Funktsiya tushunchasi. Funktsiyaning limiti.

REJA:

1. Funktsiyaning ta’rifi, aniqlanish va qiymatlar sohasi.
2. Funksiyaning limiti
3. Cheksiz kichik va cheksiz katta funktsiyalar va ularning xossalari
4. Aniqmasliklarni ochish
5. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar

1. Funktsiyaning ta'rifi

Aytaylik X va Y haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lsin.

1-Ta'rif. Agar X to'plamning har bir $x \in X$ elementiga Y to'plamning yagona $y \in Y$ elementi mos qo'yilsa, u holda bu moslik funktsiya deyiladi va uni $y = f(x)$ kabi yoziladi.

Bu yerda $x -$ erkli o'zgaruvchi(argument); $y -$erksiz o'zgaruvchi (funksiya); $f - x$ ni y ga mos qo'yuvchi qoida.

2-Ta'rif. Argument x ning berilgan funktsiya ma'noga ega bo'ladigan qiymatlar to'plamiga funktsiyaning *aniqlanish sohasi* deyiladi va uni $D(f)$ bilan belgilanadi.

3-Ta’rif. x ning o’zgarishiga ko’ra y ning qabul qilishi mumkin bo’lgan qiymatlar to’plamiga funktsiyaning qiymatlar sohasi deyiladi va uni $E(f)$ bilan belgilanadi.

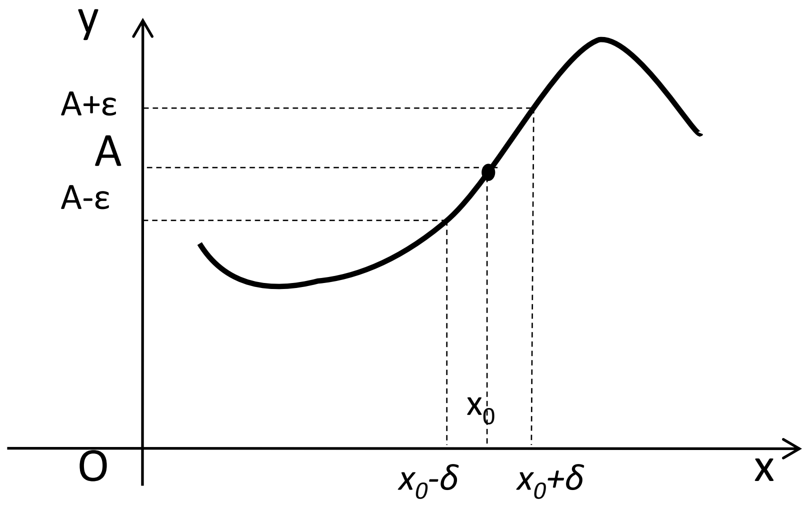
2. Funktsiyaning limiti

Aytaylik $y = f(x)$ funktsiya X to’plamda aniqlangan bo’lib, $x = a$ bo’lsin.

1-Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda A sonini $f(x)$ funktsiyaning $x \to a$ ga intilgandagi *limiti* deyiladi va uni $\lim_{x \to a} f(x) = A$ ko’rinishda yoziladi.

$$|x-a|<\delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta \Rightarrow -\delta + a < x < \delta + a$$

oraliqni a nuqtaning δ atrofi deyiladi.



Misol. $\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$

Umuman x argument a ga o'ngdan

yoki chapdan intilishi mumkin. Agar bu limitlar mavjud bo'lsa, ularni mos ravishda $f(x)$ funktsiyaning o'ng va chap limitlari deyiladi va ularni

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$$

ko’rinishda yoziladi.

Agar $f(a-0) = f(a+0) = A$ bo’lsa, u holda $y = f(x)$ funktsiya $x = a$ nuqtada limitga ega deyiladi.

3.Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar

Agar $x \to a$ ga intilganda

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ yoki } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty \text{ bo'lsa,}$$

U holda $f(x)$ funktsiyani *cheksiz katta funktsiya* deyiladi.

Masalan $x \to 2$ ga intilganda $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2} = \infty$ cheksiz katta funktsiya bo'ladi.

Agar $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ bo'lsa $f(x)$ funktsiyani *cheksiz kichik funktsiya* deyiladi.

Masalan, $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ funktsiya $x \to 1$ ga intilganda cheksiz kichik funktsiya bo'ladi. Chunki

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to 1}(x-1) = 0$$

Funktsiya limitining xossalari:

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ $\lim_{x\to a} g(x) = B$ mavjud bo'lsa u holda

1) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

3) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

4) $$\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$$

Misollar. $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x^2-x+4}.$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2 \qquad \lim_{x\to 3}(x^2-x+4)=9-3+4=10$$

3-xossaga ko'ra $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x^2-x+4}=\frac{\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)}{\lim_{x\to 3}(x^2-x+4)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x-3}.$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x-3}=\infty.$$

4.Aniqmasliklarni ochish

Limitlarni hisoblashda ba'zan quyidagi ko'rinishdagi aniqmasliklarga duch kelamiz:

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty), (1^{\infty}), (0^{\infty}), (0^{0})(\infty^{0}).$$

Ushbu ko'rinishdagi limitlarni hisoblash aniqmasliklarni ochish deyiladi.

Misollar.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

$$(*) = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{1}{x}^{\to 0}+3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{0}{0} = (*)$$

$$(*) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1} = (*)$$

$$(*) = \lim_{x \to -1}(2x - 5) = (*) \;= 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

$$(*) = \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

$$(*) = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = (*)$$

$$(*) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right) = -\frac{3}{10}$$

5. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar

Birinchi ajoyib limit

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

Ikkinchi ajoyib limit

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Misollar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} = (\frac{0}{0}) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin(2x)}{2x} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} =$$

$$= 2\cdot 1 = 2.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x} = e^{\frac{4}{3}}$$