рис. 7.** Области прочности и текучести двухслойного водоизолирующего экрана: *a* – внешний слой, *b* – внутренний слой, *c* – оба слоя одновременно. Глубина проникновения смолы  $l = 0.5$  м, прочность водонасыщенной трещиноватой породы  $\sigma_{s4} = 30$  МПа, модуль Юнга водонасыщенного скелета  $E_4 = 50$  ГПа, коэффициент трещиноватости  $m = 0.001$ , коэффициент бокового давления  $\beta = 2$

**Fig. 7.** The strength and yield areas of a two-layered water shut-off baffle: (*a*) outer layer, (*b*) inner layer, and (*c*) both layers. The penetration depth of a resin is  $l = 0.5$  m; the strength of a water-saturated fractured rock is  $\sigma_{s4} = 30$  MPa; Young's modulus for water-saturated skeleton is  $E_4 = 50$  GPa; the fracture porosity is  $m = 0.001$ ; and the lateral pressure coefficient is  $\beta = 2$

Отметим, что если в рассматриваемом случае «жесткого» скелета породы увеличивать объем закачки т.е. увеличивать глубину проникновения смолы в породу до 3–7 м, то результат практически не изменится для параметров бокового давления  $\beta = 1/3, 2/3, 1, 2, 5$ .

Также в пространстве параметров не изменятся области прочности и разрушения двухслойного водоизолирующего экрана, если рассмотреть породы с коэффициентом трещиноватости на порядок  $m = 0.01$  и два порядка  $m = 0.1$  выше.

## Заключение

Предложена математическая модель для оценки прочности двухслойного водоизоляционного барьера, образованного в результате закачки отверждающейся синтетической смолы в трещиновато-пористую среду. Модель основана на решении задачи об изотропном упругом полупространстве с полостью, решении задачи Ламе для трехслойного цилиндра, а также критерии текучести Мизеса для изотропного идеально-пластического материала. Для определения эффективных модулей внешнего слоя барьера в породе использовался дифференциальный метод согласования упругих полей для игольчатых включений. Построены области прочности и текучести в пространстве параметров задачи с учетом тектонических напряжений и релаксации главных напряжений к гидростатическому напряженному состоянию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов А.П., Даммер А.Я., Куперштох А.Л. Неустойчивость «невязкого пальца» в регулярных моделях пористой среды // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 2. С. 129–140.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
3. Динник А.Н. О давлении горных пород и расчет крепи круглой шахты // Инж. работник. 1925. № 7. С. 1–12.
4. Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3–41.
5. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.
6. Котяхов Ф.И. Физика газовых и нефтяных коллекторов. М.: Недра, 1977. 287 с.
7. Malkowski P., Ostrowski L. The methodology for the young modulus derivation for rocks and its value // Proc. ISRM European Rock Mechanics Symposium – EUROCK 2017, 20–22 June, Ostrava. 2017. V. 191. P. 134–141.
8. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
9. Устинов К.Б. Об определении эффективных упругих характеристик двухфазных сред. Случай изолированных неоднородностей в форме эллипсоидов вращения // Успехи механики. 2003. № 2. С. 126–168.
10. Wu T.T. The effect of inclusion shape on the elastic moduli of a two-phase material // Int. J. Solids and Structures. 1966. V. 2. P. 1–8.
11. Ильясов А.М. Оценка прочности цементного кольца, примыкающего к стволу добывающей скважины // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 1. С. 210–217. DOI: 10.15372/PMTF20170120.

Статья поступила 29.04.2019 г.

Ильясов А.М., Киреев Т.Ф., Булгакова Г.Т. (2019) STRENGTH ASSESSMENT FOR WATER SHUT-OFF BAFFLES IN A FRACTURED MEDIUM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 91–104

DOI 10.17223/19988621/62/8

Keywords: water shut-off baffle, fractured-porous medium, differential self-consistent method, ideal plastic body.

The paper proposes a mathematical model for estimating the strength of two-layered water shut-off baffle adjacent to a wellbore after pumping the cured synthetic resin into a fractured or fractured-porous water-saturated media. The mathematical model is based on the solution to the Lamé problem of three-layered pipe, the solution to the problem of isotropic elastic half-space with a cavity, and the von Mises yield criterion for ideal-plastic body. For the outer layer of resin-

fractured rock barrier, the elastic moduli of equivalent homogeneous isotropic medium are calculated using the differential self-consistent method for needle-like inclusions.

The proposed model allows one to account for both the stress relaxation in the rock to a hydrostatic stress state in geological times and the possible tectonic stresses in the rock. In a three-dimensional space of parameters “resin strength — Poisson's ratio for resin — bottomhole pressure after water shut-off in a well”, the strength and yield areas for inner and outer layers of two-layered water shut-off baffle are calculated using some fixed parameters.

It is shown that in many cases involving the real elastic and strength properties of the cured synthetic resins, especially under stresses in the reservoir conditions, the water shut-off baffle will be destroyed in any production well operation. It is also proved that the water shut-off operation efficiency does not increase with an increase in the injected synthetic resin volume.

**Financial support:** The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-41-020226 r\_a).

*Aydar M. IL'YASOV* (Candidate of Physics and Mathematics, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russian Federation). E-mail: amilyasov67@gmail.com

*Timur F. KIREEV* (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russian Federation). E-mail: kireevtf@mail.ru

*Guzel T. BULGAKOVA* (Doctor of Physics and Mathematics, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russian Federation). E-mail: bulgakova.guzel@mail.ru

#### REFERENCES

1. Ershov A.P., Dammer A.Ya., Kupershtokh A.L. (2001) “Inviscid finger” instability in regular models of a porous medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 42 (2). pp. 300–309. DOI: 10.1023/A:1018888205638.
2. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic elastic body]. Moscow: Nauka.
3. Dinnik A.N. (1925) O davlenii gornykh porod i raschet krepki krugloy shakhty [On rock pressure and calculation of the round shaft support]. *Inzhenernyy rabotnik*. 7. pp.1–12.
4. Zheltov Yu.P., Khristianovich S.A. (1955) O gidravlicheskom razryve neftenosnogo plasta [On hydraulic fracturing of oil reservoir]. *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk*. 5. pp. 3–41.
5. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. (1993) *Podzemnaya gidromekhanika* [Subsurface hydromechanics]. Moscow: Nedra.
6. Kotyakhov F.I. (1977) *Fizika gazovykh i neftyanykh kollektorov* [Physics of gas and oil reservoirs]. Moscow: Nedra.
7. Malkowski P., Ostrowski L. (2017) The methodology for the young modulus derivation for rocks and its value. *Proceedings ISRM European Rock Mechanics Symposium*. 191. pp. 134–141. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.05.164.
8. Dimitrienko Yu.I. (2009) *Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy* [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow: Fizmatlit.
9. Ustinov K.B. (2003) Ob opredelenii effektivnykh uprugikh kharakteristik dvukhfaznykh sred. Sluchay izolirovannykh neodnorodnostey v forme ellipsoidov vrashcheniya [On determination of the effective elastic characteristics of two-phase media. The case of isolated inhomogeneities in the shape of rotational ellipsoids]. *Uspekhi mekhaniki – Advances of Mechanics*. 2(2). pp. 126–168.
10. Wu T.T. (1966) The effect of inclusion shape on the elastic moduli of a two-phase material. *International Journal of Solids and Structures*. 2. pp. 1–8. DOI: 10.1016/0020-7683(66)90002-3.
11. Ilyasov A.M. (2017) Strength evaluation of a cement ring adjacent to a production well bore. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 58(1). pp. 182–187. DOI: 10.1134/S0021894417010205.

Received: April 29, 2019



УДК 536-12:519.633  
DOI 10.17223/19988621/62/9

Е.С. Парфенова

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ИМПЛАНТИРУЕМОЙ ПРИМЕСИ ПРИ ОБРАБОТКЕ ПОВЕРХНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ<sup>1</sup>

Рассмотрено математическое моделирование начальной стадии поверхностной обработки материала потоком частиц с использованием двух последовательных импульсов. Описана математическая постановка задачи в размерных и безразмерных переменных. Модель учитывает конечность времен релаксации потоков тепла и массы, взаимодействие процессов разной физической природы – распространение механических возмущений и диффузии внедряемого материала. Разработанный численный алгоритм основан на невязной разностной схеме. Приведены примеры решения связанной задачи при обработке одним и двумя импульсами, выявлены различия в получаемых распределениях.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, неизотермическая связанная модель, диффузия, напряжения, деформации, время релаксации, поток частиц, последовательные импульсы.

Перспективными методами повышения эксплуатационных характеристик материалов является импульсное воздействие на его поверхность высококонцентрированными источниками энергии – электронными, лазерными, ионными пучками, компрессионными плазменными потоками [1 – 3].

Большое влияние на получаемый результат кроме выбора материалов для проведения эксперимента оказывает правильный подбор параметров обработки. Это относится и к определению количества импульсов, иногда достаточно ограничиться одним импульсом, а порой приходится значительно увеличить число воздействий. В работе [4] рассмотрены случаи обработки стальной подложки разным количеством импульсов, установлено, что увеличение числа импульсов приводит к более однородной обработке поверхности. В [5] показано, что повышение суммарной мощности воздействия на образец (увеличение числа импульсов и уменьшение расстояния между образцом и анодом установки) ведет к уменьшению периода решетки из-за действия остаточных макронапряжений, вызванных импульсным плазменным воздействием. Экспериментально показано, что увеличение количества импульсов до 10 приводит к повышению микротвердости обрабатываемых стальных образцов, но дальнейшее увеличение их количества уже снижает микротвердость [6]. Поэтому теоретические исследования процессов многоимпульсной обработки потоком частиц весьма актуальны, поскольку позволяют дать рекомендации по оптимальному выбору числа импульсов в каждом конкретном случае без значительных затрат.

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы, направление III.23.

Как и любой процесс обработки, модификация поверхности потоком заряженных частиц сопровождается протеканием разных физических и химических явлений. Взаимодействие некоторых из них может качественно сказаться на получаемом результате. Иными словами, в теоретических работах необходимо исследование взаимовлияния всевозможных процессов, протекающих совместно, для выявления особенностей этого взаимодействия. Например, в [7] учитываются напряжения в системе покрытие – подложка, возникающие в процессе осаждения. Это приводит к изменению эффективных коэффициентов переноса и оказывает значительное влияние на распределения химических элементов и их соединений в покрытии. В экспериментальной работе [8] показано, что упругие напряжения оказывают влияние на скорость диффузии бора в кремнии. Многие авторы при теоретическом исследовании взаимодействия напряжений и концентрации (диффузии) используют не связанные модели, то есть рассчитывают поле напряжений по независимо полученным данным о концентрации и наоборот [9]. В некоторых работах встречаются изотермические модели, которые не всегда подходят для описания реальных процессов обработки [10]. Достаточно подробно описан процесс внедрения потока частиц в поверхность подложки при одноимпульсной обработке с покрытием на подложке [11] и без покрытия [12]. Установлена взаимосвязь между процессами распределения напряжений (деформаций) и концентрации внедряемой примеси. В настоящей работе проведены аналогичные расчеты, но для случая обработки двумя последовательными импульсами.

Цель работы заключается в рассмотрении процесса поверхностной обработки двумя последовательными импульсами и сравнения полученных результатов с результатами, полученными при обработке одиночным импульсом. Полагается, что общее время воздействия на поверхность подложки одинаково для обоих случаев.

### Математическая постановка задачи

Воспользуемся математической моделью, представленной в [12]. Процесс взаимодействия потока заряженных частиц с поверхностью мишени можно описать в рамках модели, включающей уравнения неразрывности и теплопроводности, а также уравнение баланса компонента и уравнение движения:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} ; \quad (1)$$

$$\rho C_{\sigma} \frac{dT}{dt} + \alpha_T T \frac{d\sigma_{kk}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q ; \quad (2)$$

$$\rho \frac{dC}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J} ; \quad (3)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} , \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность обрабатываемого материала;  $C$  – концентрация имплантируемого материала;  $\mathbf{J}$  – поток массы;  $\mathbf{J}_q$  – поток тепла;  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\sigma_{kk}$  – компоненты тензора напряжений в направления облучения и первый инвариант тензора напряжений;  $T$  – температура;  $\alpha_T$  – коэффициент теплового расширения;  $C_{\sigma}$  – удельная теплоемкость,  $\mathbf{v}$  – среднemasсовая скорость.

Определяющие соотношения соответствуют теории обобщенной термоупругой диффузии [13 – 15].

В соответствии с термодинамикой необратимых процессов потоки тепла и массы с учетом времен релаксации тепла и массы записываем в виде [13–16]

$$\mathbf{J} = -\rho D \nabla C + BC \nabla \sigma_{kk} - t_D \frac{d\mathbf{J}}{dt}; \tag{5}$$

$$\mathbf{J}_q = -\lambda_T \nabla T - t_q \frac{d\mathbf{J}_q}{dt}, \tag{6}$$

где  $B = D^0 m \Delta \alpha / RT$  – коэффициент переноса под действием напряжений;  $D^0 = D_0 \exp(-E_a / RT)$  – коэффициент самодиффузии;  $D = D^0 f(C)$  – коэффициент диффузии;  $f(C)$  – функция, учитывающая зависимость коэффициента диффузии от состава;  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $m$  – молярная масса;  $t_D$  – время релаксации потока массы;  $t_q$  – время релаксации потока тепла;  $\lambda_T$  – теплопроводность;  $\Delta \alpha = \alpha - \alpha_0$  – разность коэффициентов концентрационного расширения внедряемого элемента  $\alpha$  и элемента, составляющего основу  $\alpha_0$  (или эффективного коэффициента в случае многокомпонентных материалов).

Функция  $f(C)$  для большего класса материалов может быть записана в виде

$$f(C) = a + bC + dC^2 > 0.$$

Если  $f(C) = 1$ , коэффициент диффузии  $D$  равен коэффициенту самодиффузии  $D^0$ .

В случае малых перемещений и малых деформаций имеют место соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{7}$$

где  $u_{i,j}$  – перемещения.

Приращения компонентов тензоров деформаций связаны с приращениями компонентов тензора упругих напряжений, концентраций и температуры обобщенными соотношениями:

$$d\sigma_{ij} = 2\mu d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} (\lambda d\varepsilon_{kk} - K d\omega), \tag{8}$$

где  $\omega = 3[\alpha_T(T - T_0) + \Delta \alpha(C - C_0)]$  – функция температуры и концентрации,  $\mu, \lambda$  – коэффициенты Ламе (коэффициент  $\mu$  совпадает с модулем сдвига),  $K$  – изотермический модуль всестороннего сжатия,  $K = \lambda + 2\mu/3$ .

Принимаем ряд упрощений:

- Деформации, скорости и ускорения считаем малыми. Тогда нет необходимости в уравнении (1), а правая часть уравнения движения (4) принимает вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \approx \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

- Поток равномерно распределен вдоль обрабатываемой поверхности, поэтому можно ограничиться одномерной задачей.

В результате получаем систему одномерных связанных уравнений

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial x}; \quad (9)$$

$$\rho C_\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha_T T \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}_q}{\partial x}; \quad (10)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}; \quad (11)$$

$$\mathbf{J} = -\rho D \frac{\partial C}{\partial x} + BC \frac{\partial \sigma}{\partial x} - t_D \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}; \quad (12)$$

$$\mathbf{J}_q = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} - t_q \frac{\partial \mathbf{J}_q}{\partial t}; \quad (13)$$

$$\sigma = E[\varepsilon - \alpha_T (T - T_0) - \Delta \alpha (C - C_0)]; \quad (14)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (15)$$

Начальные и граничные условия для (9) – (15) имеют вид

$$x = 0: \mathbf{J} = m_0 \Phi(t); \mathbf{J}_q = q_0 \Phi(t); \sigma = \sigma_0 \Phi(t).$$

$$x \rightarrow \infty: C = 0, \sigma = 0.$$

$$t = 0: C = 0, \sigma = 0, T = T_0, \frac{\partial C}{\partial t} = 0, \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0.$$

Используя соотношения (14) и (15), в приближении одноосного нагружения получаем систему трех уравнений: для концентрации внедряемой примеси  $C$ , напряжений в направлении нагружения  $\sigma$  и температуры  $T$ :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + t_D \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{BC}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right]; \quad (16)$$

$$\frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \rho \alpha_T \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho \Delta \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}; \quad (17)$$

$$\rho C_\sigma \left[ t_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \alpha_T T \frac{\partial \sigma}{\partial t} - t_q \frac{\partial}{\partial t} \left( \alpha_T T \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right). \quad (18)$$

Для численной реализации модели удобнее перейти к безразмерным переменным:

$$\tau = \frac{t}{t_*}; \xi = \frac{x}{x_*}; S = \frac{\sigma}{\sigma_*}; \Theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}; e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}, \quad (19)$$

где  $t_*$ ,  $x_*$ ,  $\sigma_*$ ,  $T_*$ ,  $\varepsilon_*$  – масштабы для  $t$ ,  $x$ ,  $\sigma$ ,  $T$ ,  $\varepsilon$  соответственно.

Система (16) – (18) в безразмерных переменных (19) примет вид

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \tau_D \frac{\partial^2 C}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ F(\Theta) \frac{\partial C}{\partial \xi} \right] - M \Omega \gamma \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C \frac{F(\Theta)}{\Theta + \Psi} \frac{\partial C}{\partial \xi} \right]; \quad (20)$$

$$\tau_q \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - \Omega (\Psi + \Theta) \frac{\partial S}{\partial \tau} - \tau_q \Omega \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ (\Theta + \Psi) \frac{\partial S}{\partial \tau} \right]; \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + \gamma \frac{\partial^2 C}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}. \quad (22)$$

Граничные и начальные условия:

$$\xi = 0: \mathbf{J} = \mu_0 \varphi(\tau), \mathbf{J}_q = \varphi(t); S = S_0 \varphi(\tau). \quad (23)$$

$$\xi \rightarrow \infty: \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0; \frac{\partial C}{\partial \xi} = 0; S = 0, \text{ тогда } e = \Theta + \gamma(C - C_0). \quad (24)$$

$$\tau = 0: C = 0; S = 0; \frac{\partial C}{\partial \tau} = 0; \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0; \Theta = \Theta_0. \quad (25)$$

Выражения (12) – (14) в безразмерных переменных принимают вид:

$$\mathbf{J} = -F(\Theta) \frac{\partial C}{\partial \xi} + \frac{F(\Theta)}{(\Psi + \Theta)} \gamma C M \Omega \frac{\partial S}{\partial \xi} - \tau_D \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \tau}; \quad (26)$$

$$\mathbf{J}_q = -\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \tau_q \frac{\partial \mathbf{J}_q}{\partial \tau}; \quad (27)$$

$$S = (e - \Theta - \gamma(C - C_0)). \quad (28)$$

Система (19) – (25) была решена численно по неявной разностной схеме второго порядка как по времени, так и по координате.

### Результаты и обсуждение

Как и в работе [12], для расчетов выбраны Mo (основа) и Ni (внедряемый материал). Это позволит сравнить полученные решения для случая обработки одним и двумя импульсами. Общее время воздействия принимаем одинаковым для обоих случаев ( $\sum \tau_{\text{imp}} = 0.02$ ). Числовые значения параметров модели приведены в таблице.

Значения параметров модели

Параметр	$\gamma$	$Le$	$\Omega$	$M$	$\mu_0$
Выражение	$\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_T (T_* - T_0)}$	$\frac{D(T_*)}{\lambda_T / (\rho C_\sigma)}$	$\frac{\alpha_T^2 E}{\rho C_\sigma} (T_* - T_0)$	$\frac{m C_\sigma}{R}$	$\frac{m_0}{\sqrt{\rho E}}$
Mo(Ni)	-0.003	40.7	0.002	10.5	0.05
Параметр	$S_0$	$\tau_D$	$\tau_q$	$\beta$	$\Psi$
Выражение	$\frac{\sigma_0 D(T_*) \rho}{\sigma_* E}$	$\frac{t_D E}{D \rho}$	$\frac{t_q E}{D \rho}$	$\frac{R(T_* - T_0)}{E_a}$	$\frac{T_0}{(T_* - T_0)}$
Mo(Ni)	0.001	0.03	0.006	0.0018	110.0

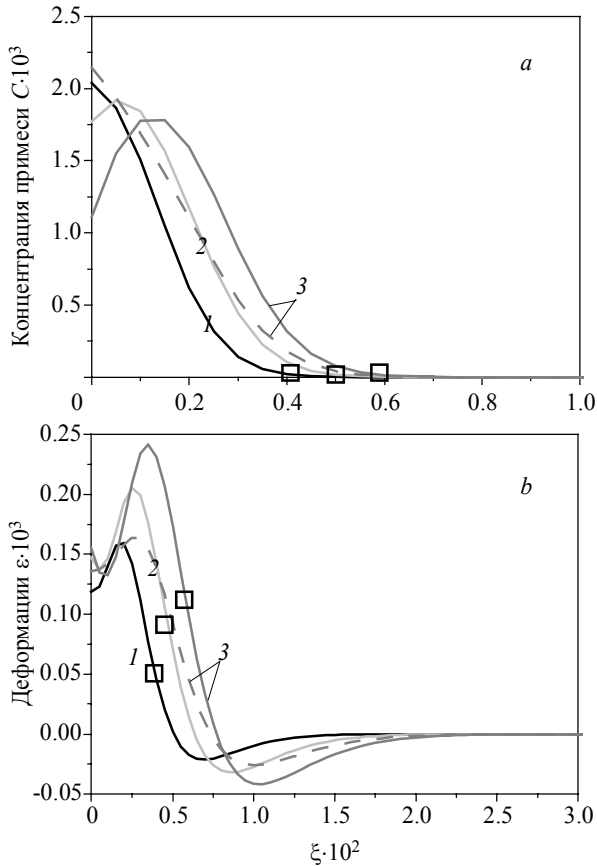
Внешнее воздействие определяется выражениями:

Один импульс – 
$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0.02 \sin\left(\frac{\pi \tau}{0.02}\right), & \tau \leq 0.02, \\ 0, & \tau > 0.02. \end{cases}$$

Два импульса – 
$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0.02 \sin\left(\frac{\pi \tau}{0.01}\right), & 0 < \tau \leq 0.01, \quad 0.02 < \tau \leq 0.03, \\ 0, & 0.01 < \tau \leq 0.02, \quad \tau > 0.03. \end{cases}$$

Для моментов времени меньших и сравнимых с  $\tau_q$  по мере проникновения примеси в глубь образца увеличивается как максимум в деформациях, так и минимум. Положение переднего фронта волны концентрации никак не сказывается на профиле деформаций. Получаемые решения на данном этапе аналогичны решениям, представленным в работе [12].

На рис. 1 подставлены распределения концентрации внедряемой примеси и деформаций в моменты времени сравнимые с длительностью первого импульса. На концентрационной волне определяется первый максимум, которому соответствует дополнительный экстремум на волне деформации. Для момента времени  $\tau = 0.008$  (кривая 3) на графиках представлены распределения для обработки

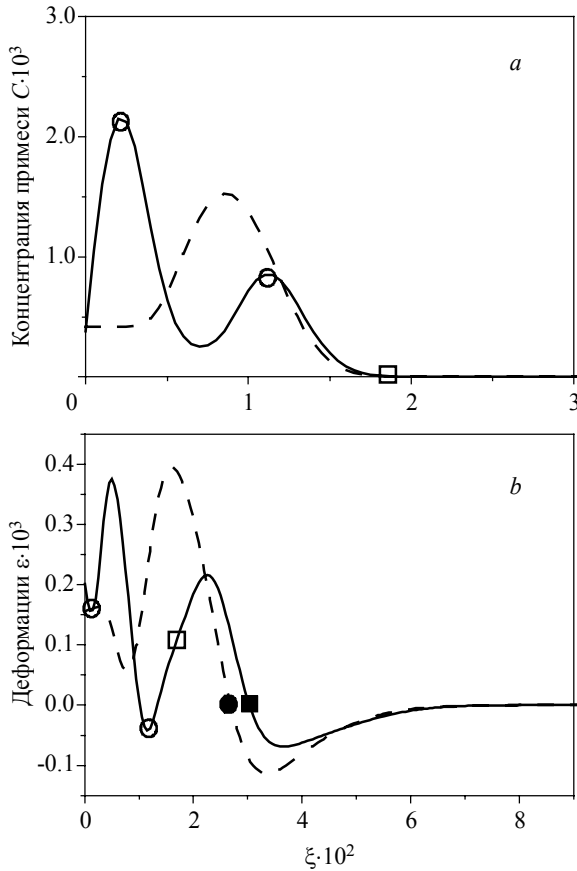


**Рис. 1.** Пример решения связанной задачи для системы Mo(Ni): *a* – распределение концентрации диффузанта Ni; *b* – профили волн деформации. Пунктирные кривые – обработка одним импульсом; Сплошные – двумя. Моменты времени  $\tau$ : 1 – 0.005, 2 – 0.0065, 3 – 0.008

**Fig. 1.** An example of coupled problem solution for system Mo(Ni): profiles of (*a*) Ni concentration and (*b*) deformation waves. The dashed lines indicate the treatment by one pulse; the solid lines, the treatment by two pulses. Time instants:  $\tau =$  (1) 0.005; (2) 0.0065; and (3) 0.008

одним (пунктирная линия) и двумя (сплошная линия) импульсами. Видно, что в первом случае на волне концентрации только начинает формироваться максимум, а максимальное и минимальное значения деформаций меньше, чем при двухимпульсной обработке.

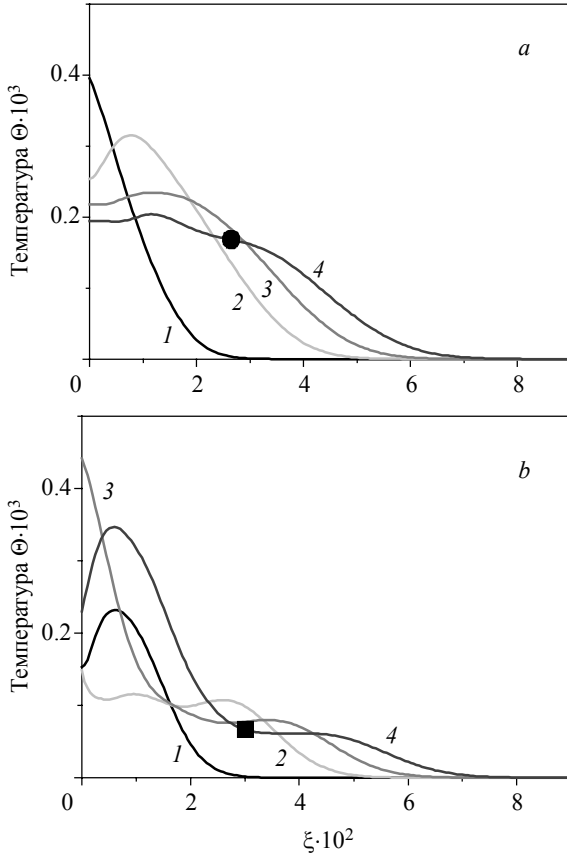
На рис. 2 представлены распределения для момента времени  $\tau = 0.03$ , когда заканчивается внешнее воздействие при двухимпульсной обработке. Вполне очевидно, что основное отличие двух способов обработки – количество экстремумов на волнах.



**Рис. 2.** Пример решения связанной задачи для системы Mo(Ni): *a* – распределение концентрации диффузанта Ni; *b* – профили волн деформации. Пунктирные кривые – обработка одним импульсом; Сплошные – двумя. Момент времени  $\tau = 0.03$

**Fig. 2.** An example of coupled problem solution for system Mo(Ni): profiles of (a) Ni concentration and (b) deformation waves. The dashed lines indicate the treatment by one pulse; the solid lines, the treatment by two pulses. The time instant is  $\tau = 0.03$

Если рассмотреть распределения температуры (рис. 3), то видно, что при обработке одним импульсом профиль более равномерный. На графиках отмечена область смены знака деформаций (рис. 2, *b*) –  $\xi = 2.8$  (один импульс, закрашенный круг),  $\xi = 3.0$  (два импульса, закрашенный квадрат), на волне температуры в этом месте имеется изгиб (рис. 3 *a, b*).

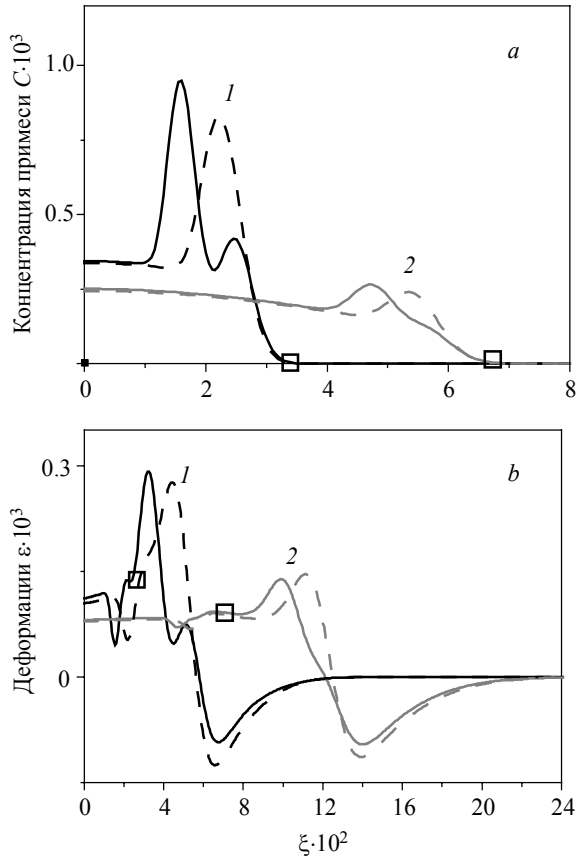


**Рис. 3.** Пример решения связанной задачи для системы Mo(Ni): *a* – распределение температуры при одноимпульсной обработке; *b* – распределение температуры при двух импульсной обработке. Моменты времени  $\tau$ : 1 – 0.01, 2 – 0.02, 3 – 0.025, 4 – 0.03

**Fig. 3.** An example of coupled problem solution for system Mo(Ni): temperature profiles at a treatment by (a) one pulse and (b) two pulses. Time instants:  $\tau = (1)$  0.01; (2) 0.02; (3) 0.025; and (4) 0.03

Независимо от количества внешних воздействий, механизмы взаимодействия между волнами деформаций и напряжений, отмеченные в [12], сохраняются. На (рис. 4) представлены распределения для моментов времени  $\tau > \tau_D, \tau_{imp}, \tau_q$ . Видимые изменения появляются на волне деформаций. Искажению формы волны деформаций соответствуют положения переднего фронта волны концентрации.



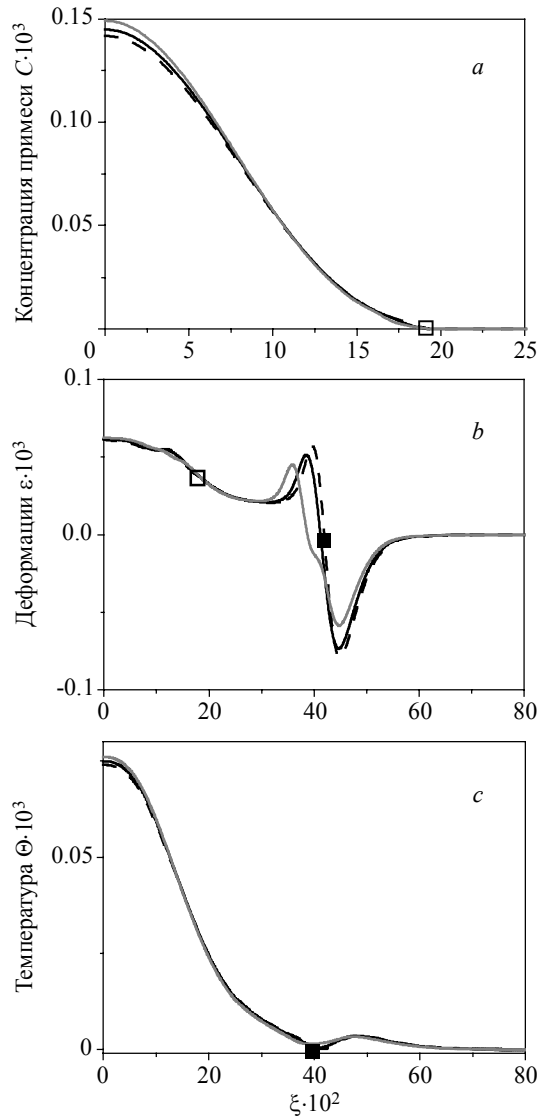


**Рис. 4.** Пример решения связанной задачи для системы Mo(Ni): *a* – распределение концентрации диффузанта Ni; *b* – профили волн деформации. Пунктирные кривые – обработка одним импульсом; сплошные – двумя. Момент времени  $\tau$ : 1 – 0.06; 2 – 0.13

**Fig. 4.** An example of coupled problem solution for system Mo(Ni): profiles of (a) Ni concentration and (b) deformation waves. The dashed lines indicate the treatment by one pulse; the solid lines, the treatment by two pulses. Times instants:  $\tau = (1) 0.06$  and (2) 0.13

Для более поздних моментов времени диффузия примеси не вносит никакого вклада в распространение нелинейных волн деформации и температуры (рис. 5).

Волна концентраций значительно отстает от других волн. Температура стремится к исходному значению, после достижения которого (закрашенный квадрат рис. 5, *c*), наблюдается ее незначительное повышение. Видно, что увеличение количества импульсов приводит к уменьшению значений деформаций на глубине, причем, чем больше временной промежуток между воздействиями, тем меньше экстремумы деформаций. На распределениях концентрации внедряемой примеси и температуры значительных изменений не наблюдается.



**Рис. 5.** Пример решения связанной задачи для системы Mo(Ni): *a* – распределение концентрации диффузанта Ni; *b* – профили волн деформации; *c* – распределение температуры. Пунктирные кривые – обработка одним импульсом; черные сплошные – двумя импульсами с интервалом 0.01; серые сплошные – двумя импульсами с интервалом 0.02. Момент времени  $\tau = 0.4$

**Fig. 5.** An example of coupled problem solution for system Mo(Ni): profiles of (a) Ni concentration, (b) deformation waves, and (c) temperature. The dashed lines indicate the treatment by one pulse; the black and gray solid lines, the treatment by two pulses with time interval of 0.01 and 0.02, respectively. The time instant is  $\tau = 0.4$

### Заключение

Представленная математическая модель для описания начальной стадии процесса внедрения потока частиц в поверхность металла учитывает неизотермичность процесса и взаимодействие разномасштабных процессов – диффузию и деформирование. Взаимодействие волн разной физической природы приводит к искажениям на распределениях температуры и деформации. Увеличение числа воздействий увеличивает количество экстремумов на волнах. Но после прекращения внешнего воздействия с увеличением времени наблюдения профили практически не отличаются, за исключением деформаций – наблюдается понижение уровня деформаций на глубине.

Автор благодарит А.Г. Князеву за обсуждение результатов исследований.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Cherenda N.N., Uglov V.V., Anishchik V.M., et al.* Modification of high-speed steels by nitrogen compression plasma flow: structure, element composition, tribological properties // Surf. Coat. Technol. 2006. V. 200. No. 18–19. P. 5334–5342. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2005.06.007.
2. *Углов В.В., Кулешов А.К., Ремнев Г.Е., Салтымаков М.С., Асташинский В.М.* Модификация твердого сплава Т15К6 мощными импульсными ионными пучками и компрессионными плазменными потоками // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. 2011. № 3. С. 63–68.
3. *Панин А.В., Казаченок М.С., Первалова О.Б., Синякова Е.А., Круковский К.В., Мартынов С.А.* Многоуровневые механизмы деформационного поведения технического титана и сплава Ti–6Al–4V, подвергнутых обработке высокочастотными электронными пучками // Физ. мезомех. 2018. Т. 21. № 4. С. 45–56. DOI 10.24411/1683-805X-2018-14005.
4. *Асташинский В.М., Лейви А.Я., Углов В.В., Черенда Н.Н., Яловец А.П.* Формирование рельефа поверхности металлической мишени при воздействии компрессионных плазменных потоков // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. 2014. № 6. С. 12–17. DOI: 10.7868/S0207352814060055.
5. *Боровицкая И.В., Никулин В.Я., Бондаренко Г.Г., Михайлова А.Б., Силин П.В., Гайдар А.И., Парамонова В.В., Перегудова Е.Н.* Воздействие импульсных потоков азотной плазмы и ионов азота на структуру и механические свойства ванадия // Металлы. 2018. № 2. С. 54–64.
6. *Жукешов А.М., Габдуллина А.Т.* Влияние режимов обработки импульсными потоками плазмы поверхности стали на ее структуру и микротвердость // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. 2009. № 11. С. 95–101. DOI: 10.7868/S0207352814060055.
7. *Шанин С.А., Князева А.Г.* Связанная модель формирования покрытия на подложке цилиндрической формы // ПМТФ. 2014. Т. 55. № 3. С. 192–204.
8. *Оджаев В. Б., Плебанович В.И., Тарасик М.И., Челябинский А.Р.* О влиянии упругих напряжений на диффузию бора в кремнии // Журнал БГУ. Физика. 2017. № 3. С. 88–94.
9. *Fu Zhen Xuan, Shan-Shan Shao, Zhendong Wang, Shan-Tung Tu* Coupling effects on chemical stresses and external mechanical stresses on diffusion // J. Phys. D: Appl. Physics. 2009. V.42. P. 1–8.
10. *Демидов В.Н., Князева А.Г., Ильина Е.С.* Особенности моделирования диффузионных процессов в упругом теле при его поверхностной модификации частицами // Вестник ПНИПУ. Механика, Сборник «Математическое моделирование систем и процессов». 2012. № 3. С. 25–49.
11. *Парфенова Е.С., Князева А.Г.* Начальная стадия формирования переходного слоя между пленкой и подложкой при нагреве сильноточным электронным пучком // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 103–117. DOI: 10.17223/19988621/54/9.

12. Парфенова Е.С., Князева А.Г. Неизотермическая механо-dиффузионная модель начальной стадии процесса внедрения потока частиц в поверхность мишени // Вычисл. мех. сплош. сред. 2019. Т. 12. № 1. С. 36–47. DOI:10.7242/1999-6691/2019.12.1.4
13. Sherief H.H., Hamza F., Saleh H. The Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // Int. J. Eng. Sci. 2004. V. 42. P. 591–608.
14. Aouadi M. Generalized Theory of Thermoelastic Diffusion for Anisotropic Media // J. Thermal Stresses. 2008. V. 31. P. 1–16.
15. Князева А.Г. Диффузия и реология в локально-равновесной термодинамике // Вестник ПНИПУ. Механика. Сборник «Математическое моделирование систем и процессов». 2005. № 13. С. 45–60.
16. Князева А.Г. Нелинейные модели деформируемых сред с диффузией // Физ. мезомех. 2011. Т.14. № 6. С. 35–51.

Поступила 16.05.2019 г.

Parfenova E.S. (2019) DISTRIBUTION OF THE CONCENTRATION OF INJECTED IMPURITY UNDER SURFACE TREATMENT BY CONSECUTIVE PULSES *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 105–118

DOI 10.17223/19988621/62/9

Keywords: mathematical modeling, non-isothermal coupled model, diffusion, stress, deformation, relaxation time, particle flux, consecutive pulses.

Surface treatment by particle flux is widely used for improving the operating properties of materials. At the instant of interaction between particles and target surface, various processes occur such as heating, phase formation, mixing, generation of the elastic waves of mechanical disturbances, etc. Experimental study of these processes separately is difficult. However, mathematical modeling allows one to study in detail the treatment process at any stage and to analyze the role of each occurring phenomenon separately.

The paper presents a coupled mathematical model of the initial stage of particles' penetration into a metal surface under non-isothermal conditions. It is assumed that the injected particles possess sufficient energy to generate mechanical disturbances on the target surface at the instant of interaction. The model takes into account the finiteness of relaxation time for heat and mass fluxes and the interaction of the waves of different physical nature – distribution of mechanical disturbances and diffusion of injected material. The developed numerical algorithm is based on the implicit difference scheme. The examples of coupled problem solution are given for the cases of treatment by one and two pulses. The differences between resulting distributions are revealed. The work also demonstrates the distortions in the waves of deformation and temperature which represent the consequences of the interaction of studied processes.

**Financial support.** This work was carried out in the framework of the Program of Fundamental Research of the State Academies of Sciences for 2013-2020, line of research III.23.

*Elena S. PARFENOVA* (Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: linasergg@mail.ru

#### REFERENCES

1. Cherenda N.N., Uglov V.V., Anishchik V.M., Stalmashonak A.K., Astashynski V.M., Kuzmickii A.M., Punko A.V., Götz Benedikt Thorwarth, Bernd Stritzker (2006) Modification of high-speed steels by nitrogen compression plasma flow: structure, element composition, tribological properties. *Surface and Coatings Technology*. 200(18-19). pp. 5334–5342. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2005.06.007.
2. Uglov V.V., Kuleshov A.K., Remnev G.E., Saltymakov M.S., Astashinsky V.M. (2011) Модификация твердого сплава Т15К6 мoshchnymi impul'snymi ionnymi puchkami i

- kompressionnymi plazmennymi potokami [Modification of the hard alloy T15K6 by high-power pulsed ion beams and compression plasma flows]. *Izvestiya vuzov. Poroshkovaya metallurgiya i funktsional'nye pokrytiya – Universities' Proceedings. Powder Metallurgy and Functional Coatings*. 3. pp. 63–68.
3. Panin A.V., Kazachenok M.S., Perevalova O.B., Sinyakova E.A., Krukovsky K.V., Martynov S.A. (2018) Mnogourovnevnye mekhanizmy deformatsionnogo povedeniya tekhnicheskogo titana i splava Ti–6Al–4V, podvergnutykh obrabotke vysokochastotnymi elektronnyimi puchkami [Multiscale deformation of commercial titanium and alloy Ti-6Al-4V subjected to high-frequency electron beam treatment]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 21(4). pp. 45–56. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14005.
  4. Astashynski V.M., Leyvi A.Ya., Uglov V.V., Cherenda N.N., Yalovets A.P. (2014) Formation of metal target surface relief during the action of compression plasma flows. *Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 6. pp. 12–17. DOI: 10.7868/S0207352814060055.
  5. Borovitskaya I.V., Nikulin V.Ya., Bondarenko G.G., Mikhaylova A.B., Silin P.V., Gaydar A.I., Paramonova V.V., Peregodova E.N. (2018) Vozdeystvie impul'snykh potokov azotnoy plazmy i ionov azota na strukturu i mekhanicheskie svoystva vanadiya [Effect of pulsed nitrogen plasma and nitrogen ion fluxes on the structure and mechanical properties of vanadium]. *Metally – Russian Metallurgy*. 2. pp. 54–64.
  6. Zhukeshov A.M., Gabdullina A.T. (2009) Vliyanie rezhimov obrabotki impul'snymi potokami plazmy poverkhnosti stali na ee strukturu i mikrotverdost' [Effect of steel surface processing by pulsed plasma fluxes on its structure and microhardness] *Poverkhnost'. Rentgenovskie, sinkhrotronnye i neytronnye issledovaniya – Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 11. pp. 95–101. DOI: 10.7868/S0207352814060055.
  7. Shanin S.A., Knyazeva A.G. (2014) Coupled model of coating formation on a cylindrical substrate. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 55(3). pp. 192–204. DOI: 10.1134/S0021894414030171.
  8. Odzhaev V.B., Plebanovich V.I., Tarasik M.I., Chelyadinskiy A.R. (2017) O vliyani uprugikh napryazheniy na diffuziyu bora v kremnii [About the influence of elastic stresses on the implanted boron diffusion in silicon. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika – Journal of the Belarusian State University. Physics*. 3. pp. 88–94.
  9. Fu Zhen Xuan, Shan-Shan Shao, Zhendong Wang, Shan-Tung Tu (2009) Coupling effects on chemical stresses and external mechanical stresses on diffusion. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 42. pp. 1–8. DOI: 10.1088/0022-3727/42/1/015401.
  10. Demidov V.N., Knyazeva A.G., Il'ina E.S. (2012) Osobennosti modelirovaniya diffuzionnykh protsessov v uprugom tele pri ego poverkhnostnoy modifikatsii chastitsami [The modeling features of diffusion processes in elastic body under particles surface treatment]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo universiteta. Mekhanika – Perm National Research Polytechnic University Mechanics Bulletin*. 3. pp. 25–49.
  11. Parfenova E.S., Knyazeva A.G. (2018) Nachal'naya stadiya formirovaniya perekhodnogo sloya mezhdz plenkoy i podlozhkoy pri nagreve sil'notochnym elektronnyim puchkom [The initial stage of transient layer formation between film and substrate during heating by a high-current electron beam]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 103–117. DOI: 10.17223/19988621/54/9.
  12. Parfenova E.S., Knyazeva A.G. (2019) Neizotermicheskaya mekhanodiffuzionnaya model' nachal'noy stadii vnedreniya potoka chastits v poverkhnost' misheni [Non-isothermal mechanodiffusion model of the initial stage of introduction process of particles flow in a target surface]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 12(1). pp. 36–47. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.1.4.
  13. Sherief H.H., Hamza F., Saleh H. (2004) The theory of generalized thermoelastic diffusion. *International Journal of Engineering Science*. 42(5-6). pp. 591608. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2003.05.001.

14. Aouadi M. (2008) Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media. *Journal of Thermal Stresses*. 31(3). pp. 270–285. DOI: 10.1080/01495730701876742.
15. Knyazeva A.G. (2005) Diffuziya i reologiya v lokal'no-ravnovesnoy termodinamike [Diffusion and rheology in locally-equilibrium thermodynamics]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo universiteta. Mekhanika – Perm National Research Polytechnic University Mechanics Bulletin*. 13. pp. 45–60.
16. Knyazeva A.G. (2011) Nelineynye modeli deformiruemykh sred s diffuziey [Nonlinear models diffusion of deformed media with diffusion]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 14(6). pp. 35–51.

Received: May 16, 2019

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/62/10

**В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик****ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНАХ ПРАВИЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНОЙ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИД, ПОГРУЖЕННЫХ В УПРУГОЕ ТЕЛО**

Рассматриваются особые точки, являющиеся вершинами треугольной и четырехугольной пирамид, погруженных в упругое тело. Изучены ограничения на компоненты напряжений в рассматриваемых точках. Показано, что количество этих ограничений обуславливает неклассическую постановку задачи механики деформируемого тела. Выявлены зависимости между материальными константами скрепляемых элементов, приводящие к неограниченному росту напряжений в вершинах пирамид. Результаты исследований найдут применение в механике композитных материалов, в изучении образцов путем индентирования или взаимодействия с призматическими иглами кантилеверов.

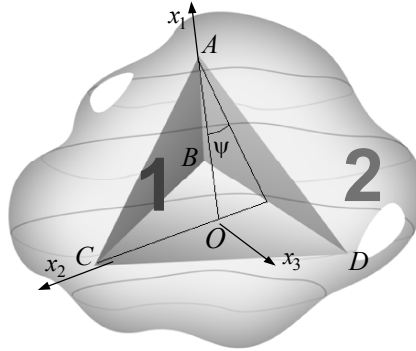
**Ключевые слова:** *внутренняя особая точка, неклассическая задача, концентриция напряжений, элементарный объем.*

Особые точки внутри сплошной среды в виде вершин многогранников, конусов, пространственных ребер присущи, в частности, армированным кристаллическим частицам, коротким волокнам материалов и составным элементам конструкций. Они возникают при внутренних разрушениях компонентов структуры композитов и однородных тел, характерны для исследуемых образцов при внедрении в них инденторов или призматических игл кантилеверов. Изучение особенностей распределения напряжений вблизи особых точек обычно проводится авторами на основе асимптотического подхода (далее классический подход). Применяются методы операционного исчисления [1], интегральных уравнений [2], граничных состояний [3], разложения по различным функциям [4, 5], конечных элементов [6], граничных элементов [7] и др. Напряженное состояние вблизи вершин многогранников, конусов, ребер составных конструкций с использованием классического подхода рассматривались в публикациях [8–17]. В работах [20–24] показано, что достоверность решений, получаемых на основе классического подхода, ограничена областью вне малой окрестности особой точки. Это обстоятельство обусловлено некорректностью задаваемых в особой точке условий. В настоящей работе изучение напряженного состояния в вершинах пирамид, погруженных в упругую среду, проводится на основе подхода, предложенного в работах [20–24]. Основной идеей такого подхода является распространение на особые точки общепринятого представления о том, что с каждой точкой континуума связан элементарный объем. Элементарный объем является носителем материальных свойств среды и параметров состояния (напряжения и деформации). Поэтому задаваемые в точке ограничения на параметры состояния являются ограничениями, накладываемыми на параметры состояния соответствующего ей элементарного объема. Применение данного подхода позволяет выявить задаваемые в особой точке условия и корректно поставить задачу МДТТ.

## 1. Правильная треугольная пирамида, погруженная в упругое тело

### 1.1. Постановка задачи

Рассматривается упругое деформируемое твердое тело 1 с особенностью в виде вершины правильной треугольной пирамиды, непрерывным образом контактирующее с другим упругим телом 2 (рис. 1). С пирамидой связывается декартова ортонормированная система координат  $Ox_1x_2x_3$  с базисом  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Ось  $x_1$  проходит из точки  $O$  центра тяжести треугольника  $BCD$  через вершину  $A$ , ось  $x_2$  – из точки  $O$  через вершину  $C$ , а ось  $x_3$  – из точки  $O$  параллельно стороне основания  $BD$ .



**Рис. 1.** Упругое тело 2 с погруженной в него вершиной  $A$  правильной треугольной пирамиды – тела 1  
**Fig. 1.** Elastic body (2) with an embedded vertex  $A$  of the regular triangular pyramid (1)

Угол между высотой тетраэдра, опущенной из вершины  $A$  на основание, и высотой боковой грани, исходящей из точки  $A$ , обозначается  $\psi$ . Область изменения этого угла задана интервалом  $0 < \psi < \pi/2$ . На гранях тетраэдра вводятся ортонормированные тройки векторов на грани  $ACD$ :

$$\mathbf{n} = \sin \psi \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \mathbf{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \mathbf{e}_3,$$

$$\xi_n = \cos \psi \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \sin \psi \mathbf{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \mathbf{e}_3, \quad \zeta_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3;$$

на грани  $ABC$ :

$$\mathbf{m} = \sin \psi \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \mathbf{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \mathbf{e}_3,$$

$$\xi_m = \cos \psi \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \sin \psi \mathbf{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \mathbf{e}_3, \quad \zeta_m = -\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3; \quad (1)$$

на грани  $ADB$ :

$$\mathbf{l} = \sin \psi \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \mathbf{e}_2, \quad \xi_l = \cos \psi \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \sin \psi \mathbf{e}_2, \quad \zeta_l = \mathbf{e}_3.$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, пара других лежит в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, ис-



ходящей из вершины  $A$  образующего грань треугольника. Введем обозначения для параметров состояния элементарных объемов тел 1,2, содержащих вершину тетраэдра.  $\sigma_{ij}^{(k)}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  – компоненты тензора деформаций; индекс  $k$  отвечает соответствующему из скрепляемых тел. В точках поверхностей соприкосновения напряжения и деформации в указанных элементарных объемах подчиняются следующим условиям непрерывности:

На грани  $ACD$

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_{\xi_n}^{(1)} = \tau_{\xi_n}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_n}^{(1)} = \tau_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(2)}. \quad (2)$$

Обозначено:  $\sigma_n$  – нормальное напряжение на грани;  $\tau_{\xi_n}$  – касательное напряжение в направлении орта  $\xi_n$ ;  $\tau_{\zeta_n}$  – касательное напряжение в направлении орта  $\zeta_n$ ;  $\eta_{\xi_n}$  – относительное удлинение в направлении орта  $\xi_n$ ;  $\eta_{\zeta_n}$  – относительное удлинение в направлении орта  $\zeta_n$ ;  $\eta_{\xi_n \zeta_n}$  – сдвиг между направлениями  $\xi_n$  и  $\zeta_n$ .

На грани  $ABC$  (обозначения аналогичны):

$$\sigma_m^{(1)} = \sigma_m^{(2)}, \quad \tau_{\xi_m}^{(1)} = \tau_{\xi_m}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_m}^{(1)} = \tau_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(2)}. \quad (3)$$

На грани  $ADB$ :

$$\sigma_l^{(1)} = \sigma_l^{(2)}, \quad \tau_{\xi_l}^{(1)} = \tau_{\xi_l}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_l}^{(1)} = \tau_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(2)}. \quad (4)$$

Условия (2) – (4) являются условиями, задаваемыми в вершине  $A$ . Вводятся обозначения для разностей компонент напряжений и деформаций:

$$\zeta_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}, \quad \xi_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)}. \quad (5)$$

С использованием обозначений (5) равенства (2) – (4) запишутся двумя автономными однородными системами линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \zeta_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \zeta_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \zeta_{33} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{13} \sin 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{23} \cos^2 \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \sin 2\psi - \frac{1}{4} \zeta_{22} \sin 2\psi - \frac{3}{4} \zeta_{33} \sin 2\psi + \zeta_{12} \cos 2\psi + \sqrt{3} \zeta_{13} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{23} \sin 2\psi &= 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{22} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{33} \cos \psi + \sqrt{3} \zeta_{12} \sin \psi - \zeta_{13} \sin \psi + \zeta_{23} \cos \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \zeta_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \zeta_{33} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{13} \sin 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{23} \cos^2 \psi &= 0, \quad (6) \\ \zeta_{11} \sin 2\psi - \frac{1}{4} \zeta_{22} \sin 2\psi - \frac{3}{4} \zeta_{33} \sin 2\psi + \zeta_{12} \cos 2\psi - \sqrt{3} \zeta_{13} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{23} \sin 2\psi &= 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{22} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{33} \cos \psi - \sqrt{3} \zeta_{12} \sin \psi - \zeta_{13} \sin \psi + \zeta_{23} \cos \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \sin^2 \psi + \zeta_{22} \cos^2 \psi - \zeta_{12} \sin 2\psi &= 0, \\ \frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi - \zeta_{12} \cos 2\psi &= 0, \\ \zeta_{13} \sin \psi - \zeta_{23} \cos \psi &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xi_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{4} \xi_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \xi_{33} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \xi_{12} \sin 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{13} \sin 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{23} \sin^2 \psi = 0, \\
& 3\xi_{22} + \xi_{33} - \sqrt{3}\xi_{23} = 0, \\
& -\frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{22} \sin \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{33} \sin \psi + \sqrt{3}\xi_{12} \cos \psi - \xi_{13} \cos \psi - \xi_{23} \sin \psi = 0, \\
& \xi_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{4} \xi_{22} \sin^2 \psi + \frac{3}{4} \xi_{33} \sin^2 \psi - \frac{1}{2} \xi_{12} \sin 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{13} \sin 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{23} \sin^2 \psi = 0, \quad (7) \\
& 3\xi_{22} + \xi_{33} + \sqrt{3}\xi_{23} = 0, \\
& \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{22} \sin \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{33} \sin \psi - \sqrt{3}\xi_{12} \cos \psi - \xi_{13} \cos \psi - \xi_{23} \sin \psi = 0, \\
& \xi_{11} \cos^2 \psi + \xi_{22} \sin^2 \psi + \xi_{12} \sin 2\psi = 0, \\
& \xi_{33} = 0, \\
& \xi_{13} \cos \psi + \xi_{23} \sin \psi = 0.
\end{aligned}$$

Системы уравнений (6), (7) содержат по девять уравнений относительно шести параметров. Задача состоит в исследовании (в зависимости от геометрического параметра  $\psi$ ) свойств систем уравнений (6), (7) – условий существования их решения и его построении. Решение систем уравнений (6) – (7) формирует ограничения на параметры состояния элементарных объемов тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды.

### 1.2. Исследование системы уравнений (6)

Посредством тождественных преобразований уравнения (6) приводятся к двум автономным системам уравнений. Первая из них состоит из пяти уравнений относительно четырех параметров  $\zeta_{11}, \zeta_{22}, \zeta_{33}, \zeta_{12}$

$$\begin{aligned}
& \zeta_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \zeta_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \zeta_{33} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi = 0, \\
& \zeta_{11} \sin 2\psi - \frac{1}{4} \zeta_{22} \sin 2\psi - \frac{3}{4} \zeta_{33} \sin 2\psi + \zeta_{12} \cos 2\psi = 0, \\
& \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{22} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{33} \cos \psi + \sqrt{3}\zeta_{12} \sin \psi = 0, \quad (8) \\
& \zeta_{11} \cos^2 \psi + \zeta_{22} \cos^2 \psi - \zeta_{12} \sin 2\psi = 0, \\
& \frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi - \zeta_{12} \cos 2\psi = 0.
\end{aligned}$$

Определитель матрицы первых четырех уравнений системы (8)

$$\Delta = -\frac{9\sqrt{3}}{2} \cos^3 \psi \sin^2 \psi$$

не обращается в нуль в области изменения угла  $\psi$ , следовательно, ранг матрицы

системы уравнений (8) равен четырем, поэтому она имеет единственное нулевое решение

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{33} = \zeta_{12} = 0. \quad (9)$$

Вторая система состоит из четырех уравнений относительно двух параметров  $\zeta_{13}, \zeta_{23}$

$$\begin{aligned} \zeta_{13} \sin 2\psi + \zeta_{23} \cos 2\psi &= 0, & -\zeta_{13} \sin \psi + \zeta_{23} \cos \psi &= 0, \\ \zeta_{13} \cos 2\psi - \frac{1}{2} \zeta_{23} \sin 2\psi &= 0, & \zeta_{13} \sin \psi - \zeta_{23} \cos \psi &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Ранг матрицы системы уравнений (10) равен двум, поэтому она, как и система уравнений (8), имеет лишь нулевое решение

$$\zeta_{13} = \zeta_{23} = 0. \quad (11)$$

Из равенств (9) и (11) следует, что компоненты тензоров напряжений элементарных объемов 1,2, содержащих вершину тетраэдра, одинаковы

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

### 1.3. Исследование системы уравнений (7)

Уравнения (7) тождественными преобразованиями, так же как и уравнения (6), приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает четыре различных уравнения относительно параметров  $\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{12}$ :

$$\begin{aligned} 2\xi_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \xi_{22} \sin^2 \psi + \frac{3}{2} \xi_{33} \sin^2 \psi - \xi_{12} \sin 2\psi &= 0, \\ 3\xi_{22} + \xi_{33} &= 0, \\ -\xi_{22} \sin \psi + \xi_{33} \sin \psi + \xi_{12} \cos \psi &= 0, \\ \xi_{11} \cos^2 \psi + \xi_{22} \sin^2 \psi + \xi_{12} \sin 2\psi &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Определитель матрицы системы уравнений (13)

$$\Delta = 30 \cos^3 \psi \sin^2 \psi$$

в области изменения угла  $\psi$  не обращается в нуль. Следовательно, ранг системы уравнений (13) равен четырем, а ее единственное решение запишется равенствами

$$\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33} = \xi_{12} = 0. \quad (14)$$

Еще три различных уравнения образуют систему относительно параметров  $\xi_{13}, \xi_{23}$ :

$$\begin{aligned} -\xi_{13} \sin 2\psi + \xi_{23} \sin^2 \psi &= 0, \\ \xi_{13} \cos \psi + \xi_{23} \sin \psi &= 0, \\ \xi_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Ранг системы первых двух уравнений (15) равен двум, ее единственное решение лишь нулевое:

$$\xi_{13} = \xi_{23} = 0. \quad (16)$$

Из равенств (14), (16) следует, что деформации в элементарных объемах тел 1, 2, примыкающих к вершине тетраэдра, одинаковы:

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (17)$$

1.4. Ограничения на компоненты напряжений в элементарных объемах тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды

С использованием физических уравнений термоупругости равенства (17) запишем через напряжения

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{33} &= Q, \\ -\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{33} &= Q, \end{aligned} \quad (18)$$

$$-\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{33} = Q;$$

$$\left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{12} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{13} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{23} = 0. \quad (19)$$

В этих равенствах  $E_k, G_k, \nu_k, \omega_k$  ( $i, j = 1, 2, k = 1, 2$ ) – модули Юнга, модули сдвига, коэффициенты Пуассона, коэффициенты температурной деформации скрепляемых тел;  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(k)}$  (так как  $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$ );  $Q = (\omega_1 - \omega_2)\Delta T$ ,  $\Delta T$  – однородное приращение температуры.

Изучим решения систем уравнений (18), (19). Определитель матрицы системы уравнений (18) вычисляется по формуле

$$\Delta = \left(\frac{1}{E_1 E_2}\right)^3 [E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2)]^2 [E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)]. \quad (20)$$

В зависимости от сочетания материальных параметров возможны варианты.

1.  $\Delta \neq 0$ . Из этого условия следует, что  $G_1 \neq G_2$ , поэтому уравнения (18), (19) имеют единственное решение

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{QE_1 E_2}{E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (21)$$

Напряженное состояние в вершине тетраэдра полностью определено. Оказываются известными все двенадцать компонент тензоров напряжений. Из решения (21) видно, что сочетание параметров, удовлетворяющее равенству

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0 \quad (22)$$

является критическим, так как при стремлении сочетания параметров к выполнению равенства (22) напряжения  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  в элементарных объемах, содержащих вершину А, стремятся к бесконечности.

2.  $\Delta = 0$ . Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) \neq 0. \quad (23)$$

Ранг системы уравнений (18) равен двум. Ранг расширенной матрицы равен двум, если  $Q = 0$ , и трем, если  $Q \neq 0$ , поэтому реализуются варианты:

а)  $Q = 0$ . Напряжения  $\sigma_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) подчинены ограничениям (так как в данном случае  $G_1 \neq G_2$ ):

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (24)$$

Общее количество ограничений на компоненты тензоров напряжений тел 1 и 2 в вершине пирамиды равно одиннадцати.

б)  $Q \neq 0$ . Уравнения (18) несовместны. Задача МДТТ не может быть поставлена корректно.

3.  $\Delta = 0$ . Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) \neq 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) = 0. \quad (25)$$

Ранг матрицы системы уравнений (18) равен рангу расширенной матрицы и равен единице. Уравнения совместны. Между напряжениями справедлива зависимость

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -\frac{QE_1E_2}{E_2\nu_1 - E_1\nu_2}.$$

В данном случае  $G_1 = G_2$ , поэтому каких либо дополнительных ограничений на компоненты  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) не накладывается. Общее количество ограничений на компоненты напряжений элементарных объемов тел 1, 2, примыкающих к вершине тетраэдра, равно семи.

4.  $\Delta = 0$ . Причем

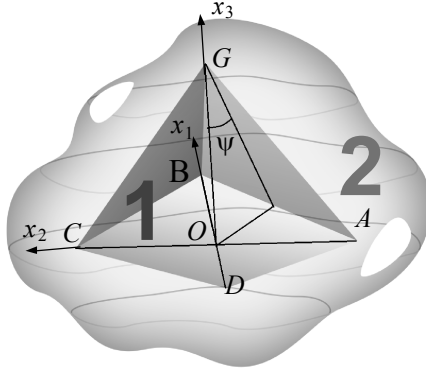
$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) = 0. \quad (26)$$

В этом случае модули Юнга и коэффициенты Пуассона конусов совпадают. Ранг системы уравнений (18) равен нулю. Ранг расширенной матрицы зависит от значений коэффициентов температурной деформации. Если эти коэффициенты совпадают, скрепляемые материалы идентичны, особая точка отсутствует. Когда ранг расширенной матрицы равен единице,  $Q \neq 0$ , уравнения (18) несовместны. Корректная постановка задачи МДТТ становится невозможной.

## 2. Правильная четырехугольная пирамида, погруженная в упругое тело

### 2.1. Постановка задачи

Рассматриваются непрерывным образом скрепленные изотропные упругие тела 1, 2 (рис. 2), одно из которых имеет особенность в виде вершины правильной четырехугольной пирамиды. Применяется изложенный в п. 1 подход. Угол между высотой пирамиды и высотой боковой грани обозначается через  $\psi$ . С пирамидой связываем декартову ортонормированную систему координат  $O, x_1, x_2, x_3$ . Начало координат (т.  $O$ ) совпадает с центром основания пирамиды, а оси  $x_1, x_2$  направляются по его диагоналям. Базисные векторы введенной системы координат обозначаются  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).



**Рис. 2.** Упругое тело 2 с погруженной в него вершиной  $A$  правильной четырехугольной пирамиды – тела 1  
**Fig. 2.** Elastic body (2) with an embedded vertex  $A$  of the regular quadrangular pyramid (1)

На боковых гранях пирамиды вводятся левоориентированные ортонормированные тройки векторов:  
на грани  $BCG$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \mathbf{e}_2 + \sin \psi \mathbf{e}_3, \\ \xi_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \mathbf{e}_2 - \cos \psi \mathbf{e}_3, \\ \zeta_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_2; \end{aligned} \quad (27)$$

на грани  $CDG$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \mathbf{e}_2 + \sin \psi \mathbf{e}_3, \\ \xi_m &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \mathbf{e}_2 - \cos \psi \mathbf{e}_3, \\ \zeta_m &= \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_2; \end{aligned} \quad (28)$$

на грани  $DAG$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \mathbf{e}_2 + \sin \psi \mathbf{e}_3, \\ \xi_l &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \mathbf{e}_2 - \cos \psi \mathbf{e}_3, \\ \zeta_l &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_2; \end{aligned} \quad (29)$$

на грани  $ABG$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \mathbf{e}_2 + \sin \psi \mathbf{e}_3, \\ \xi_k &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \mathbf{e}_2 - \cos \psi \mathbf{e}_3, \\ \zeta_k &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, два других лежит в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, исходящей из вершины  $G$  треугольника, образующего грань. Для элементарных объемов тел 1 и 2, примыкающих к вершине пирамиды, в точках поверхностей соприкосновения выполняются условия (сохраняются принятые ранее обозначения):

на грани  $BCG$ :

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_{\xi_n}^{(1)} = \tau_{\xi_n}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_n}^{(1)} = \tau_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(2)}; \quad (31)$$

на грани  $CDG$ :

$$\sigma_m^{(1)} = \sigma_m^{(2)}, \quad \tau_{\xi_m}^{(1)} = \tau_{\xi_m}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_m}^{(1)} = \tau_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(2)}; \quad (32)$$

на грани  $DAG$ :

$$\sigma_l^{(1)} = \sigma_l^{(2)}, \quad \tau_{\xi_l}^{(1)} = \tau_{\xi_l}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_l}^{(1)} = \tau_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(2)}; \quad (33)$$

на грани  $ABG$ :

$$\sigma_k^{(1)} = \sigma_k^{(2)}, \quad \tau_{\xi_k}^{(1)} = \tau_{\xi_k}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_k}^{(1)} = \tau_{\zeta_k}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_k}^{(1)} = \eta_{\zeta_k}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k \zeta_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k \zeta_k}^{(2)}. \quad (34)$$

Условия (31) – (34) с использованием обозначений (5) запишутся двумя автономными линейными однородными системами уравнений. Первая из них содержит двенадцать уравнений относительно шести параметров  $\zeta_{ij}$ :

$$\frac{1}{2} \zeta_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \zeta_{22} \cos^2 \psi + \zeta_{33} \sin^2 \psi + \zeta_{12} \cos^2 \psi + \sqrt{2} \zeta_{13} \sin \psi \cos \psi + \sqrt{2} \zeta_{23} \sin \psi \cos \psi = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \zeta_{11} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin \psi \cos \psi - \zeta_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \cos 2\psi - \\ - \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta_{13} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta_{23} \cos 2\psi = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \zeta_{11} \cos \psi - \frac{1}{2} \zeta_{22} \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta_{13} \sin \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta_{23} \sin \psi = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \zeta_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \zeta_{22} \cos^2 \psi + \zeta_{33} \cos^2 \psi - \zeta_{12} \sin \psi \cos \psi - \\ - \sqrt{2} \zeta_{13} \sin \psi \cos \psi - \sqrt{2} \zeta_{23} \sin \psi \cos \psi = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \zeta_{11} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin \psi \cos \psi - \zeta_{33} \sin \psi \cos \psi - \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin \psi \cos \psi + \\ + \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta_{13} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta_{23} \cos 2\psi = 0, \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4}\zeta_{11} \cos \psi + \frac{1}{2}\zeta_{22} \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13} \sin \psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23} \sin \psi = 0, \quad (35)$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2}\zeta_{22} \cos^2 \psi + \zeta_{33} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \cos \psi - \sqrt{2}\zeta_{13} \cos \psi \sin \psi - \sqrt{2}\zeta_{23} \cos \psi \sin \psi = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\zeta_{11} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2}\zeta_{22} \sin \psi \cos \psi - \zeta_{33} \sin \psi \cos \psi + \zeta_{12} \sin \psi \cos \psi + \\ + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23} \cos 2\psi = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11} \cos \psi - \frac{1}{2}\zeta_{22} \cos \psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13} \sin \psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23} \sin \psi = 0,$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2}\zeta_{22} \cos^2 \psi + \zeta_{33} \sin^2 \psi - \zeta_{12} \cos \psi + \sqrt{2}\zeta_{13} \cos \psi \sin \psi - \sqrt{2}\zeta_{23} \cos \psi \sin \psi = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\zeta_{11} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2}\zeta_{22} \sin \psi \cos \psi - \zeta_{33} \sin \psi \cos \psi - \zeta_{12} \sin \psi \cos \psi - \\ - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23} \cos 2\psi = 0, \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\zeta_{11} \cos \psi + \frac{1}{2}\zeta_{22} \cos \psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13} \sin \psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23} \sin \psi = 0.$$

Вторая система состоит из двенадцати уравнений относительно шести параметров  $\xi_{ij}$ :

$$\frac{1}{2}\xi_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{2}\xi_{22} \sin^2 \psi + \xi_{33} \cos^2 \psi + \xi_{12} \sin^2 \psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13} \sin 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23} \sin 2\psi = 0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11} + \frac{1}{2}\xi_{22} - \xi_{12} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11} \sin \psi - \frac{1}{2}\xi_{22} \sin \psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13} \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23} \cos \psi = 0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{2}\xi_{22} \sin^2 \psi + \xi_{33} \cos^2 \psi - \xi_{12} \sin^2 \psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13} \sin 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23} \sin 2\psi = 0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11} + \frac{1}{2}\xi_{22} + \xi_{12} = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\xi_{11} \sin \psi + \frac{1}{2}\xi_{22} \sin \psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13} \cos \psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23} \cos \psi = 0, \quad (36)$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{2}\xi_{22} \sin^2 \psi + \xi_{33} \cos^2 \psi + \xi_{12} \sin^2 \psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13} \sin 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23} \sin 2\psi = 0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11} + \frac{1}{2}\xi_{22} - \xi_{12} = 0,$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \xi_{11} \sin \psi - \frac{1}{2} \xi_{22} \sin \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \xi_{13} \cos \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \xi_{23} \cos \psi &= 0, \\ \frac{1}{2} \xi_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{2} \xi_{22} \sin^2 \psi + \xi_{33} \cos^2 \psi - \xi_{12} \sin^2 \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \xi_{13} \sin 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \xi_{23} \sin 2\psi &= 0, \\ \frac{1}{2} \xi_{11} + \frac{1}{2} \xi_{22} + \xi_{12} &= 0, \\ -\frac{1}{2} \xi_{11} \sin \psi + \frac{1}{2} \xi_{22} \sin \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \xi_{13} \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \xi_{23} \cos \psi &= 0. \end{aligned}$$

Задача состоит в исследовании решений систем уравнений (35) и (36). Такие решения являются задаваемыми ограничениями на параметры состояния тел 1 и 2 в вершине пирамиды.

## 2.2. Исследование системы уравнений (35)

Посредством тождественных преобразований уравнения (35) приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает шесть уравнений относительно четырех компонент  $\zeta_{11}, \zeta_{22}, \zeta_{33}, \zeta_{12}$ :

$$\begin{aligned} \zeta_{11} \cos^2 \psi + \zeta_{22} \cos^2 \psi + 2\zeta_{33} \sin^2 \psi + 2\zeta_{12} \cos^2 \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \cos^2 \psi + \zeta_{22} \cos^2 \psi + 2\zeta_{33} \sin^2 \psi - 2\zeta_{12} \cos^2 \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \sin \psi \cos \psi + \zeta_{22} \sin \psi \cos \psi - 2\zeta_{33} \sin \psi \cos \psi + 2\zeta_{12} \sin \psi \cos \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \sin \psi \cos \psi + \zeta_{22} \sin \psi \cos \psi - 2\zeta_{33} \sin \psi \cos \psi - 2\zeta_{12} \sin \psi \cos \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \cos \psi - \zeta_{22} \cos \psi &= 0, \\ -\zeta_{11} \cos \psi + \zeta_{22} \cos \psi &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Вторая система состоит из шести уравнений относительно двух компонент  $\zeta_{13}, \zeta_{23}$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \zeta_{13} \sin 2\psi + \sqrt{2} \zeta_{23} \sin 2\psi &= 0, \\ -\sqrt{2} \zeta_{13} \sin 2\psi + \sqrt{2} \zeta_{23} \sin 2\psi &= 0, \\ -\sqrt{2} \zeta_{13} \cos 2\psi - \sqrt{2} \zeta_{23} \cos 2\psi &= 0, \\ \sqrt{2} \zeta_{13} \cos 2\psi - \sqrt{2} \zeta_{23} \cos 2\psi &= 0, \\ \sqrt{2} \zeta_{13} \sin \psi - \sqrt{2} \zeta_{23} \sin \psi &= 0, \\ \sqrt{2} \zeta_{13} \sin \psi + \sqrt{2} \zeta_{23} \sin \psi &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

При изменении угла  $\psi$  в интервале  $(0, \pi/2)$  ранг матрицы системы уравнений (37) равен четырём, а ранг матрицы системы уравнений (38) равен двум. Из этого следует, что единственное решение уравнений (37), (38) имеет вид

$$\zeta_{ij} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (39)$$

Решение (39) означает, что компоненты напряжений в элементарных объемах тел 1, 2, стягиваемых к вершине пирамиды, одинаковы

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (40)$$

### 2.3. Исследование системы уравнений (36)

Тождественными преобразованиями уравнения (36) приводятся к трем автономным системам

$$\xi_{11} + \xi_{22} + 2\xi_{12} = 0, \quad \xi_{11} + \xi_{22} - 2\xi_{12} = 0, \quad \xi_{11} - \xi_{22} = 0, \quad (41)$$

$$\xi_{13} + \xi_{23} = 0, \quad \xi_{13} - \xi_{23} = 0, \quad (42)$$

$$\xi_{33} = 0. \quad (43)$$

Легко видеть, что уравнения (41) – (43) имеют лишь нулевое решение

$$\xi_{ij} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (44)$$

Равенства (44) говорят о том, что компоненты деформаций тел 1 и 2 в элементарных объемах, содержащих вершину пирамиды, совпадают

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (45)$$

### 2.4. Компоненты напряжений тел 1, 2 в элементарных объемах, содержащих вершину пирамиды

Равенства (45) совпадают с равенствами (17), полученными в п. 1. для правильной треугольной пирамиды. Поэтому записанные через напряжения равенства (45) совпадут с уравнениями (18), (19). Анализ решений этих уравнений, приведенный в п. 1.4 для компонент тензора напряжений в вершине правильной треугольной пирамиды, остается справедливым и для компонент тензора напряжений правильной четырехугольной пирамиды. Отметим, что результаты исследований компонент тензора напряжений в вершинах правильных треугольной и четырехугольной пирамид, взаимодействующих с упругим телом, совпадают с исследованиями рассматриваемых параметров состояния в точках пространственного ребра и вершине конуса, непрерывно скрепленных с упругим телом [20, 22].

## Заключение

Положение механики сплошных сред о том, что с каждой точкой континуума связан элементарный объем, являющийся носителем и материальных свойств и параметров состояния среды, считается справедливым и для особых точек деформируемых твердых тел. На основе данного утверждения изучены параметры состояния в вершинах треугольной и четырехугольной пирамид, погруженных в изотропное упругое тело. Показано, что количество задаваемых ограничений на компоненты напряжений в рассматриваемой точке превышает количество ограничений, соответствующее классической постановке задачи. В этом смысле задача о напряженном состоянии в вершине многогранника, погруженного в упругую среду, оказывается неклассической. Выявлено, что зависимость ограничений на компоненты напряжений в вершине рассматриваемых многогранников от упругих констант скрепляемых тел и температуры одинакова. Эта же зависимость характерна и для вершины кругового конуса, и точки пространственного ребра упругого элемента, погруженных в упругую среду. Результаты исследований могут найти применение в механике ар-

мированных материалов, а также в исследовании напряженного состояния образцов с использованием инденторов Берковича и Виккерса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // *J. App. Mech.* 1952. V. 19. P. 526–528.
2. *Андреев А.В.* Суперпозиция степенно-логарифмических и степенных сингулярных решений в двумерных задачах теории упругости // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* 2014. № 1. С. 5–30.
3. *Рязанцева Е. А.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Е.А.Рязанцева. Липецк, 2015. 215 с.
4. *Kovalenko, M.D., Menshova, I.V., Kerzhaev, A.P.* et al. Mixed boundary value problems in the theory of elasticity in an infinite strip // *Acta Mech.* 2018. 229. 4339. DOI: 10.1007/s00707-018-2244-x.
5. *He Z., Kotousov A.* On Evaluation of Stress Intensity Factor from In-Plane and Transverse Surface Displacements // *Experim. Mech.* 2016. V. 56. No. 8. P. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8.
6. *Xu W., Tong Z., Leung, A.Y.T., Xu X., Zhou Z.* Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending // *Eng. Frac. Mech.* 2016. V. 168. P. 11–25. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.09.009.
7. *Koguchi H., Antonio da Costa J.* Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface // *Int. J. Solids and Struc.* 2010. V. 47. P. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015
8. *Nkemzi B.* On solution of Lamé equations in axisymmetric domains with conical points // *Math. Methods Appl. Sciences* . 2005. V. 28. No. 1. P. 29–41.
9. *Корепанова Т.О., Матвеевко В.П., Шардаков И.Н.* Аналитические построения собственных решений для изотропных конических тел и их приложения для оценки сингулярности напряжений // *Докл. АН.* 2014. Т. 457. № 3. С. 286–291. DOI: 10.7868/s0869565214210105.
10. *Koguchi H., Muramoto T.* The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints // *Int. J. Solids and Structures.* 2000. V. 37(35). P. 4737–4762. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00159-6.
11. *Mittelstedt C., Becker W.* Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method // *Int. J. Solids and Structures.* 2006. V. 43. No. 10. P. 2868–2903. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.059.
12. *Lee Y., Jeon I., Im S.* The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite // *Int. J. Solids and Struc.* 2006. V. 43(9). P. 2710–2722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050.
13. *Zhixue W.* A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity // *Engineering Fracture Mechanics.* 2005. V. 73(7). P. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.10.010.
14. *Koguchi H., da Costa J. A.* Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface // *Int. J. Solids and Struc.* 2010. V. 47. P. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
15. *Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P.* On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // *A.P.Z. Angew. Math. Phys.* 2018. No. 69. P. 121–138. DOI: 10.1007/s00033-018-1013-y.
16. *Apel T., Mehrmann V., Watkins D.* Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2002. No. 191. P. 4459–4473.
17. *Wu Z.* A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity // *Eng. Fract. Mech.* 2006. V. 73. No 7. P. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.10.010

18. Miyazaki T., Inoue T., Noda N.A. Practical method for analyzing singular index and intensity of singular stress field for three dimensional bonded plate (Conference Paper) // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. V. 372(1). P. 0120022018.
19. Ping X., Chen M., Zhu W., Xiao Y., Wu W. Computations of Singular Stresses Along Three-Dimensional Corner Fronts by a Super Singular Element Method // Int. J. Comp. Methods. 2017. V. 14(6). P. 1750065
20. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Ограничения на параметры напряженного состояния в вершине кругового конуса // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/52/9.
21. Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Landik L.V. Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs// Mechanics of Composite Materials. 2015. V. 51. No. 4. P. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
22. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // Mechanics of Composite Materials. 2017. V. 53. No. 1. P. 107–116. DOI: 10.1007/s11029-017-9644-1.
23. Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Landik L.V. Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface // Latin American Journal of Solids and Structures. 2017. V. 14. No. 11. P. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
24. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Restrictions on the stress components in the edge points of the homogeneous elastic body // Engineering Solid Mechanics. 2019. V. 7. No. 3. P. 229–246. DOI: 10.5267/j.esm.2019.5.001.

Статья поступила 04.05.2019 г.

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2019) RESTRICTIONS ON STRESS COMPONENTS IN THE VERTICES OF REGULAR TRIANGULAR AND QUADRANGULAR PYRAMIDS EMBEDDED IN ELASTIC BODY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 119–134

DOI 10.17223/19988621/62/10

Keywords: internal singular point, non-classical problem, stress concentration, elementary volume.

In the framework of continuous model of deformable bodies, each point of the continuum is associated with an elementary volume. The concepts of continuum mechanics regarding material properties and state parameters (stresses, strains) are applicable to this volume. In the paper, this statement extends to singular points which are the vertices of triangular and quadrangular pyramids embedded in an elastic body. The restrictions on the stress components at the considered points are studied. It is shown that the number of restrictions determines a non-classical formulation of the problem of mechanics of a deformable body. The dependences for material constants of the bonded elements, which lead to an unlimited increase in the stresses in the vertices of triangular and quadrangular pyramids immersed in an elastic medium, are found to be the same. Moreover, these dependences coincide with those known for a circular cone and a spatial edge. The investigation results will find application in the mechanics of composite materials when studying the samples by indentation or interaction with prismatic cantilevers.

*Valeriy M. PESTRENIN* (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: PestreninVM@mail.ru

*Irena V. PESTRENINA* (Candidate of Technical Sciences, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

*Lidiya V. LANDIK* (Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

## REFERENCES

1. Williams M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension. *Journal of Applied Mechanics*. 19. pp. 526–528.
2. Andreev A.V. (2014) Superpozitsiya stepenno-logarifmicheskikh i stepennykh singulyarnykh resheniy v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti [Superposition of power-logarithmic and power singular solutions in two-dimensional elasticity problems]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 1. pp. 5–30.
3. Ryazantseva E.A. (2015) *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti s singulyarnostyami fizicheskogo i geometricheskogo kharaktera* [Method of boundary conditions in the problems of elasticity theory with physical and geometrical singularities]. Dissertation. Lipetsk.
4. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. (2018) Mixed boundary value problems in the theory of elasticity in an infinite strip. *Acta Mechanica*. 229(11). pp. 4339–4356. DOI: 10.1007/s00707-018-2244-x.
5. He Z., Kotousov A. (2016) On evaluation of stress intensity factor from in-plane and transverse surface displacements. *Experimental Mechanics*. 56(8). pp. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8.
6. Xu W., Tong Zh., Leung A.Y.T., Xu X., Zhou Zh. (2016) Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending. *Engineering Fracture Mechanics*. 168(A). pp. 11–25. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.09.009.
7. Koguchi H., da Costa J.A. (2010) Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface. *International Journal of Solids and Structures*. 47(22-23). pp. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
8. Nkemzi B. (2005) On solution of Lamé equations in axisymmetric domains with conical points. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 28(1). pp. 29–41. DOI: 10.1002/mma.547.
9. Korepanova T.O., Matveenkov V.P., Shardakov I.N. (2014) Analiticheskie postroeniya sobstvennykh resheniy dlya izotropnykh konicheskikh tel i ikh prilozheniya dlya otsenki singulyarnosti napryazheniy [Analytical constructions of eigensolutions for isotropic conical bodies and their applications for estimating stress singularity]. *Doklady Akademii nauk*. 457(3). pp. 286–291. DOI: 10.7868/s0869565214210105.
10. Koguchi H., Muramoto T. (2000) The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints. *International Journal of Solids and Structures*. 37(35). pp. 4737–4762. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00159-6.
11. Mittelstedt C., Becker W. (2006) Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method. *International Journal of Solids and Structures*. 43(10). pp. 2868–2903. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.059.
12. Lee Y., Jeon I., Im S. (2006) The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite. *International Journal of Solids and Structures*. 43(9). pp. 2710–2722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050.
13. Zhixue W.A. (2005) A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity. *Engineering Fracture Mechanics*. 73(7). pp. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.10.010.
14. Koguchi H., da Costa J.A. (2010) Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface. *International Journal of Solids and Structures*. 47(22-23). pp. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
15. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. (2018) On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 69. pp. 121–138. DOI: 10.1007/s00033-018-1013-y.
16. Apel T., Mehrmann V., Watkins D. (2002) Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures. *Computer Methods in*

- Applied Mechanics and Engineering*. 191(39-40). pp. 4459–4473. DOI: 10.1016/S0045-7825(02)00390-0.
17. Wu Zh. (2006) A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity. *Engineering Fracture Mechanics*. 73(7). pp. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.10.010.
  18. Miyazaki T., Inoue T., Noda N.A. (2018) Practical method for analyzing singular index and intensity of singular stress field for three dimensional bonded plate. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 372(012002). pp. 1–8. DOI: 10.1088/1757-899X/372/1/012002.
  19. Ping X., Chen M., Zhu W., Xiao Y., Wu W. (2017) Computations of singular stresses along three-dimensional corner fronts by a super singular element method. *International Journal of Computational Methods*. 14(6). 1750065. DOI: 10.1142/S0219876217500657.
  20. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) Ogranicheniya na parametry napryazhennogo sostoyaniya v vershine krugovogo konusa [Restrictions on stress components in the top of round cone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University. Journal of mathematics and mechanics*. 52. pp. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/52/9.
  21. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs. *Mechanics of Composite Materials*. 51(4). pp. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
  22. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. (2017) Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure. *Mechanics of Composite Materials*. 53(1). pp. 107–116. DOI: 10.1007 / s11029-017-9644-1.
  23. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 14(11). pp. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
  24. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2019) Restrictions on the stress components in the edge points of the homogeneous elastic body. *Engineering Solid Mechanics*. 7(3). pp. 229–246. DOI: 10.5267/j.esm.2019.5.001.

Received: May 4, 2019

УДК 533.69  
DOI 10.17223/19988621/62/11

С.В. Тимченко

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕХМЕРНОЙ КОМПОНОВКИ КРЫЛО – ФЮЗЕЛЯЖ – МОТОГОНДОЛА – ПИЛОН ДВИГАТЕЛЯ ШИРОКОФЮЗЕЛЯЖНОГО ДАЛЬНЕМАГИСТРАЛЬНОГО САМОЛЕТА<sup>1</sup>

Приведены результаты численных расчетов аэродинамических характеристик полной трехмерной компоновки крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета оптимальной формы в широком диапазоне изменения условий полета. Аэродинамический анализ данной начальной конфигурации был проведен с использованием программного продукта OPTIMENGA\_AERO\_ANALYSIS, который представляет собой компьютерную систему для высокоточного расчёта вязких течений около аэродинамических тел сложной конфигурации.

**Ключевые слова:** широкофюзеляжный дальнемагистральный самолет, полные уравнения Навье – Стокса, коэффициент сопротивления, момент тангажа, коэффициент подъемной силы.

Оптимальное аэродинамическое проектирование является важной составной частью создания летательного аппарата, поскольку именно на этом этапе определяется возможность определения такой геометрии самолета, которая, с одной стороны, гарантирует выполнение всех основных технических характеристик полета (дальность, грузоподъемность и топливная эффективность), а с другой, удовлетворяет всем геометрическим и аэродинамическим ограничениям, включая требование на устойчивость полета. Поскольку цена вопроса при этом чрезвычайно высока, понятно, что успешное завершение стадии предварительного проектирования и достижение всех целей, поставленных перед этой стадией проекта, является ключевым фактором для успеха проекта создания самолета в целом.

Ранее в [1] именно этот подход, в основе которого лежат методы высокоточного математического моделирования и глобального оптимального поиска с использованием суперкомпьютерных технологий, и использовался для оптимального аэродинамического проектирования крыла широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета. В развитие этой работы было получено решение задачи оптимизации крыла в полной трехмерной компоновке крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета. При этом ограничения на форму крыла были те же, что и в [1], а фюзеляж, мотогондола и пилон двигателя считались заданными. Однако получение оптимальной аэродинамической формы не завершает работу по оптимальному аэродинамическому проектированию – полученная оптимальная форма должна быть исследована с точки зрения аэродинамики.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации Проекта RFMEFI57617X0103.

## 2. Метод решения задачи

Для решения поставленной выше задачи был использован программный продукт OPTIMENGA\_AERO\_ANALYSIS, который представляет собой компьютерную систему для высокоточного расчёта вязких течений около аэродинамических тел сложной конфигурации.

Выбор адекватной математической модели, описывающей течение около летательного аппарата, также является компромиссом между необходимой точностью описания и сложностью решения соответствующей начально-краевой задачи. В нашем случае, поскольку для расчета целевой функции  $C_x$  необходимо учитывать эффекты вязко-невязкого взаимодействия, было принято решение использовать в качестве базовых уравнений осредненные по числу Рейнольдса уравнения Навье – Стокса [1–3]. Правильный выбор численного метода решения осредненных по числу Рейнольдса полных уравнений Навье – Стокса вязкой сжимаемой жидкости в турбулентном режиме является одним из ключевых факторов успешного решения всей задачи оптимального проектирования.

При дискретизации сжимаемых уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа используется метод конечных объёмов с явной схемой аппроксимации потоков. В пространственной аппроксимации потоков конвективные потоки на гранях ячеек интерполируются по данным в центрах ячеек посредством двух интерполяционных операторов: характеристического оператора первого порядка и ENO (Essentially non-Oscillatory – Существенно не-Осцилляционного) оператора высокого порядка. Шаблон характеристической схемы первого порядка, фактически применяемой при релаксации, состоит из одной точки, выбранной по знаку соответствующего собственного числа.

Метод ENO (предложенный А. Хартемом и С. Ошером и затем упрощённый С.-В. Шу и С. Ошером [4, 5]) применяется посредством выбора интерполяционного шаблона по локальным характеристикам и гладкости потоков, и может изменяться по ходу итераций. При этом применяется характеристическая декомпозиция, и интерполяция производится в соответствующих характеристических полях. Интерполяционный шаблон ENO определяется отдельно в каждом характеристическом поле, сначала по знаку соответствующего собственного числа, а затем в соответствии с гладкостью интерполируемых потоков. Чтобы вернуться к декартовым потокам после интерполяции, значения интерполированных характеристических потоков проектируются обратно.

Таким образом, схема ENO применяется только при вычислении поправки на дефект, а большая часть работы осуществляется посредством относительно дешёвой в вычислительном отношении характеристической схемы первого порядка.

Вязкие члены аппроксимируются напрямую. Для интегрирования по времени используется схема Рунге – Кутты третьего порядка, сохраняющая полную вариацию (TVD) [5]. Более подробное описание численного метода дано в [6 и 7].

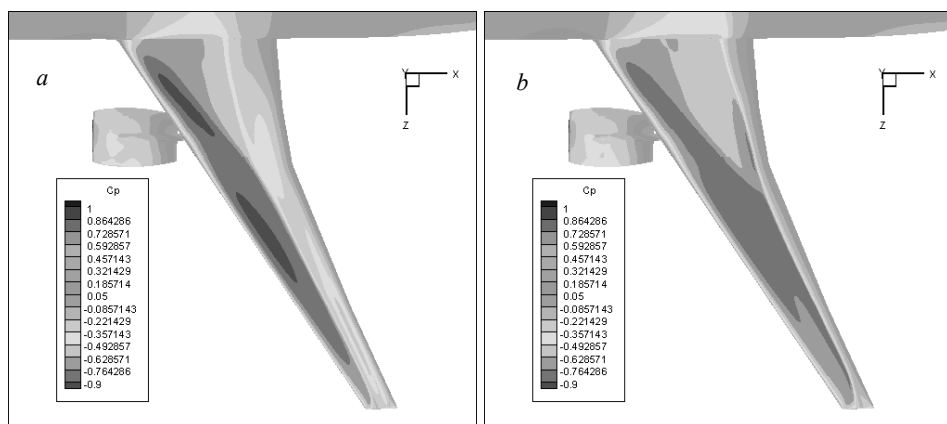
## 3. Результаты расчетов

Расчётная сетка для конфигурации крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя состояла из 115 блоков и содержала в общей сложности 3 670 784 расчетных ячейки. Благодаря использованию условия симметрии, сетка строилась только для половины конфигурации (от плоскости симметрии до численной «бесконечности»).



Для повышения точности расчетов шаги сетки были неравномерными и сетка сгущалась в области течения с большими градиентами. Так же как и при проведении расчетов начальной геометрии рассматриваемой топологии летательного аппарата, шаг сетки вдоль поверхности крыла в окрестности передней кромки составлял порядка 0.2 % от локальной хорды крыла, а в окрестности задней кромки был порядка 0.45 %. Величина 1-го шага по направлению по нормали к поверхности крыла составлял 0.02 мм.

Перейдем теперь к анализу полученных результатов. Распределения давления на поверхности рассмотренной компоновки при значении коэффициента подъемной силы  $C_Y = 0.55$  (соответствующей точке проектирования по данному параметру) в диапазоне чисел Маха набегающего потока в окрестности крейсерского режима полета приведены на рис. 1. Видно, что имеющийся у начальной конфигурации лямбда-скачок отсутствует у оптимальной компоновки с данной топологией в основной точке проектирования при  $M = 0.86$  и начинает лишь зарождаться при  $M = 0.87-88$ .

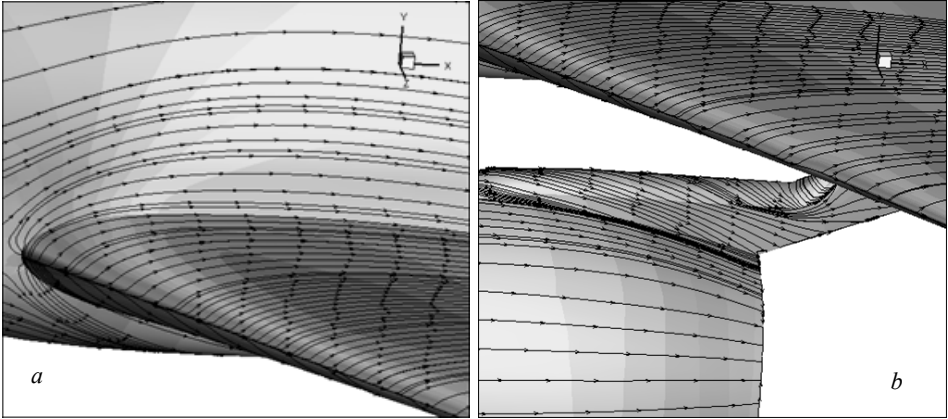


**Рис. 1.** Распределение  $C_p$  на верхней поверхности конфигурации крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета оптимальной формы при  $C_Y = 0.55$ ;  $a - M = 0.85$ ,  $b - M = 0.88$

**Fig. 1.** Distribution of  $C_p$  on the upper surface of wing – fuselage – engine nacelle – engine pylon configuration for a wide-body long-range aircraft of optimal shape at  $C_Y = 0.55$ ;  $M = (a) 0.85$ ,  $(b) 0.88$

Одним из источников возникновения дополнительного сопротивления является появление зоны отрыва потока в области стыковки крыла с фюзеляжем и в окрестности состыковки мотогондолы, пилона и крыла. Хорошим индикатором этого явления является поведение линий тока в этих областях. В связи с этим на рис. 2 приведены картины линий тока на поверхности тела для условий обтекания близких к основным точкам проектирования при высоких числах Маха и большом значении коэффициента подъемной силы.

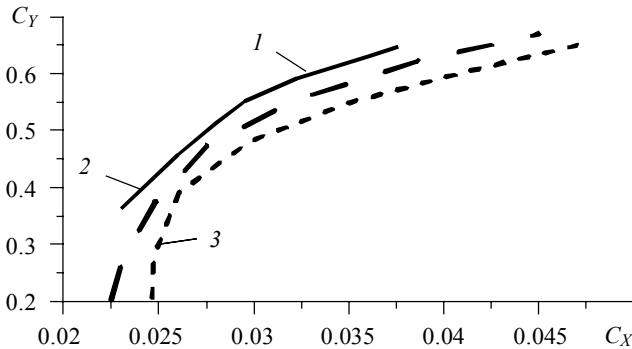
Как видно из этих рисунков, признаков отрыва в указанных областях для рассмотренной оптимальной конфигурации крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета не наблюдается, что является косвенным подтверждением оптимального характера проведенного аэродинамического проектирования.



**Рис. 2.** Картина линий тока на поверхности конфигурации крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета оптимальной формы при  $M = 0.86$ ,  $C_Y = 0.55$ : *a* – в области состыковки крыла с фюзеляжем (вид сверху), *b* – в области состыковки пилона с крылом и мотогондолой

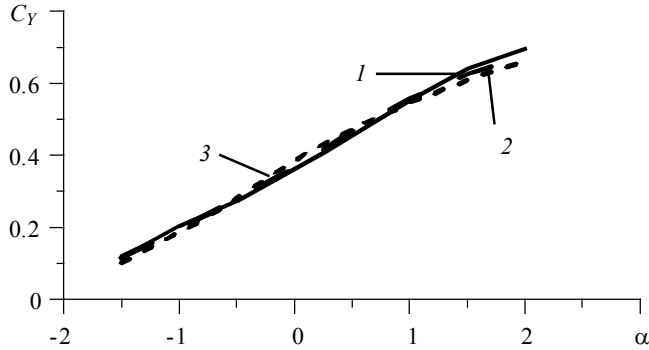
**Fig. 2.** Streamline distribution on the surface of wing – fuselage – engine nacelle – engine pylon configuration for a wide-body long-range aircraft of optimal shape at  $M = 0.86$ ,  $C_Y = 0.55$ : at a joint place for (a) wing and fuselage (top view) and (b) pylon with a wing and nacelle

Перейдем теперь к анализу интегральных характеристик рассмотренной оптимальной конфигурации «крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя» широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета. Соответствующие сравнения показали, что компоновка с оптимальной формой крыла имеет значительно меньшее сопротивление по сравнению с начальной геометрией. В основной точке проектирования при  $M = 0.86$  снижение составило 6.5 аэродинамических каунта,



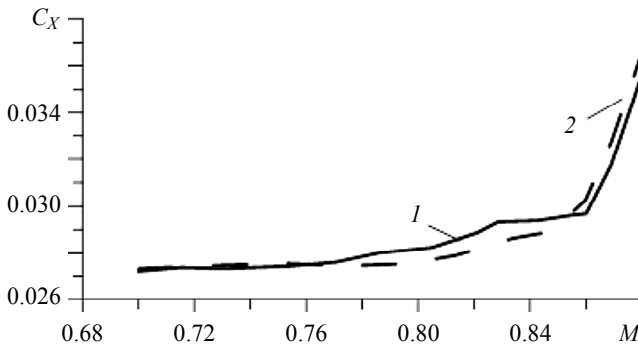
**Рис. 3.** Сравнения поляра сопротивления конфигурации «крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя» широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета оптимальной формы при  $M = 0.86$  (линия 1),  $M = 0.87$  (линия 2),  $M = 0.88$  (линия 3)

**Fig. 3.** Comparison of the drag polar for “wing-fuselage-engine nacelle-engine pylon” configuration for a wide-body long-range aircraft of optimal shape at  $M = (1) 0.86$ , (2) 0.87, and (3) 0.88



**Рис. 4.** Сравнения зависимости коэффициента подъемной силы  $C_Y$  от угла атаки для конфигурации «крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя» широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета оптимальной формы при  $M = 0.86$  (линия 1),  $M = 0.87$  (линия 2),  $M = 0.88$  (линия 3)

**Fig. 4.** Comparison of the dependencies of the lift coefficient  $C_Y$  on the angle of attack for a “wing-fuselage-engine nacelle-engine pylon” configuration of a wide-body long-range aircraft of optimal shape at  $M = (1) 0.86$ , (2) 0.87, and (3) 0.88



**Рис. 5.** Сравнения зависимостей коэффициента полного сопротивления  $C_X$  от числа Маха набегающего потока при фиксированном значении коэффициента подъемной силы  $C_Y = 0.55$  для конфигурации «крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя» широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета начальной (линия 2) и оптимальной (линия 1) формы

**Fig. 5.** Comparison of the dependencies of the drag coefficient  $C_X$  on the Mach number of the approach flow at a fixed value of the lift coefficient  $C_Y = 0.55$  for a “wing-fuselage-engine nacelle-engine pylon” configuration of a wide-body long-range aircraft of initial (2) and optimal (1) shape

при  $M = 0.87$  снижение составило 12.0 аэродинамических каунта, а при  $M = 0.88$  снижение составило 11.1 аэродинамических каунта. Как видно из поляр сопротивления (зависимости коэффициента подъемной силы  $C_Y$  от коэффициента полного сопротивления  $C_X$ ) для различных условий полета, представленных на рис. 3,

такое снижение имеет нелокальный характер и сохраняется в широком диапазоне углов атаки.

Дополнительная информация об интегральных аэродинамических характеристиках рассмотренной компоновки может быть получена из рис. 4, на котором представлены зависимости коэффициента подъемной силы  $C_Y$  от угла атаки, и из рис. 5, где приведена зависимость коэффициента полного сопротивления  $C_X$  от числа Маха.

### Заключение

Таким образом, анализ результатов численного расчета аэродинамических характеристик конфигурации крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета оптимальной формы в широком диапазоне условий полета позволяет сделать следующие выводы:

- конфигурация крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета оптимальной формы обладает малым волновым сопротивлением в основной точке проектирования  $C_Y = 0.55$ ,  $M = 0.86$  и может эксплуатироваться при крейсерском полете при  $M = 0.86$ ;
- оптимальное аэродинамическое проектирование позволило сдвинуть волновой кризис в сторону больших чисел Маха не менее чем на 0.02;
- конфигурация крыло – фюзеляж – мотогондола – пилон двигателя широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета оптимальной формы обладает значительно лучшими аэродинамическими характеристиками по сравнению с базовым в широком диапазоне чисел Маха и коэффициента подъемной силы;
- оптимальная конфигурация отвечает всем заданным геометрическим и аэродинамическим ограничениям.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Пейгин С.В., Пуцин Н.А., Болсуновский А.Л., Тимченко С.В. Оптимальное аэродинамическое проектирование крыла широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 117–129. DOI: 10.17223/19988621/51/10.
2. Epstein, B., Peigin, S., Bolsunovskiy, A., Timchenko S.V. Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO // Source of the Document 52nd AIAA Aerospace Sciences Meeting AIAA Science and Technology Forum and Exposition, SciTech 2014. DOI: 10.2514/6.2014-0569.
3. Степанов К.А., Тимченко С.В. Исследование устойчивости процесса оптимизации крыла беспилотного летательного аппарата к его начальной форме // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 56. DOI: 10.17223/19988621/56/10.
4. Epstein B., Jameson J., Peigin S., Roman D., Harrison N. and Vassberg J. Comparative study of 3D wing drag minimization by different optimization techniques // Journal of Aircraft. 2009. V. 46. No. 2. DOI: 10.2514/1.38216.
5. Harten, A., Osher, S. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes // I.SIAM Journal of Numerical Analysis. 1987. 24. 279. DOI: 10.1137/0724022.
6. Shu C.-W. and Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes I // J. Computational Physics. 1989. V. 83. No. 1. P. 3. DOI: 10.1016/0021-9991(89)90222-2.
7. Epstein, B, Averbuch A. and Yavneh I. An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows // J. Computational Physics. 2001. 168. 316–328. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.

Статья поступила 15.10.2019 г.

Timchenko S.V. (2019) NUMERICAL STUDY OF THE AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF A “WING-FUSELAGE-ENGINE NACELLE-PYLON” THREE-DIMENSIONAL LAYOUT OF THE ENGINE FOR A WIDE-BODY LONG-RANGE AIRCRAFT *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 135–141

DOI 10.17223/19988621/62/11

Keywords: wide-body long-range aircraft, the full Navier-Stokes equations, drag coefficient, pitch moment, lift coefficient.

The paper presents the numerical calculation results on the aerodynamic characteristics of a “wing-fuselage-engine nacelle-pylon” full three-dimensional layout for a wide-body long-range aircraft engine of optimal shape in a wide range of flight conditions. Aerodynamic analysis of the initial configuration is carried out using the OPTIMENGA\_AERO\_ANALYSIS software which is a computer system applied for a high-precision calculation of viscous flows near aerodynamic bodies of complex configuration. According to the analysis of numerical calculation results, the “wing-fuselage-engine nacelle-pylon of the engine” configuration for a wide-body long-range aircraft of optimal shape exposes significantly better aerodynamic characteristics compared to the baseline design in a wide range of Mach number and lift coefficient.

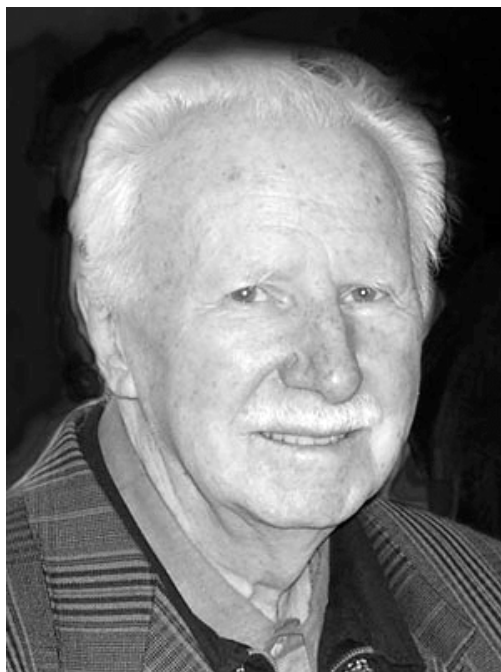
**Financial support:** This work was financially supported by applied research of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation: a unique identifier – RFMEFI57617X0103.

*Sergey V. TIMCHENKO* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, OPTIMENGA-777 Ltd., Moscow, Russian Federation). E-mail: tsv@ff.tsu.ru

#### REFERENCES

1. Peigin S.V., Pushchin N.A., Bolsunovskiy A.L., Timchenko S.V. (2018) Optimal'noe aerodynamicheskoe proektirovanie kryla shirokofyuzelyazhnogo dalnemagistral'nogo samoleta [An optimal aerodynamic design for the wing of a wide-body long-range aircraft]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 117–129. DOI: 10.17223/19988621/51/10.
2. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. (2014) Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. DOI: 10.2514/6.2014-0569.
3. Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2018) Issledovanie ustoychivosti protsessa optimizatsii kryla bespilotnogo letatel'nogo apparata k ego nachal'noy forme [Investigation of the stability of an unmanned aerial vehicle wing optimizing in terms of its initial shape]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 56. pp. 120–127. DOI 10.17223/19988621/56/10.
4. Epstein B., Jameson J., Peigin S., Roman D., Harrison N., Vassberg J. (2009) Comparative study of three-dimensional wing drag minimization by different optimization techniques. *Journal of Aircraft*. 46(2). pp. 526–541. DOI: 10.2514/1.38216.
5. Harten A., Osher S. (1987) Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes, I. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 24(2). pp. 279–309. DOI: 10.1137/0724022.
6. Shu C.-W., Osher S. (1989) Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, II. *Journal of Computational Physics*. 83(1). pp. 32–78. DOI: 10.1016/0021-9991(89)90222-2.
7. Epstein B., Averbuch A., Yavneh I. (2001) An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows. *Journal of Computational Physics*. 168(2). pp. 316–338. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.

Received: October 15, 2019

**МЕМОУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ****ГАРКУНОВ  
ДМИТРИЙ НИКОЛАЕВИЧ****К 100-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ**

Дмитрий Николаевич родился 24 ноября 1919 г. в селе Рожки (Вятская губерния, Малмыжский уезд).

В 1941 году окончил физико-математический факультет Томского государственного университета им. В.В. Куйбышева по специальности «Физика твердого тела». Главным своим учителем Дмитрий Николаевич считает академика Кузнецова В.Д., который привил интерес к актуальным проблемам физики твердого тела. Дмитрий Николаевич – участник Великой Отечественной войны. В 1945 г. он окончил еще инженерный факультет Военно-воздушной академии им. Н.Е. Жуковского и получил воинское звание «инженер-лейтенант авиации». После войны работал в Научно-исследовательском институте эксплуатации и ремонта авиационной техники (Люберцы). В 1962 г. защитил докторскую диссертацию на тему «Методы повышения износостойкости деталей самолетов» с присвоением ученой

степени доктора технических наук. Профессор Гаркунов с 1970 г. по 2004 г. занимал кафедры в различных вузах.

Д.Н. Гаркунов занимался изучением трения и износа – трибологией. За свою продолжительную жизнь, наполненную трудами и служением науке, он стал соавтором двух научных открытий: «Избирательный перенос при трении» («Эффект безызносности» (1956 г.)) и «Водородное изнашивание металлов» (1968 г.), которые позволили создать в науке о трении (трибологии) новое направление – «Трибология на основе самоорганизации». Его изобретения нашли широкое применение в авиационной и химической промышленности, легком и тяжелом машиностроении, в сельском хозяйстве. Д.Н. Гаркунов опубликовал ряд патентов и около 200 работ по триботехнике, из них 22 монографии. Как основатель научной школы трибологии в России Д.Н. Гаркунов в 1992 г. стал президентом отделения «Проблемы безызносности машин и механизмов» Академии проблем качества.

Научные открытия эффекта безызносности и водородного изнашивания металлов признаны в России и за рубежом. Работы профессора Д. Н. Гаркунова отмечены рядом государственных наград, среди которых премия Правительства РФ в области науки и техники (2001 г.) и премия Президента РФ в области образования (2003 г.). Он неоднократно получал награды в разных странах мира за вклад в развитие трибологии (Золотая медаль Института инженеров-механиков (IMEchE) за исследования в области трибологии). Вершиной международного признания трудов ученого является вручение ему в 2006 году Золотой именной медали Международного совета по трибологии. Эта медаль, учрежденная королевой Великобритании Елизаветой II, является самой высокой наградой в мире за достижения в данной области.

Д.Н. Гаркунов являлся главным редактором журнала «Эффект безызносности и триботехнологии», председателем консультационного совета по триботехнике в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана. В 2012 г. Дмитрий Николаевич принимал активное участие в работе научной школы «Инновационные технологии и передовые инженерные решения» (Москва). В настоящее время Дмитрий Николаевич – инженер-полковник ВВС в отставке.

Томский государственный университет гордится одним из лучших выпускников, внесших огромный вклад в развитие физической науки!

Желаем Дмитрию Николаевичу крепкого здоровья и всех благ!

*Анохина И.Н., Клыкков И.И.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**АНОХИНА Ида Николаевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и экспериментальной физики Томского государственного университета.

**АРХИПОВ Владимир Афанасьевич** – доктор физико-математических наук, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

**БАХШАЛЫЕВА Мехпара Нусрат кызы** – докторант кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, г. Баку, Азербайджан. E-mail: mehparebahshaliyeva93@gmail.com

**БЕЛОВ Сергей Викторович** – младший научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: belovsv@niipmm.tsu.ru.

**БЕЛЬКОВ Алексей Викторович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: aleksei-belkov@niipmm.tsu.ru

**БРАГИН Николай Николаевич** – ведущий инженер центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н.Е. Жуковского, г. Жуковский, Россия. E-mail: orlov@ftf.tsu.ru

**БУЛАВКО Антон Михайлович** – заместитель начальника отдела предупреждения ЧС управления гражданской защиты главного управления МЧС России по Томской области, г. Томск, Россия. E-mail: anbulavko@gmail.com

**БУЛГАКОВА Гузель Талгатовна** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Уфимского государственного авиационного технического университета, г. Уфа, Россия. E-mail: bulgakova.guzel@mail.ru

**ГАЙДАК Виолетта Александровна** – аспирантка механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: gaidakvioletta@gmail.com

**ЖАРОВА Ирина Константиновна** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: zharova@niipmm.tsu.ru

**ЖУКОВ Андрей Петрович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: zh@niipmm.tsu.ru

**ИЛЬЯСОВ Айдар Мартисович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры математики Уфимского государственного авиационного технического университета, г. Уфа, Россия. E-mail: amilyasov67@gmail.com

**КИРЕЕВ Тимур Фаритович** – аспирант кафедры математики Уфимского государственного авиационного технического университета, г. Уфа, Россия. E-mail: kireevtf@mail.ru

**КЛЫКОВ Иван Иванович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и экспериментальной физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ykar@hotmail.ru

**КУЗНЕЦОВ Станислав Александрович** – ведущий специалист АО «Информационные спутниковые системы» им. академика М. Ф. Решетнева», г. Железногорск, Россия. E-mail: ksa@iss-reshetnev.ru

**ЛАНДИК Лидия Владимировна** – инженер кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного университета, г. Пермь, Россия. E-mail: LidiaLandik@gmail.com

**МАСЛОВ Евгений Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: maslov\_eugene@mail.ru



**МАТВИЕНКО Олег Викторович** – доктор физико-математических наук, профессор Томского государственного архитектурно-строительного университета, г. Томск, Россия. E-mail: matvolegv@mail.ru

**ОРЛОВ Сергей Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: orlov@ftf.tsu.ru

**ПАВЛОВ Михаил Сергеевич** – младший научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: mcpavlov@niipmm.tsu.ru

**ПАРФЕНОВА Елена Сергеевна** – младший научный сотрудник лаборатории нелинейной механики метаматериалов и многоуровневых систем Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, г. Томск, Россия. E-mail: linasergg@mail.ru

**ПЕЙГИН Сергей Владимирович** – доктор физико-математических наук, директор ООО «Оптименга-777», г. Москва, Россия. E-mail: mishpahat\_peiguine@yahoo.com

**ПЕРФИЛЬЕВА Ксения Григорьевна** – аспирантка кафедры прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

**ПЕСТРЕНИН Валерий Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий механико-математического факультета Пермского государственного университета, г. Пермь, Россия. E-mail: PestreninVM@mail.ru

**ПЕСТРЕНИНА Ирина Владимировна** – кандидат технических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий механико-математического факультета Пермского государственного университета, г. Пермь, Россия. E-mail: IPestrenina@gmail.com

**ПОНОМАРЕВ Сергей Васильевич** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

**САФАРБАЕВА Нигора Мустафаевна** – старший преподаватель кафедры высшей математики Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: akmal09.07.85@mail.ru

**СМОЛЕНЦЕВ Николай Константинович** – доктор физико-математических наук профессор кафедры фундаментальной математики Института фундаментальных наук Кемеровского государственного университета, г. Кемерово, Россия. E-mail: smolennk@yandex.ru

**ТИМОШЕНКО Егор Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

**ТИМЧЕНКО Сергей Викторович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

**ХАЛИЛОВ Эльнур Гасан оглы** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, г. Баку, Азербайджан. E-mail: elnurkhalil@mail.ru

**ЭРГАШЕВ Тухтасин Гуламжанович** – кандидат физико-математических наук, докторант Института математики Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: ertuhtasin@mail.ru

Оригинал-макет подготовлен  
**ООО «Издательство научно-технической литературы»**  
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. +7(3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*  
Верстка *Д.В. Фортеса*

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.  
Подписано к печати 16.10.2019. Выпуск в свет 25.12.2019.  
Формат 70 × 100<sup>1/16</sup>. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».  
Усл. п. л. 11.77. Уч.-изд. л. 13.18. Тираж 250 экз. Заказ № 28. Цена свободная.

---

Отпечатано на оборудовании  
**Издательского Дома Томского государственного университета,**  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № ????.  
<http://publish.tsu.ru> E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)