Дифференциальное исчисление

Введение в математический анализ

- Предел последовательности и функции.
- Раскрытие неопределенностей в пределах.
- Производная функции. Правила дифференцирования.
- Применение производной для исследования функции.

Исходные понятия математического анализа

Множество – это совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы.

Объекты, входящие в данное множество, называют ***элементами*** множества.

Обозначение: большими буквами *A*, *B*, …, *X*, *Y*, … элементы маленькими буквами *a*, *b*, …, *x*, *y*, ….

Принадлежность элемента *x* множеству *A*: $x \in A$

x не входит в данное множество: $x \notin A$

Основные числовые множества:

N = {1, 2, 3,…} – множество натуральных чисел,

Z = {…,-2, -1, 0, 1, 2, …} – множество целых чисел,

Q – множество рациональных чисел $Q = \dfrac{m}{n}, \quad m, n \in Z \quad n \neq 0$

R – множество действительных (или вещественных) чисел, включают как рациональные, так и иррациональные числа.

Определение. ***Переменной величиной*** называется всякая величина , способная принимать различные значения. Или под ***переменной величиной*** понимается такая величина, которая в процессе изучения какого – либо явления принимает хотя бы два различных значения.

Определение. Величина, которая при исследовании данного вопроса принимает только одно значение, называется ***постоянной***.

Можно сказать, что ***постоянная величина*** – это такая переменная, все значения которой равны между собой.

Совокупность изменения всех числовых значений переменной величины называется ***областью изменения*** этой переменной.

Области изменения переменной - ***числовые промежутки***.

Последовательность

Определение. Если каждому натуральному числу n ($n \in N$) по некоторому закону приведено в соответствие число $\{x_n\}$, то этим определена ***числовая последовательность*** $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ (или просто ***последовательность***).

Под последовательностью можно также понимать функцию, заданную на множестве натуральных чисел. $x_n = f(n)$

Число x_n – ***общий*** или ***n-ный член последовательности***.

Способы задания последовательности.

Формулой общего члена, которая позволяет вычислить любой член последовательности по его номеру n.

Например: $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad y_n = n^2 + 1$ $\quad z_n = (-1)^n \cdot n$

Рекуррентное задание: следующий член последовательности задается на основании предыдущего. $x_n = f(x_{n-1})$

Так задается арифметическая и геометрическая прогрессии.

Предел последовательности

Число a называется ***пределом*** последовательности $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$

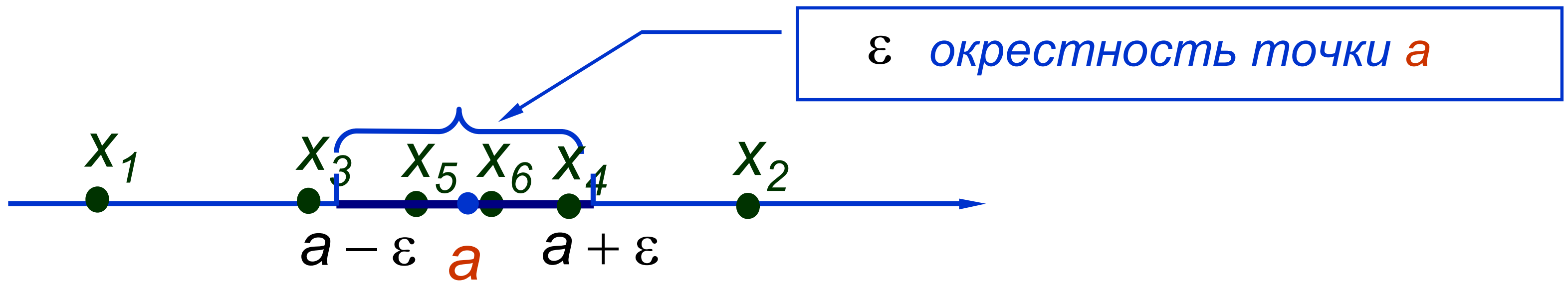
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow \underline{|x_n - a| < \varepsilon}$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ или $x_n \to a$

Геометрический смысл предела последовательности

$\underline{a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon}$ т.е. элемент x_n находится в ε – окрестности точки a.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε – окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε – окрестность точки a.



Предел функции в точке

Пусть функция ***y = f(x)*** определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может самой точки x_0.

Число ***А*** называют пределом функции в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного **ε** найдется такое положительное число **δ**, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство:

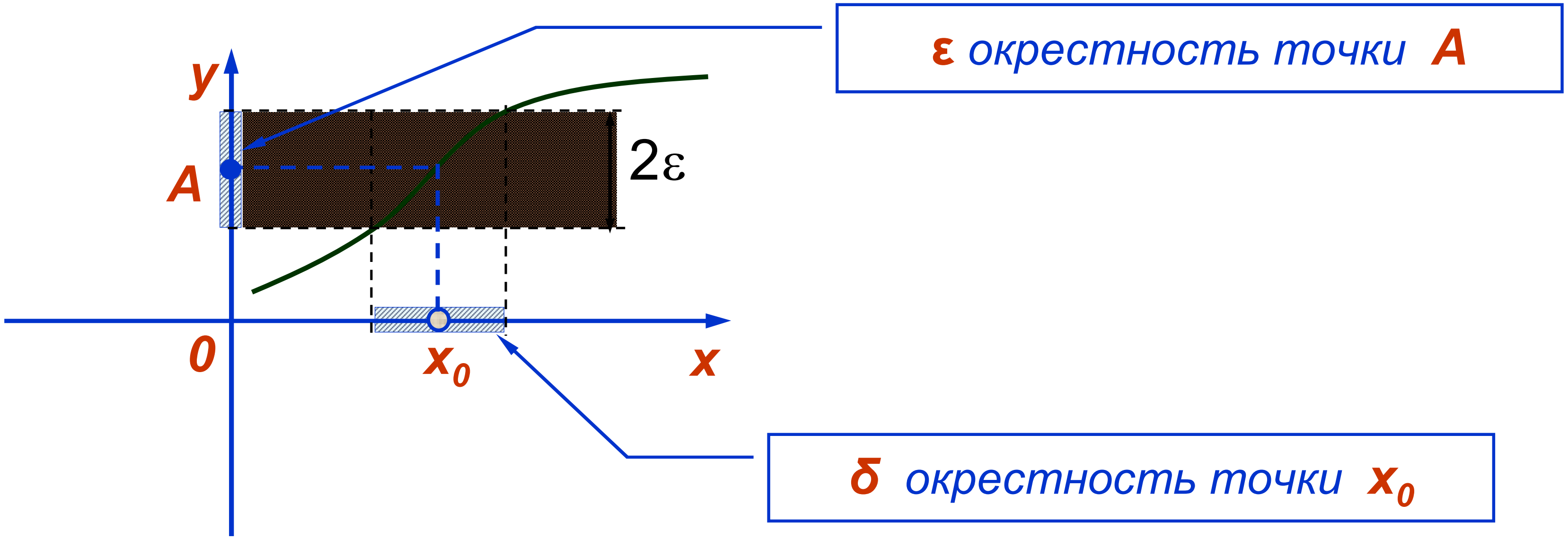
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Предел функции в точке

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$



Геометрический смысл предела: для всех ***x*** из ***δ*** – окрестности точки x_0 точки графика функции лежат внутри полосы, шириной **2ε**, ограниченной прямыми: ***y = A + ε***, ***y = A - ε*** .

Предел функции при x стремящемся к бесконечности

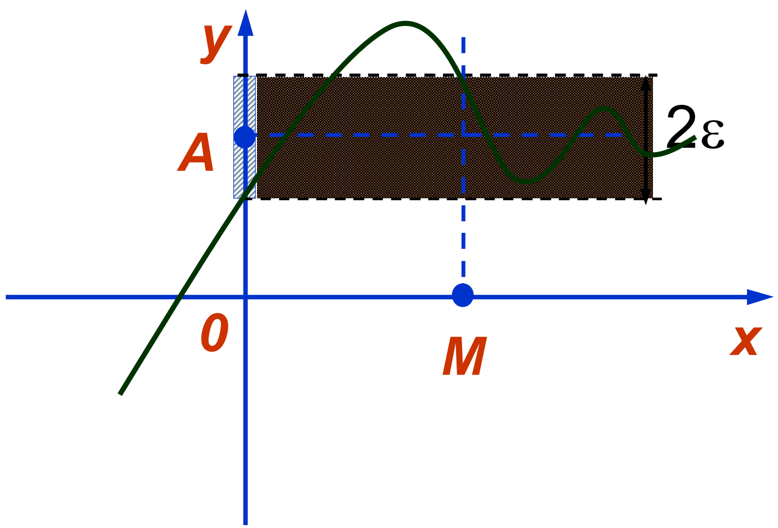
Пусть функция ***y = f(x)*** определена в промежутке $(-\infty;\infty)$.

Число ***A*** называют пределом функции при $x \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0; \exists M > 0; \forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Геометрический смысл этого определения таков: существует такое число ***M***, что при ***x > M*** или при ***x < - M*** точки графика функции лежат внутри полосы шириной ***2ε***, ограниченной прямыми: ***y = A + ε*** , ***y = A - ε*** .



Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функций.

Формулировка теорем, когда $x \to x_0$ или $x \to \infty$ аналогичны, поэтому будем пользоваться обозначением: $\lim f(x)$.

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов:

$$\lim\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению пределов:

$$\lim\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim\left[C \cdot f(x)\right] = C \cdot \lim f(x)$$

Основные теоремы о пределах

- Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} \quad \left(\lim f_2(x) \neq 0\right)$$

- Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim\left[f(x)\right]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$$

- Предел показательно – степенной функции:

$$\lim\left[f(x)\right]^{g(x)} = \left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$$

Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x-1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Но иногда после подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

$$\frac{C}{0} \qquad \frac{C}{\infty}$$

Неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$

Чтобы раскрыть такую неопределенность надо и числитель и знаменатель разделить на самую высокую степень *x*, входящую в них (вынести за скобки *x* в наивысшей степени).

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x+2}{4x^2+9x-11}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{11}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{3+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}^{C}}{\underbrace{\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{11}{x^3}}_{0}}=\infty$$

Неопределенность $\dfrac{0}{0}$

Чтобы раскрыть неопределенность, заданную в форме $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ надо в числителе и знаменателе выделить ***критический множитель*** $(x - x_0)$ и сократить дробь на него.

! Критический множитель - множитель равный нулю при предельном значении x.

Обязательно выделяется и в числителе и в знаменателе, так как $x = x_0$ является корнем обоих многочленов, а потому эти многочлены делятся на $x - x_0$ без остатка.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{18}{-2} = -9$$

Определение производной

По определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция ***y = f(x)*** , имеющая производную в каждой точке интервала ***(a; b)***, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Значение производно функции ***y = f(x)*** в точке x_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y'\big|_{x_0}$$

Правила дифференцирования

Пусть ***u(x)*** и ***v(x)*** – дифференцируемые в некотором интервале ***(a; b)*** функции, ***C*** – постоянная.

- $$(u \pm v)' = u' \pm v'$$
- $$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Следствие: $$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

- $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Производная сложной и обратной функций.

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимой переменной x.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u_x' в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y_u' в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y_x' в точке x, которая находится по формуле $\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x\ .}$

Правило. Если подлежащая дифференцированию функция является результатом целого ряда действий над переменной x, то за промежуточный аргумент следует принять результат всех этих действий кроме последнего.

Производные основных элементарных функций

1. $(C)' = 0$

2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

3. $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

4. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad (ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

5. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad (arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

6. $(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Пример

Вычислить производную функции $y = \dfrac{1+\sin x}{x^3 \cdot \ln x}$

$$y' = \left(\frac{1+\sin x}{x^3 \cdot \ln x}\right)'$$

$$= \frac{(1+\sin x)' \cdot (x^3 \cdot \ln x) - (1+\sin x)\cdot(x^3 \cdot \ln x)'}{\left(x^3 \cdot \ln x\right)^2}$$

$$= \frac{(1' + (\sin x)')\cdot(x^3 \cdot \ln x) - (1+\sin x)\cdot((x^3)' \cdot \ln x + x^3(\ln x)')}{\left(x^3 \cdot \ln x\right)^2}$$

$$= \boxed{\frac{\cos x \cdot x^3 \cdot \ln x - (1+\sin x)\cdot(3x^2 \cdot \ln x + x^2 \text{[redacted]})}{\left(x^3 \cdot \ln x\right)^2}}$$

Пример

Вычислить производную функции $y = \cos(\ln^{12} x)$

Данную функцию можно представить следующим образом:

$$y = \cos u; \quad u = v^{12}; \quad v = \ln x$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

$$y'_u = -\sin u = -\sin v^{12} = -\sin\left(\ln^{12} x\right)$$

$$u' = 12v^{11} = 12\ln^{11} x$$

$$v' = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y' = -\sin\left(\ln^{12} x\right) \cdot 12\ln^{11} x \cdot \frac{1}{x}}$$

Коротко:

$$y' = (\cos(\ln^{12} x))' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot (\ln^{12} x)'$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12\ln^{11} x \cdot (\ln x)' =$$

Гиперболические функции и их производные.

$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	- гиперболический синус;
$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	- гиперболический косинус;
$thx = \dfrac{shx}{chx}$, $cthx = \dfrac{chx}{shx}$	- гиперболические тангенс и котангенс.

,

Зависимости между гиперболическими функциями :

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

$$ch2x = ch^2x + sh^2x \qquad sh2x = 2shx \cdot chx$$

Производные гиперболических функций:

$$(shx)' = chx \qquad (chx)' = shx \qquad (thx)' = \frac{1}{ch^2x} \qquad (cthx)' = -\frac{1}{sh^2x}$$

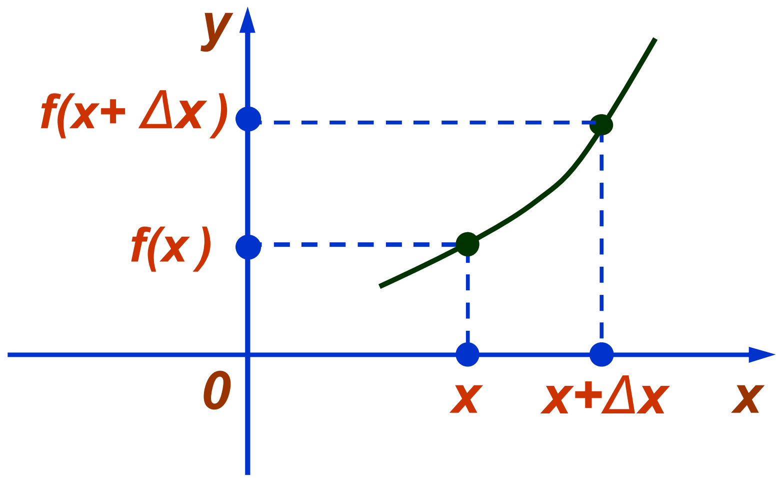
Возрастание и убывание функций

Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графика функции.

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функций.

Теорема (необходимые условия)

[redacted]



Минимум и максимум функции

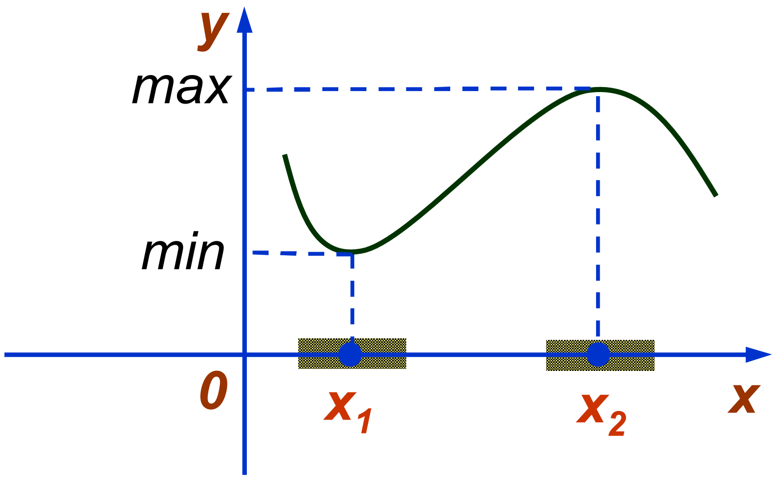
Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции, если:

$$\exists \delta > 0, \quad \text{что } \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta); \;\; x \neq x_0 : f(x) < f(x_0)$$

Точка x_0 называется ***точкой минимума*** функции, если:

$$\exists \delta > 0, \quad \text{что } \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta); \;\; x \neq x_0 : f(x) > f(x_0)$$

Существует такое $\delta > 0$, что для всех x из δ – окрестности точки x_0 и не равных x_0 выполняется неравенство.



Значение функции в точке минимума (максимума) называется ***минимумом (максимумом)***

Общее название минимума и максимума – ***экстремум*** функции.

Понятие экстремума всегда связаны с определенной окрестностью из области определения функции, поэтому функция может иметь экстремум только во ***внутренних точках*** области определения.

Минимум и максимум функции

Теорема (необходимое условие экстремума)

[redacted]

Геометрически равенство *(1)* означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси ***OX***.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума)

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0, и при переходе через нее (слева направо) производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 - точка максимума, с минуса на плюс,то x_0 - точка минимума.

Минимум и максимум функции

Иногда бывает удобно использовать другой достаточный признак существования экстремума.

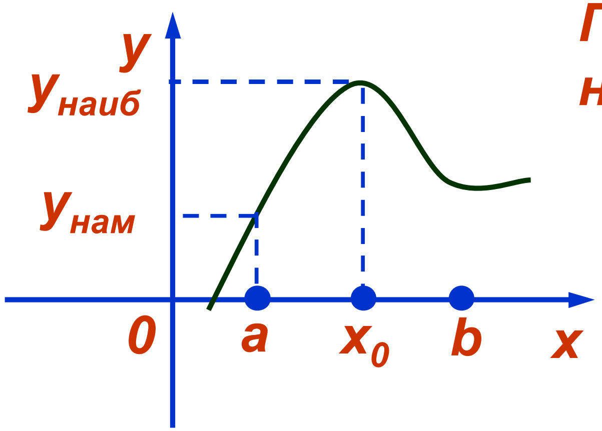
Теорема (достаточное условие экстремума)

Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и при $f''(x_0) > 0$ - минимум.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

По теореме Вейерштрасса, если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a; b]$, либо на границе отрезка, при $x_0 = a$ или при $x_0 = b$. Если x_0 - внутренняя точка отрезка, то ее следует искать среди критических точек данной функции.



Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

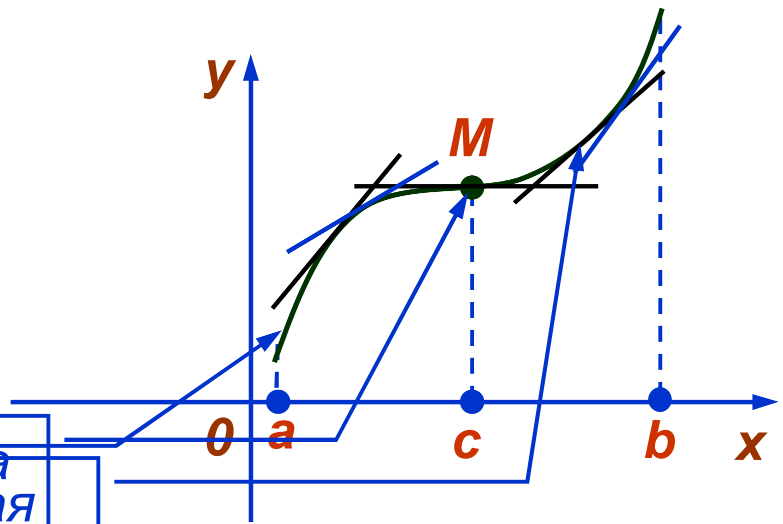
1. Найти критические точки функции $f(x)$;
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка;
3. Среди найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Выпуклость графика функции, точки перегиба

График дифференцируемой функции *f(x)* называется ***выпуклым вниз*** (или ***вогнутым***) на интервале ***(a; b)***, если он расположен ***выше*** любой его касательной на этом интервале.

График дифференцируемой функции *f(x)* называется ***выпуклым вверх*** (или просто ***выпуклым***) на интервале ***(a; b)***, если он расположен ***ниже*** любой его касательной на этом интервале.

Точка графика функции, которая отделяет его выпуклую часть от вогнутой называется ***точкой перегиба***.



На **(*a*, *c*)** y' – убывающая, и $y'' < 0$

На **(*c*, *b*)** y' возрастает, и $y'' > 0$.

*Точка **M(c; f(c))** – точка перегиба*

*На интервале **(a; c)** кривая выпукла вверх*

*На интервале **(c; b)** кривая выпукла вниз (вогнута)*

Выпуклость графика функции, точки перегиба

Теорема

Если функция ***f(x)*** во всех точках интервала ***(a; b)*** имеет отрицательную вторую производную, то есть $f''(x) < 0$, то график функции на этом интервале выпуклый вверх.
Если $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$, то график функции на этом интервале выпуклый вниз.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба)

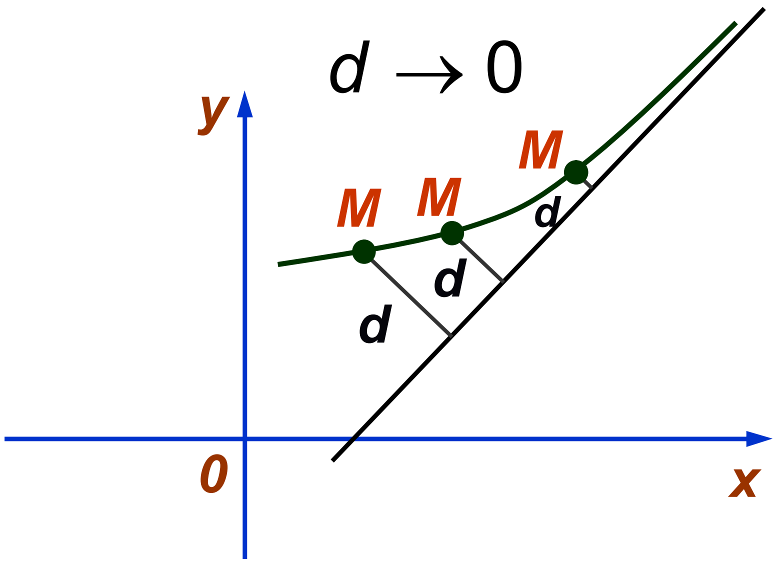
Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Точка в которой $f''(x) = 0$ или не существует называется ***критической точкой второго рода***.

План исследования функции на выпуклость и точки перегиба аналогичен исследованию на экстремум, но с помощью второй производной.

Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.



Асимптоты могут быть наклонными, горизонтальными и вертикальными.

Наклонная асимптота

Если существуют конечные пределы:

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)}$$

то кривая ***y = f(x)*** с имеет наклонную асимптоту с уравнением:

$$\boxed{y = kx + b}$$

Асимптоты графика функции

Если хотя бы один из пределов для нахождения ***k*** или ***b*** не существует или равен бесконечности, то кривая ***y = f(x)*** наклонной асимптоты не имеет.

В частности, если ***k = 0***, то $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, и $y = b$ – горизонтальная асимптота.

Таким образом, ***горизонтальная асимптота*** это частный случай наклонной асимптоты.

Асимптоты графика функции при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении ***k*** и ***b*** иногда необходимо рассматривать отдельно случай, когда $x \to -\infty$ и когда $x \to +\infty$.

Общая схема исследования функции и построения графика

1 Нахождение области определения функции *f(x)*. Если функция имеет точки разрыва, определить их вид с помощью односторонних пределов. Определить вертикальные асимптоты.

2 Найти (если это возможно) точки пересечения графика с осями координат.

3 Найти интервалы знакопостоянства функции (решив неравенства $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$)).

4 Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

5 Найти наклонные асимптоты графика функции;

6 Найти интервалы монотонности функции.

7 Найти экстремумы функции.

8 Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Построить график функции.

Пример. $y = \dfrac{(x+3)^2}{x-4}$

1. Область определения: $x \in (-\infty; 4) \cup (4 : +\infty)$

Функция не определена при $x = 4$. Исследуем на разрыв.

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = -\infty \qquad \lim_{x \to 4+0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = +\infty$$

$x = 4$ – вертикальная асимптота.

2. Пересечение с осью Ox: $\dfrac{(x+3)^2}{x-4} = 0$ $\quad x = -3$

Пересечение с осью Oy: При $x = 0$ $y = -9/4$.

3. $\dfrac{(x+3)^2}{x-4} > 0 \quad x \in (4 : +\infty)$ $\qquad \dfrac{(x+3)^2}{x-4} < 0 \quad x \in (-\infty; 4)$

4. Функция общего вида.

5.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{(x+3)^2}{x-4}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)^2}{(x-4)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+3)^2}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+6x+9-x^2+4x}{x-4}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{10x+9}{x-4}\right)=10$$

Наклонная асимптота: $y = x + 10$.

6.

$$y'=\left(\frac{(x+3)^2}{x-4}\right)'=\frac{2(x+3)\cdot(x-4)-1\cdot(x+3)^2}{(x-4)^2}=$$

$$=\frac{(x+3)(2x-8-x-3)}{(x-4)^2}=\frac{(x+3)(x-11)}{(x-4)^2}$$

$$y' = \frac{(x+3)(x-11)}{(x-4)^2} = 0$$

Критические точки x = -3, x = 11.

x	(-∞, -3)	-3	(-3, 4)	4	(4, 11)	11	(11, +∞)
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-	$\searrow$	28	$\nearrow$

Max Min

7. Экстремумы в точках: x = -3 – максимум, x = 11 – минимум.

8.

$$y'' = \left(\frac{(x+3)(x-11)}{(x-4)^2} \right)'' = \left(\frac{\left(x^2-8x-33\right)}{(x-4)^2} \right)'' =$$

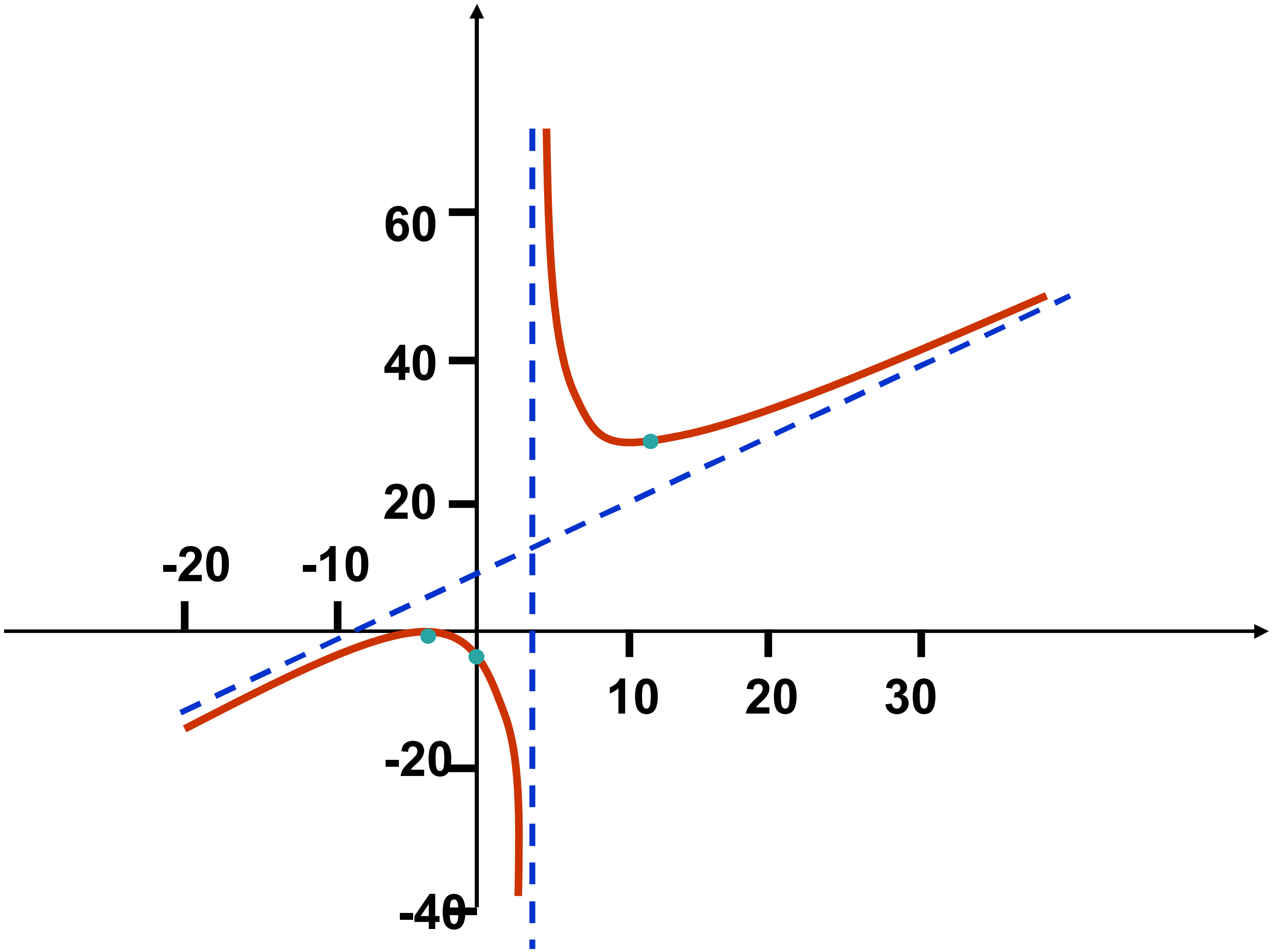
$$= \frac{(2x-8)\cdot(x-4)^2 - 2(x-4)\cdot\left(x^2-8x-33\right)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{(x-4)\left(2x^2-16x+32-2x^2+16x+66\right)}{(x-4)^4} = \frac{98}{(x-4)^3}$$

$$y'' = \frac{98}{(x-4)^3} = 0$$

Нет критических точек второго рода.

x	$(-\infty, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f''(x)$	-	-	+
$f(x)$		-	


60
40
20
-20
-10
10
20
30
-20
-40