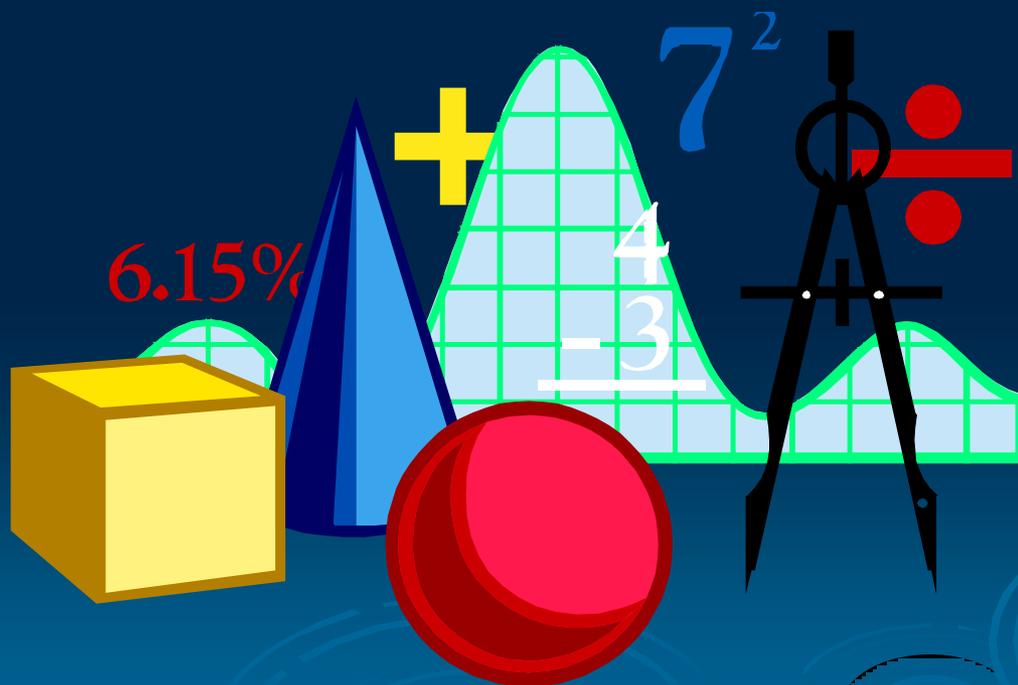


# Многогранники

(пособие для преподавателей курса  
Геометрии)



# Введение

- **Пространственное мышление значимо для каждого человека, независимо от уровня его образования и вида деятельности. Значительную роль в развитии пространственных представлений и пространственного мышления играет изучение свойств многогранников. Изучая планиметрию, ученики не только не должны забывать о пространственных фигурах, а наоборот, должны расширить знакомство с ними. Ведь нас окружают реальные предметы — пространственные фигуры.**

# Тела Платона

## Правильные многогранники

*Есть в школьной геометрии особые темы, которые ждешь с нетерпением, предвкушая встречу с невероятно красивым материалом. К таким темам можно отнести "Правильные многогранники". Здесь не только открывается удивительный мир геометрических тел, обладающих неповторимыми свойствами, но и интересные научные гипотезы. И тогда урок геометрии становится своеобразным исследованием неожиданных сторон привычного школьного предмета.*

*«Правильных многогранников вызывающе  
мало, но этот весьма скромный по  
численности отряд сумел пробраться в  
самые глубины различных наук.»*

*Л. Кэрролл*

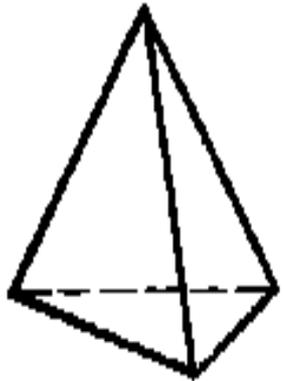


Ни одни геометрические тела не обладают таким совершенством и красотой, как правильные многогранники. Каково же это вызывающе малое количество и почему их именно столько. А сколько? Оказывается, ровно пять - ни больше ни меньше. Подтвердить это можно с помощью развертки выпуклого многогранного угла.



**В самом деле, для того чтобы получить какой-нибудь правильный многогранник согласно его определению, в каждой вершине должно сходиться одинаковое количество граней, каждая из которых является правильным многоугольником.**

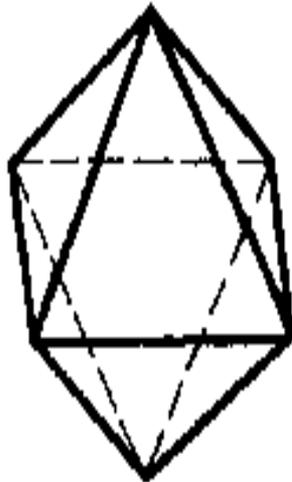
**Сумма плоских углов многогранного угла должна быть меньше  $360^\circ$ , иначе никакой многогранной поверхности не получится. Перебирая возможные целые решения неравенств:  $60k < 360$ ,  $90k < 360$  и  $108k < 360$ , можно доказать, что правильных многогранников ровно пять ( $k$  - число плоских углов, сходящихся в одной вершине многогранника)**



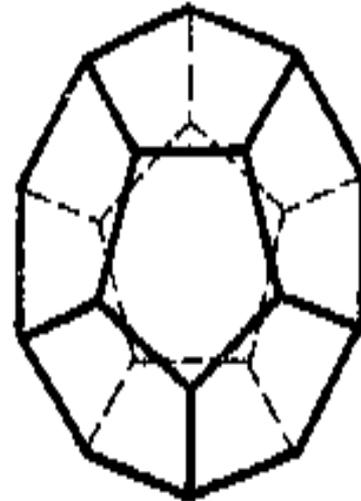
*Тетраэдр*



*Куб*



*Октаэдр*



*Додекаэдр*



*Икосаэдр*

Названия правильных многогранников пришли из Греции. В дословном переводе с греческого "тетраэдр", "октаэдр", "гексаэдр", "додекаэдр", "икосаэдр" означают: "четырёхгранник", "восьмигранник", "шестигранник". "двенадцатигранник", "двадцатигранник". Этим красивым телам посвящена 13-я книга "Начал" Евклида. Их еще называют телами Платона, т.к. они занимали важное место в философской концепции Платона об устройстве мироздания.

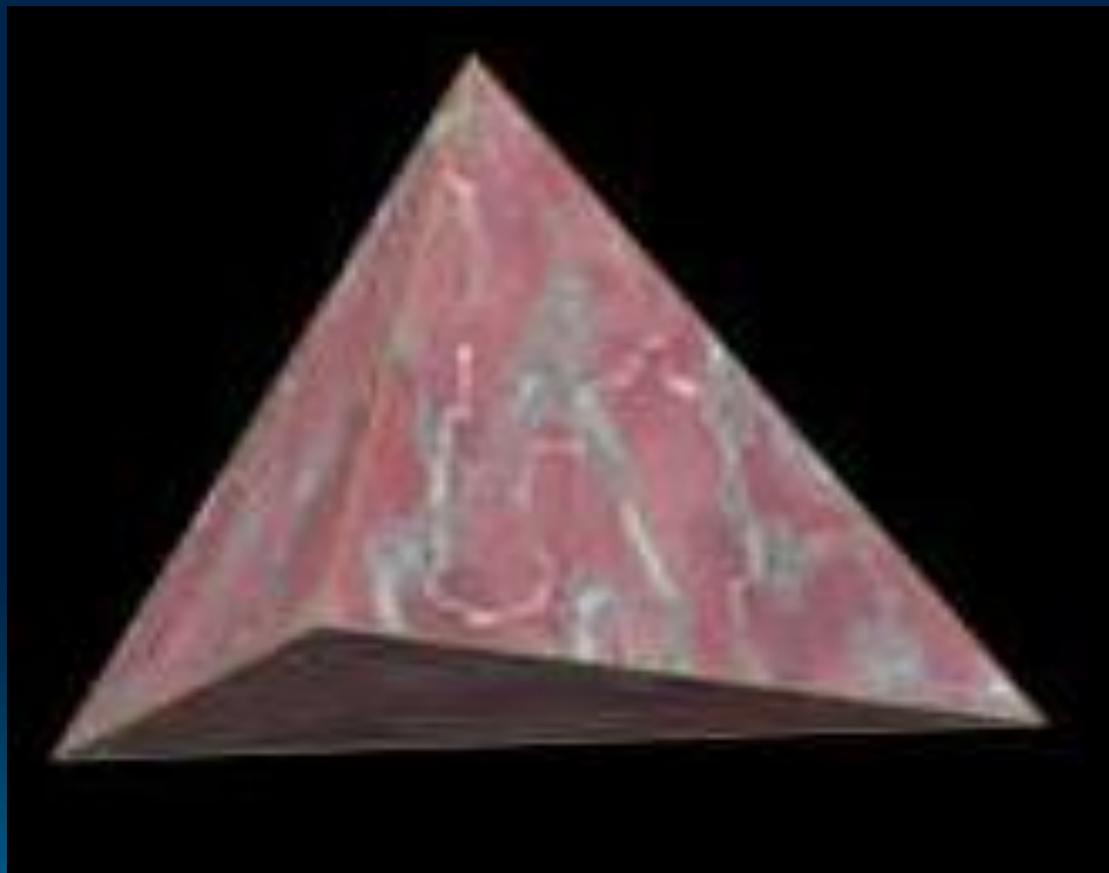
Четыре многогранника олицетворяли в ней четыре сущности или "стихии". Тетраэдр символизировал огонь, т.к. его вершина устремлена вверх; икосаэдр - воду, т.к. он самый "обтекаемый"; куб - землю, как самый "устойчивый"; октаэдр - воздух, как самый "воздушный". Пятый многогранник, додекаэдр, воплощал в себе "все сущее", символизировал все мироздание, считался главным.



Гармоничные отношения древние греки считали основой мироздания, поэтому четыре стихии у них были связаны такой пропорцией: **земля / вода = воздух/огонь**. Атомы "стихий" настраивались Платоном в совершенных консонансах, как четыре струны лиры. Напомню, что консонансом называется приятное созвучие. Важное место занимали правильные многогранники в системе гармоничного устройства мира И. Кеплера.



# Тетраэдр



# Что же такое тетраэдр?

*Тетраэдр принадлежит к семейству Платоновых тел, то есть правильных выпуклых многогранников. Тетраэдр - простейший многогранник, его гранями являются четыре равносторонних треугольника, 6 ребер и 4 вершины (в каждой из них сходится 3 ребра) Тетраэдр является правильной треугольной пирамидой. Название «тетраэдр» происходит от греческого слова tetra(тетра)- «четыре» и греческого ребра (эдра)- «основание»*

*Тетраэдр - пространственный аналог плоского равностороннего треугольника, поскольку он имеет наименьшее число граней, отделяющих часть трехмерного пространства.*

# Таблица № 1

название	тетраэдр
обозначение	$3 2\ 3$
граней	4
ребер	6
вершин	4
невыпуклых граней	0
грань	
количество	4

# Куб



# Что же такое куб?

*Куб, или гексаэдр, принадлежит к семейству Платоновых тел, то есть правильных выпуклых многогранников. Пожалуй, куб - наиболее известный и используемый многогранник. Этот многогранник имеет шесть квадратных граней, сходящихся в вершинах по три, 12 рёбер и 8 вершин (в каждой из них сходится 3 ребра).*

*Куб является правильной призмой.*

*Название «куб» происходит от греческого слова  $\chi\upsilon\beta\omicron\varsigma$  (кюбос), означающего «игральная кость».*

# Таблица № 2

название	куб
обозначение	$3 2\ 4$
граней	6
ребер	12
вершин	8
невыпуклых граней	0
грань	
количество	6

# Октаэдр



# Что же такое октаэдр?

Октаэдр принадлежит к семейству Платоновых тел, то есть правильных выпуклых многогранников. Гранями октаэдра являются восемь равносторонних треугольников, сходящихся в вершинах по четыре, 12 рёбер и 6 вершин (в каждой из них сходится 4 ребра) Название <<октаэдр>> происходит от греческого  $οκτω$  (окто) - <<восемь>> и слова ёбра(эдра)-<<основание>>.

Можно заметить, что ребра октаэдра образуют три квадрата, лежащих в экваториальных взаимно перпендикулярных плоскостях.

# Таблица № 3

название	октаэдр
обозначение	4 2 3
граней	8
ребер	12
вершин	6
невыпуклых граней	0
грань	
количество	8

# Додекаэдр

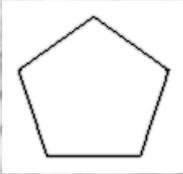


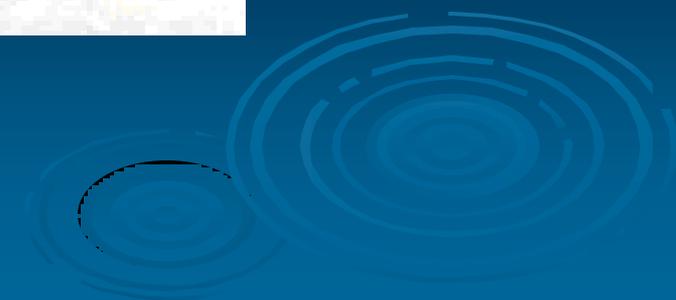
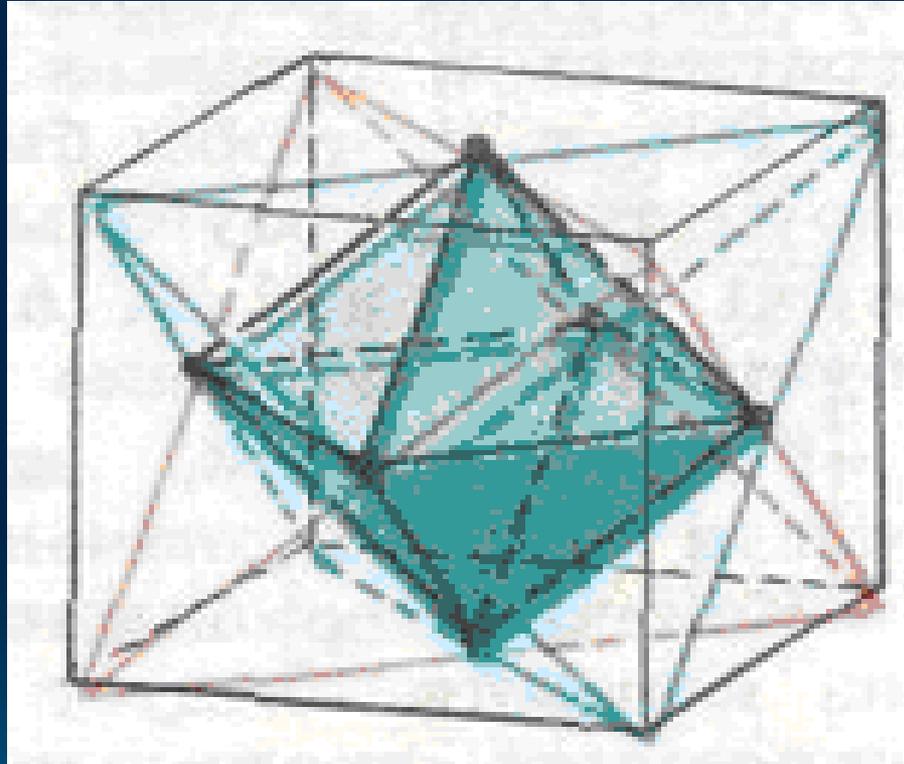
# Что же такое додекаэдр?

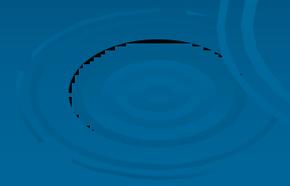
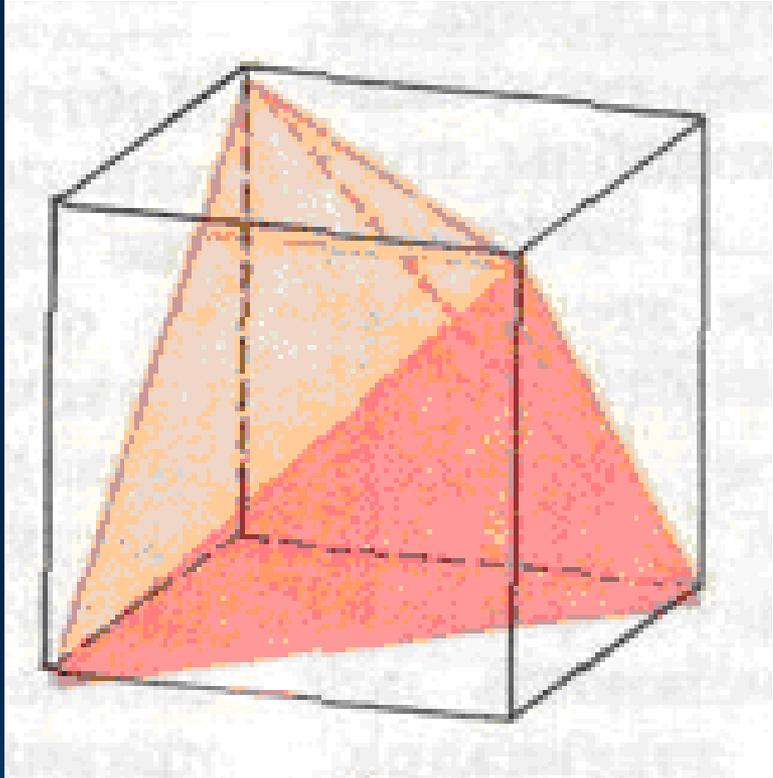
*Додекаэдр - представитель семейства Платоновых тел, то есть правильных выпуклых многогранников. Додекаэдр имеет двенадцать пятиугольных граней, сходящихся в вершинах по три, 30 рёбер и 20 вершин (в каждой из них сходится 3 ребра). Этот многогранник замечателен своими тремя звездчатыми формами.*

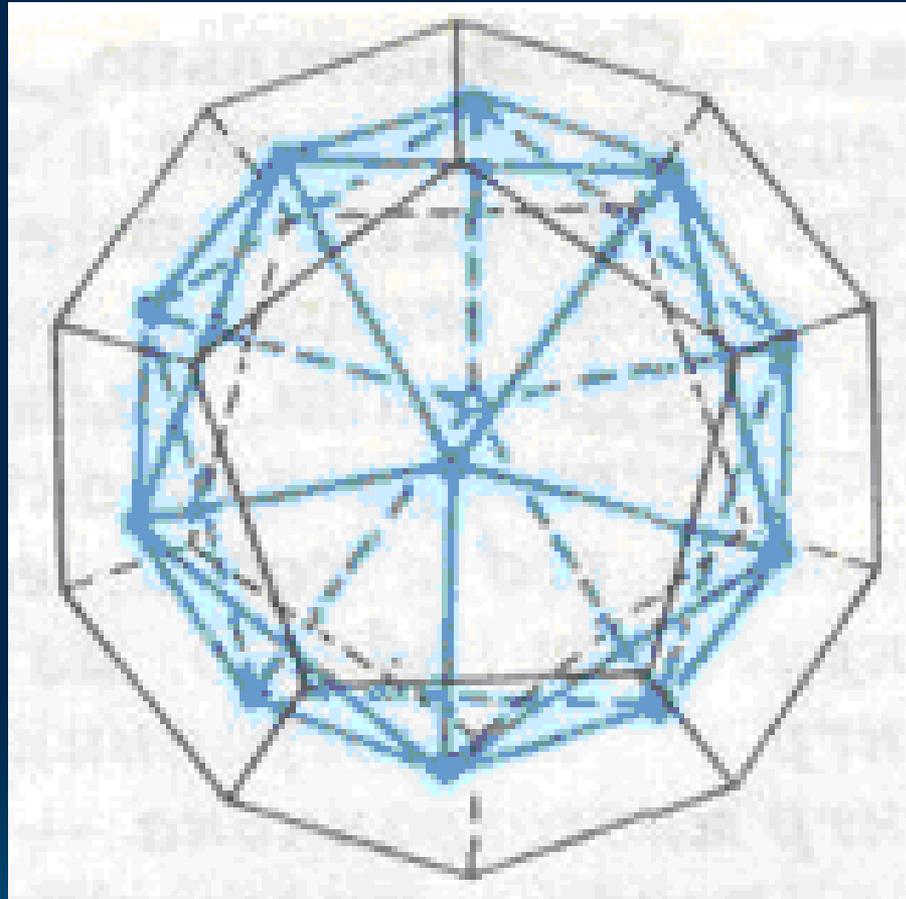
*Название «додекаэдр» происходит от греческих слов δωδεκα (додека)- «двенадцать» и εδρα (эдра)- «основание».*

# Таблица № 4

название	додекаэдр
обозначение	3 2 5
граней	12
ребер	30
вершин	20
невыпуклых граней	0
грань	
количество	12





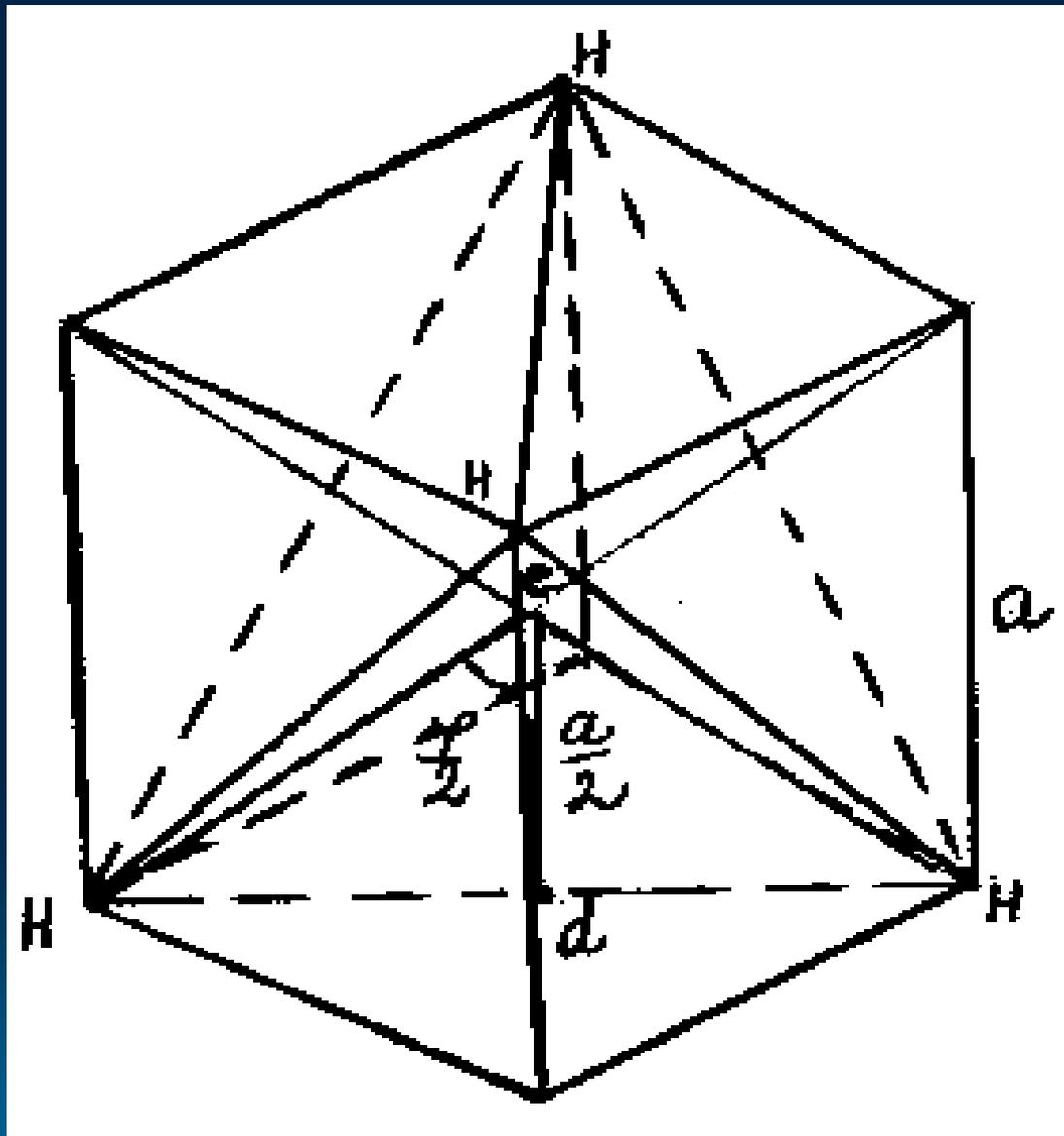


Задача. Модель молекулы метана  $\text{CH}_4$  имеет форму правильного тетраэдра, в четырех вершинах которого находятся атомы водорода, а в центре - атом углерода. Определить угол связи между двумя  $\text{CH}$  связями?

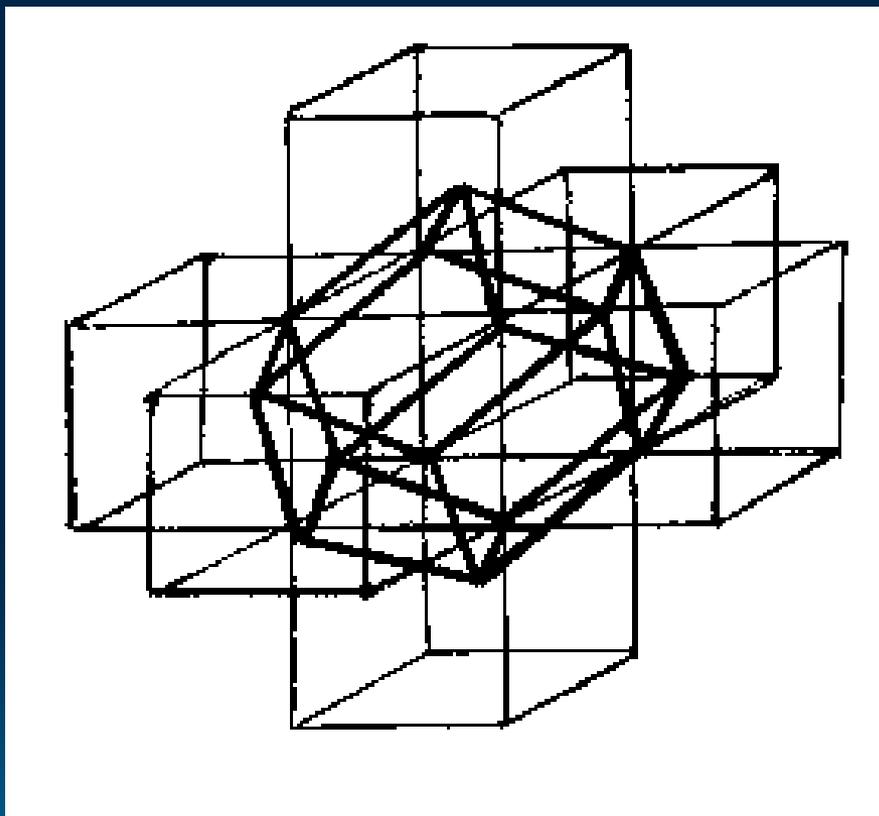


# Решение.

Так как правильный тетраэдр имеет шесть равных ребер, то можно подобрать такой куб, чтобы диагонали его граней были ребрами правильного тетраэдра. Центр куба является и центром тетраэдра, ведь четыре вершины тетраэдра являются и вершинами куба, а описываемая около них сфера однозначно определяется четырьмя точками, не лежащими в одной плоскости. Искомый угол  $j$  между двумя СН связями равен углу АОС. Треугольник АОС- равнобедренный. Отсюда , где  $a$  - сторона куба,  $d$ - длина диагонали боковой грани или ребро тетраэдра. Итак, , откуда  $=54,735610$  и  $j = 109,470$



Задача. С помощью семи кубов, образующих пространственный "крест", постройте ромбододекаэдр и покажите, что ими можно заполнить пространство.



**Решение.** Кубами можно заполнить пространство. Рассмотрим часть кубической решетки, изображенной на рис. Средний куб оставим нетронутым, а в каждом из "окаймляющих" кубов проведем плоскости через все шесть пар противоположащих ребер. При этом "окаймляющие" кубы разобьются на шесть равных пирамид с квадратными основаниями и боковыми ребрами, равными половине диагонали куба.



Пирамиды, примыкающие к нетронутому кубу, и образуют вместе с последним ромбический додекаэдр. Отсюда ясно, что ромбическими додекаэдрами можно заполнить все пространство. Как следствие получаем, что объем ромбического додекаэдра равен удвоенному объему куба, ребро которого совпадает с меньшей диагональю грани додекаэдра.





E'tiboringiz uchun raxmat /

