Введение в математический анализ

§1 Необходимые определения

О.: ***Функцией*** **называется правило, по которому каждому элементу X**

Некоторого множества K соответствует единственный элемент Y другого множества L.

Х – аргумент функции;

У – соответствующее значение функции.

Обозначается: $y = f(x)$, $y = y(x)$

<u>О.:</u> *Графиком функции $y=f(x)$* называется множество точек плоскости XOY для каждой из которых абсцисса X

является значением аргумента, а ордината Y – соответствующим значениям данной функции.

О.: Множество значений аргумента, при котором функция имеет смысл называется областью определения функции. И обозначается $\mathscr{D}(y)$, $\mathscr{D}(f)$

О.: Множество значений «y», которые получаются по правилу $y = f(x)$ называется областью значений функций. И обозначается: $E(y)$, $E(f)$.

Способы задания функции:

1)аналитический (формулы)

2)табличный

3) Графический

О.: К основным элементарным функциям относятся следующие:

- У = const;
- $y = x^{\alpha}$, α – действительное число, α ≠ 0;
- $y = a^{x}$, где a>0, a≠1;
- $y = \log_{a} x$, где a>0, a=1;
- y = sin x; y = cos x; y = tg x; y = ctg x;

- $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \mathrm{arctg}\, x$; $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

О.: Рассмотрим 2 ф-и $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$.

Область значений функции $u = \varphi(x)$ является областью определения функции f, тогда функция $y = f(\varphi/x)$ называется сложной ф-ей или функцией от функции

<u>О.:</u> *Элементарной* называется ф-я состоящая из основных элементарных ф-ий с помощью арифметических действий и операций, взятия ф-и от ф-и применимых последовательно конечное число раз.

$y = \operatorname{tg}(\sin^3(x^2+5) + \operatorname{tg} \ln x$

$y = \operatorname{tg}^3 x - 3\sin x$

- Элементарные функции.

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \cdots + \frac{x^n}{n+1}$$

- Неэлементарная ф-я, т.к. складываем <u>*бесконечное число*</u> элементарных ф-й.

О.: Окрестностью точки x_0 на числовой прямой называется любой интервал (a;b), содержащий эту точку.

О.: Если $\delta(\Delta) > 0$, то δ – окрестностью точки x_0 называется промежуток $(x_0-\delta; x_0+\delta)$

О.: Внешность любого интервала (a,b)называется окрестностью бесконечности.

О.: Множество X называется **ограничением сверху**, если существует такое число M, что для всех $x \in X$, $x \le M$.

О.: Множество x называется ограниченным снизу, если существует число m такое, что для всех $x \in X$, $x \geq m$.

О.: Множество x называется ограниченным, если существуют числа m, M такие, что для всех $x \in X$, $m \leq x \leq M$.

§2 Предел последовательности

О.: Последовательностью $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ чисел называются значения функции натурального аргумента, т.е. $n \in N$, $x_n = f(n)$

$2;4;8;...;2^n;...$

$x_n = 2^n$, $n = 1;2;...$

О.: Число a называется пределом последовательности x_n, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N=N(\varepsilon)$, т.е. зависящий от ε такой, что n больше N и выполняется неравенство $|x_n - a|$ меньше$<\varepsilon$.

число а - предел последовательности , если за пределами промежутка ($-\varepsilon+a$; $\varepsilon+a$) находится конечное число членов последовательности, а внутри промежутка бесконечное число членов последовательности и это выполняется для любого ε.

Докажем, что пределом последовательности $1 - 1/10^n$, $n \to \infty$, является число 1.

<u>Док-во.</u>

Если 1 предел послед-ти, то для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n>N$ верно $|1-1/10^n-1|<\varepsilon$.

Должны показать, что для любого ε найдется номер N:

- если N есть, то $|1-1/10^n-1|<\varepsilon$ верно.

$|-1/10^n|<\varepsilon$

$1/10^n <\varepsilon$

$10^n >1/\varepsilon$

$\lg 10^n >1/\varepsilon$

$n \lg 10>\lg 1 - \lg \varepsilon$

$n>-\lg \varepsilon>0$

если N=[-lg Ɛ]+1, то определение предела последовательности выполняется, а именно:

для любого Ɛ>0 существует номер

N =[-lg Ɛ]+1 такой, что для всех n>N верно, что $|x_n-a|<\varepsilon<|(1-1/10^n)/x^n-1/a|<\varepsilon$

А это и обозначает, что предел послед-ти $1-1/10^n$ есть число 1.

§3 Предел функции

<u>**О.:**</u> Число "в" называется пределом функции $y=f(x)$, при $x \to x_0$, если $\varepsilon>0$ найдется такое $\rho=\rho(\varepsilon)$, ρ больше>0, что для всех x принадлежащих $\rho(\Delta)$-окрестности x_0,

соответствующие значения функции принадлежат Ɛ-окрестности точки "в", т.е. если для всех х таких, что |х-хо|<Δ соответствующие f(x) удовлетворяют неравенство |f(x)-в|<Ɛ.

<u>Обозначение:</u>

для послед-ти: $-\lim_{x\to\infty} x_n = a$

для ф-и: $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$

Замечание!

Число "в" является пределом ф-и f(x) при $x \to x_0$, если, чем ближе точки x к точке хо, тем ближе соответствующие значения ф-и к точке "в".

Лемма:

О.: Функция $y=f(x)$ имеющая предел при $x \to x_0$ является ограниченной, в некоторой окрестности точки x_0. $\exists$- существует, u_{x0} – окрестность точки x_0. u_{x0} такая, что все $x \in u_{x0}$ выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$, где m, M некоторые конечные числа.

ОБРАТНАЯ НЕВЕРНА:

Например,

y=sin x является ограниченной для всех x$\in$D(sin x), но при этом x$\longrightarrow +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ - не существует.

§4 Односторонние пределы

<u>О.:</u> $(x_0-\Delta;x_0)$ называется левосторонней окрестностью точки x_0. Интервал $(x_0;\ x_0+\Delta)$ называется правосторонней окрестностью точки x_0.

<u>О.:</u> Предел lim $\varphi(x)$, при $x \to x_0(-)$, называется левосторонним пределом функции $y = \varphi(x)$, $x \in (x_0-\Delta;x_0)$, т.е. $x \to x_0(-)$ слева.

О.: Предел lim f(x), при $x \to x_0(+)$, называется правосторонним пределом функции y=f(x), $x \in (x_0; x_0+\Delta)$, т.е. стремятся к x_0 справа.

Теорема.

Для того чтобы существовал (конечный) предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние пределы и эти пределы были равны

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = b$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

§5 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

<u>О.:</u> Ф-я y=f(x) называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Б.м. обозначается α(x), β(x), γ(x).

<u>О.:</u> Ф-я y=f(x) называется бесконечно большой при x→x0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Б.б. обозначается f(x), t(x), g(x).

Пример:

y=1/x;

$$\lim_{x \to x_{0+}} \frac{1}{x} = +\infty$$, б.б. x→0+;

$$\lim_{x \to x_{0-}} \frac{1}{x} = -\infty$$, б.м. x→0-;

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$,y=1/x, б.м. x→+∞

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$, y=1/x, б.м. x→-∞

Теорема о связи б.м. и б.б. функций.

1 теорема: Если ф-я $y=f(x)$ является б.б. при $x \to x_0$, то обратная ей ф-я $y=1/f(x)$ является б.м. при $x \to x_0$.

2 теорема: Если ф-я $y=f(x)$ является б.м. при $x \to x_0$, то обратная ей ф-я $y=1/\alpha(x)$ является б.б. при $x \to x_0$.

§6 Свойства бесконечно малых

Все бесконечно малые рассматриваются при $x \to x_0$:

1) Сумма конечного числа б.м. функций является б.м. функцией;
2) Произведение б.м. функции на const является б.м. функцией;
3) Произведение б.м. функций является б.м. функцией;

4) Отношение $\alpha(x)$ к $f(x)$ является б.м., если $\alpha(x)$ – б.м., $f(x)$ – не является б.м.

5) Произведение б.м. функции на ограниченную функцию является б.м. функцией.

Замечание!

Отношение 2-х б.м. функций может быть как б.м., так и const, а также и б.б.

В этом случае говорят, что имеет место неопределенность вида [0/0].

§7 Свойства б.б. функций

1) Const × б.б. функцию является б.б. функцией, const ≠ 0;
2) Сумма б.б. функций одного знака является б.б. функцией;
3) Произведение б.б. функций является б.б. функцией.

Замечание!:

1. Говорят, что отношение 2-х б.б. величин дает неопределенность вида $[\infty/\infty]$.
2. При произведение б.м. × б.б. функции имеет место неопределенность вида $[0\times\infty]$.
3. Разность б.б. функций одного знака дает неопределенность вида $[\infty - \infty]$.
4. Другого вида неопределенности:

$[0^0]$, $[0^\infty]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$.

§8 Свойства пределов

Все пределы вычисляются при $x \to x_0$, существуют и конечные:

1)Предел const = самой const.

2) Предел суммы, разности, произведению и дроби, если предел знаменателя ≠ 0, равен соответственно сумме пределов, разности пределов, произведению пределов и частному пределов.

3) Const , как множитель, можно выносить за знак предела.

4) Если ф-я не отрицательная, в некоторой окрестности x_0, то предел этой функции не отрицателен при $x \to x_0$.

5) Теорема о сжатой переменной.

Если в некоторой окрестности точки x_0 функция $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$ и предел функции $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = b$, то $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$.

6) Если предел функции существует, то он единственный.

7) <u>2-я лемма о пределе.</u>

<u>О.:</u> Для того чтобы существовал конечный предел функции $y=f(x)$ при $x \to x_0$ необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(x)$ можно было представить в виде: $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$, $\alpha(x)$, при $x \to x_0$, - б.м.

8) Если в точке x_0 ф-я $f(x)$ непрерывна, то знак ф-и f и значок предела можно поменять местами.

Это свойство позволяет вместо x подставить x_0 и тем самым показать, что при $x \to x_0$ предел ф-и будет равен значению ф-и в точке x_0.

§9 Замечательные пределы

П.1 *I замечательный предел.*

О.: lim при x→x0, но при этом α(x)→0,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

П. 2 *II замечательный предел.*

О.:

$$\lim_{\substack{\alpha(x) \to 0 \\ x \to x_0}} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$$

П.3 Модификация замечательных пределов.

На основании II замечательного предела, получено что:

1) $$\lim_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ x\to x_0}} \frac{\log_a(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = \frac{1}{\ln a} = \log_{\mathrm{e}} a$$

2) $$\lim_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ x\to x_0}} \frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1$$

3) $$\lim_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ x\to x_0}} \frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} = \ln a$$

4) $$\lim_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ x\to x_0}} \frac{\mathrm{e}^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} = 1$$

§10 Сравнение бесконечно малых величин(функций)

О.: Говорят, что при $x \to x_0$ б.м. величина $\alpha(x)$ является б.м. более высокого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \to x0$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$$

. Значит $\alpha<\beta$.

О.: В рамках предыдущего определения величина β(x) называется б.м. более низкого порядка, чем α(x).

О.: При $x \to x_0$ б.м. β(x) и α(x) имеют одинаковый порядок малости, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = const, const \neq 0.$$

Пример:

1) При $x \to 0$ x^3 б.м. более высокого порядка, чем x^2, т.к.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

2) В этом случае x^2 является б.м. более низкого порядка, чем x^3 при $x \to 0$.

3) при $x \to 0$ б.м. $3x^3$ и $4x^3$ имеют одинаковый порядок малости.

О.: При $x \to x_0$ б.м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными ($\alpha(x) \sim \beta(x)$), если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \quad .$$

Свойства эквивалентности:

1) $\alpha(x) \sim \alpha(x)$

2) $\alpha(x) \sim \beta(x) \rightarrow \beta(x) \sim \alpha(x)$

3) $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$, $\alpha(x) \sim \gamma(x)$

$\alpha(x) \sim \beta(x)$ б.м. при $x \rightarrow x_0$.

Таблица эквивалентных б.м.:

При $x \to x_0$, $\alpha(x) \to 0$:

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
2. $\mathrm{tg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$
3. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
4. $1-\cos \alpha(x) \sim (\alpha(x))^2/2$
5. $\mathrm{arctg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$
6. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$

7) Ln (1+α(x)) ~ α(x)

<u>Т. О применении эквивалентных б.м. величин.</u>

Если при x→x0 α(x)~α1(x), β(x) ~ β1(x) и при этом существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$,

то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$

и эти пределы между собой равны.

§11 Понятия об асимптотических формулах.

<u>О.:</u> Если при $x \to x_0$ справедливо равенство $f(x)=\varphi(x)+$ б.м.$(\varphi(x))$, где б.м.$(\varphi(x))$ – б.м. более высокого порядка чем $\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ называется асимптотическим членом или асимптотическим выражением для ф-и $f(x)$, при $x \to x_0$.

О.: φ(x) является асимптотическим выражением для ф-и f(x), если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1.$$

Особый интерес вызывает вопрос:

«при каких условиях существует асимптотическое выражение φ(x)=kx+b,

при x→±∞».

Ответ:

Из этой формулы можно получить, что

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, если k конечная, то

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$.

Если k и b конечные числа, то прямая y=kx+b называется невертикальной асимптотой графика функции y=f(x) при x⟶±∞.

- Если $k=0$, b – конечное число, $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$.
- Для ф-ий содержащих в своей записи показательную или логарифмическую ф-ю пределы надо отдельно вычислить для $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Тем самым находят правые и левые, если они существуют, невертикальные асимптоты.

Непрерывные функции. Разрывные.

§1 Приращение ф-и. Непрерывные ф-и.

<u>О.:</u> Приращение некоторой переменной называется разность между новым значением этой величины и её прежним значением.

x_1-x_0=Δx; x_1 - новое значение; x_0 - прежнее значение;

<u>О.:</u> $y=f(x)$, даны точки x_0; x_0-$\Delta x \in D(y)$, тогда разность $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – называется приращением ф-и в точке x_0

<u>О.:</u> Ф-я $y=f(x)$ определенная на некотором множестве называется непрерывной в точке x_0 , $x_0 \in D(y)$, если:

1) ф-я определена в точке x_0
2) Приращение ф-и в точке $x_0 \rightarrow 0$. если приращение аргумента $\rightarrow 0$.

2-е определение непрерывности в точке:

О.: Ф-я y=f(x) называется непрерывной в точке x_0, $x_0 \in D(y)$, если:

1) ф-я определена в точке x_0 и в некоторой окрестности точки x_0.
2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
3) этот предел равен значению ф-и в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема.

1-е и 2-е определения непрерывности в точке эквивалентны.(из 1-го вытекает 2-е и наоборот).

§2 Функции непрерывные на отрезке. Теоремы о непрерывности функции.

<u>О.:</u> Ф-я, непрерывная в каждой точке некоторого отрезка называется непрерывной на этом отрезке.

Теоремы о непрерывных функциях:

Все ф-и рассматриваются в точке x_0 или на некотором отрезке:

1) Основные элементарные ф-и(и элементарные ф-и) непрерывны в области определения.
2) Сумма конечного числа непрерывных ф-ий является непрерывной ф-ей.

3) Произведение конечного числа непрерывных ф-й является непрерывной ф-ей.

4) Частное от деления 2-х непрерывных ф-й является непрерывной ф-ей в тех точках, в которых делитель ≠ 0.

<u>Следствие!</u>

Дробно-рациональная ф-я непрерывна всюду, за исключением тех точек, в которых знаменатель = 0.

5) *<u>Непрерывность сложной ф-и.</u>*

Непрерывная ф-я от непрерывной ф-и, т.е. сложная, является непрерывной ф-ей в области определения.

6) *<u>т. о непрерывности обратной ф-и.</u>*

Если ф-я $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна, на некотором промежутке $[a;b]$, то существует однозначная обратная ф-я, $x=\varphi(y)$, определенная на промежутке $[f(a);f(b)]$ непрерывная и монотонная в том же смысле.

§3 «Истинное» значение функции.

Ф-я y=f(x) непрерывна всюду, за исключением точки x_0.

Вопрос:

Как подобрать $f(x_0)$, чтобы новая ф-я была непрерывна в точке x_0 . По определению, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то f(x) непрерывна в точке x_0 .

Пример 1.

$y=1/(x-7)$

$\lim 1/(x-7)=\infty$, при $x\to 7$.

У(7)-не существует.

Т.к. предел = ∞, то заданную ф-ю нельзя доопределить до непрерывной ф-и.

Предполагаемого $y(7)$ не существует.

<u>О.:</u> Операция нахождения предела называется раскрытием неопределенности, а сам предел, если он существует, называется «истинным» значением ф-и y=f(x) в точке $x_{0.}$

$y=x^2-4/(x-2)$, $D(y)\neq 2$;

Ф-я непрерывна всюду, за исключением точки 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Заданную ф-ю доопределим в точке 2 значением 4.

И новая ф-я y = :

- x^2-4/(x-2), если x≠2;
- 4, если x=2;

Является непрерывной для всех x.

Для заданной ф-и «4» является «истинным» значением ф-и.

§4 Классификация точек разрыва графика функции.

<u>О.:</u> Точка x_0 называется точкой разрыва, если в этой точке нарушается хотя бы одно условие непрерывности ф-и.

В зависимости от того, какое нарушение имеет место различают следующие виды разрывов:

1. **<u>О.:</u>** если точка x_0, точка разрыва графика ф-и и существуют конечные односторонние пределы ф-и в этой точке, то x_0 точка разрыва I-го рода.

При этом, если односторонние пределы равны между собой(но не равны значению ф-и в этой точке), то x_0 называется *точкой устранимого разрыва.*

Если односторонние пределы конечны, но не равны между собой, то x_0 точка скачка ф-и;

Величина скачка h вычисляется по формуле:

$$\boxed{h = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) - \lim_{x \to x_{0-}} f(x)}$$

2. Все остальные разрывы являются разрывами II-го рода.

Производная функции

§1 Дифференцирование функций заданных неявно.

<u>**О.:**</u> Ф-я «у» считается заданной неявно, если она задана уравнением $f(x;y)=0$.

Например:

$x^2+y^2 = 7$ – неявная ф-я.

$x^3\sin y - xy = 5$ – неявная ф-я.

y'_x - ?

Правило.

Для того чтобы найти y'_x ф-и заданной неявно, нужно продифференцировать обе части равенства $f(x;y) = 0$ по переменной x. И из получившегося уравнения выразить y'_x.

Например:

$x^2+\sin y - xy = 5$

Считаем, что x – независимая переменная, а «y» ф-я зависящая от «x».

$2x+\cos y \times y` - (x`y + xy`) = 0$

$2x + \cos y \times y` - y - xy` = 0$

$y`(\cos y - x) = y - 2x$

$y`=y-2x/(\cos y - x)$

§2 Производная степенно – показательной функции.

<u>О.:</u> Ф-я вида $y = (u(x))^{v(x)}$ называется степенно – показательной ф-ей.

Найдем $y`_x$.

Прологарифмируем обе части равенства по основанию е.

$Ln\ y = \ln u^v$

$Ln\ y = v \ln u$

Получим ф-ю заданную неявно.

Продифференцируем обе части.

$y`/y` = V`\ln u + V(\ln u)$

$y`/y = V`\ln u + V(u`/u)\ |\ y=u^v$

$y`= u^v (V`\ln u + (v/u)u`)$

Раскроем скобки:

$y` = u^v \ln u\ V` + u^v\ V/u\ u`$

$y`= u^v \ln u\ v` + V\ u^{v-1}\ u`$

Производная степенно – показательной ф-и = сумме производных показательной и степенной ф-ий.

§3 Производная функция заданной параметрически

О.: Ф-я вида $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \epsilon T \end{cases}$

называется ф-ей заданной параметрически, где t – параметр.

Производная y'_x вычисляется по формуле:

$y`_x = y'_t / x'_t$

§4 Производные высших поярдков.

<u>О.:</u> Если y' есть производная ф-и y=f(x), то производная от y' называется второй производной или производной второго порядка. И обозначается y''_x.

<u>О.:</u> Производные более высоких порядков находят по формуле:

$y^n = (y^{n-1})'$.

§5 Уравнение касательной к графику ф-и в точке с абсциссой x_0.

Геометрический смысл производной:

Угловой коэффициент касательной проведенной к графику ф-и в точке с абсциссой x_0 равен значению производной ф-и в точке x_0, получим уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f`(x_0)(x-x_0)$$

Таблица производных элементарных функций

1) $C' = 0$, где $C = const$

2) $(ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\sin x \neq 0$

3) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $(arctg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

6) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, где n – натуральное число

8) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a>0$, $a \neq 1$

Частный случай: $(e^x)' = e^x$

9) $(tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\cos x \neq 0$

10) $(\sin x)' = \cos x$ $\cos x \neq 0$

11) $(\cos x)' = -\sin x$

12) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, где $a>0$, $a \neq 1$

Частный случай: $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

Применение дифференциального исчисления в некоторых задачах математического анализа.

Правило Лопиталя к применение нахождения пределов функций.

1. Теорема(Правило Лопиталя):

Пусть ф-и f(x) и φ(x) непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращается в нуль в точке x_0.

Пусть φ\`(x) ≠ 0 в окрестности x_0, тогда, если существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f`(x)}{\varphi`(x)}$$

, то справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f`(x)}{\varphi`(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} .$$

2) Теорема.

Пусть ф-и f(x) и φ(x) непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x0(может быть, за исключением точки x0), при этом $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$. φ`(x) ≠ 0.

Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f`(x)}{\varphi`(x)}$,

То справедливо равенство:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f`(x)}{\varphi`(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

Применение дифференциального исчисления в исследовании ф-и и построению графика этих функций.

y=ln x/(x+6) - 1

1) <u>Область определения функции.</u>

- Те значения аргумента x, при которых ф-я имеет смысл.

$x/(x+6)>0$; $D(y) \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$

2) Периодичность.

3) Четность / нечетность.

$y=f(x)$, $x;-x \in D(y)$

- Если $f(x) = f(-x)$ – ф-я называется четной;
- Если $f(-x) = -f(x)$ – ф-я называется нечетной;
- Если $f(-x) \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$ – ф-я называется ни четная, ни нечетная;

$y(-x) = \ln(-x/(-x+6)) - 1 = \ln(x/(x-6)) - 1$

4) <u>Точки пересечения графика ф-и с осями координат.</u>

С осью ОУ:

<u>О.:</u> при x=0, находим значение у.

0 не принадлежит D(у). Следовательно, с осью ОУ график ф-и не пересекается.

С осью ОХ:

<u>О.:</u> При у=0, находим значение х.

Если у=0,то $\ln(x/(x+6)) - 1 = 0$

$Ln(x/(x+6))=1$; $x/(x+6)=e$; $x=e(x+6)$; $x=ex+6e$.

$X(1-e)=6e$

$x=6e/(1-e)$

$X \approx -10$

$(-10;0)$

5) <u>Исследование функции на непрерывность.</u>

Т.к. заданная ф-я является элементарной, то она является непрерывной в области определения, т.е. $x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$

Точки -6;0 являются точками разрыва графика ф-и.

Исследуем в этих точках характер разрыва.

Для нашей ф-и:

$$\lim_{x \to -6_-} (\ln \frac{x}{x+6} - 1) = [\ln \frac{-6}{0} - 1] = [\ln(+\infty) - 1] = +\infty$$

-6 – точка разрыва II-го рода, т.к. правосторонний предел не существует.

Рассмотрим поведение ф-и при $x \to 0+$.

$$\lim_{x \to 0_+} (\ln \frac{x}{x+6} - 1) = [\ln \frac{0_+}{0_+ + 6} - 1] = [\ln(0_+) - 1] = -\infty$$

0 – точка разрыва II-го рода, т.к. при $x \to 0$ предела не существует.

Т.к. -6 и 0 точки разрыва II-го рода, то прямые x=-6, x=0 являются вертикальными асимптотами графика функции.

Невертикальные асимптоты найдем как прямые с уравнением $y=kx+b_{1,2}$, где

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \; b_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k_{1,2} \times x)$$

Для нашей ф-и:

$$k_1 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln\frac{x}{x-6} - 1}{x} = \left[\frac{0-1}{\infty}\right] = \left[\frac{-1}{\infty}\right] = 0$$ -

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (\ln\frac{x}{x-6} - 1 - 0 \times x) = [\ln 1 - 1] = -1$$

У=-1-правая горизонтальная асимптота графика ф-и.

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\frac{x}{x+6} - 1}{x} = \left[\frac{0-1}{\infty}\right] = \left[\frac{-1}{-\infty}\right] = 0_+$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (\ln\frac{x}{x+6} - 1 - 0 \times x) = \lim_{x\to-\infty} (\ln\frac{x}{x+6} - 1) = -1$$

У=-1 – левая горизонтальная асимптота.

6) <u>Точки экстремума. Промежутки монотонности.</u>

О.: Точка x_0, принадлежащая некоторому промежутку из области определения ф-и называется точкой локального минимума, если значение ф-и в этой точке наименьшее по сравнению со значениями ф-и в точках этого промежутка;

И x_0 точка локального максимума, если значение ф-и в этой точке наибольшее по сравнению со значениями ф-и в точках промежутка.

<u>О.:</u> Точка min и max ф-и называются точками экстремума ф-и.

Теорема о необходимом условии существования экстремума ф-и.

Если $x_0 \in D(y)$ и x_0 является точкой экстремума ф-и, то производная ф-и в этой точке = 0 или не существует.

О.: Ф-я $y=f(x)$ возрастающая(убывающая) на некотором промежутке, если на этом промежутке чем больше x, тем больше y(чем больше x, тем меньше y).

Необходимое и достаточное условие убывания или возрастания функции:

Ф-я $y=f(x)$ возрастающая, на некотором промежутке, если $f`(x)>0$ на этом промежутке и убывающая, на некотором промежутке, если $f`(x)<0$ на этом промежутке.

Теорема.

Достаточное условие существования экстремума.

- Если при переходе через некоторую точку производная меняет знак с «+» на «-», то это точка является точкой максимума ф-и;
- Если при переходе через некоторую точку производная меняет знак с «-» на «+», то это точка является точкой минимума ф-и;

О.: Точки, в которых производная = 0 или не существует называются критическими точками ф-и.

Для нашей ф-и:

Вычислим y`:

y`=(ln(x/(x+6))-1)` = (lnx – ln (x+6) – 1)` = 1/x – 1/(x+6) = x+6-x/(x(x+6)) = 6/x(x+6);

y`≠0 в области определения;

D(y `): x≠0, x≠-6;

0 и -6 не являются критическими точками;

Отсюда следует, что на 2-х промежутках y` определена непрерывна, не обращается в ноль и, следовательно, сохраняет знаки своих значений.

Найдем знак y` на промежутках (-∞;-6) и (0;+∞):

y`(-7)>0; y`(1)>0

Ф-я возрастает на промежутках (-∞;-6) и (0;+∞).

7) <u>Точки перегиба графика функции. Промежутки выпуклости, вогнутости графика функции.</u>

<u>О.:</u> Ф-я называется вогнутой на некотором промежутке, если её график расположен выше любой касательной.

<u>О.:</u> Ф-я называется выпуклой на некотором промежутке, если её график расположен ниже любой касательной, проведенной в любой точке этого промежутка.

О.: Точки из области определения ф-и, в которых вогнутость меняется на выпуклость(или наоборот) называются точками перегиба графика функции.

Теорема. Необходимое условие существования точки перегиба.

Если x_0, из области определения ф-и, точка перегиба графика ф-и, то в этой точке $y''=0$ или не существует.

Теорема. Достаточное условие вогнутости(выпуклости): графика функций:

- Если на некотором промежутке $y''>0$, то на этом промежутке ф-я вогнута;
- Если на некотором промежутке $y''<0$, то на этом промежутке ф-я выпукла;

Достаточное условие существования точки перегиба.

Если при переходе через точку $x_0 \in D(y)$, y” поменяла знак, то x_0 является точкой перегиба графика функции.

Для заданной ф-и:

Возможные точки перегиба найдем из необходимого условия.

Найдем y”:

$y' = 6/x(x+6) = 6*(x^2+6x)^{-1}$

$y'' = 6(-1)(x^2+6x\ )^{-2}\ (2x+6) = -6(2x+6/(x^2+6x)^2)$

$D(y'') : x(x+6) \neq 0; x \neq 0; x \neq -6;$

0;-6 – не принадлежат области определения функции.

$y'' = 0; (2x+6)/x(x+6) = 0.$

$2x+6=0$, $x=-3$, -3 – не принадлежит области определения функции; $x(x+6) \neq 0$, $x \neq 0$. $x \neq -6$;

Следовательно, критических точек нет. Точек перегиба график функции не имеет. Так как в данном примере точек перегиба нет, то найдем знак y” в области определения.

y”(1) = -6(1+6/49)<0;

y”(7) = -6(-8/7)>0;

(-∞; -6) – промежуток вогнутости;

(0;+∞) – промежуток выпуклости;

На основании исследований построим график.