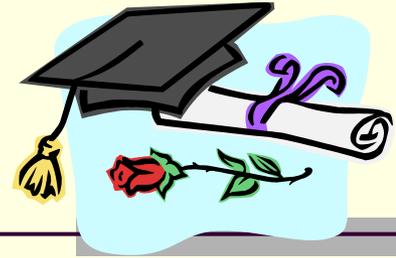


Производная



- 1. Производная
- 2. Общие правила составления производных
- 3. Производная сложной функции
- 4. Механическая интерпретация производной
- 5. Геометрическая интерпретация производной

Производная

- Возьмем какую-нибудь функцию, например x^2
- Дадим аргументу некоторое произвольное приращение h
- Разность $(x+h)^2 - x^2$ называется приращением функции
- Рассмотрим отношение приращения функции к приращению аргумента, т.е. дробь
$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad (A)$$
- Величина этой дроби зависит и от величины x , и от величины h . Например, при $x=2$ и $h=0,1$ значение дроби равна 4,1; при $x=3$ и $h=0,01$ величина этой дроби равна 6,01 и т.д.
- Если теперь мы станем приближать величину h неограниченно к нулю, то числитель и знаменатель дроби (A) станут одновременно приближаться неограниченно также к нулю. При этом величина самой дроби будет также изменяться.
- Характер такого изменения трудно обнаружить, если ограничиваться рассмотрением отношения (A) лишь в том виде, как оно описано.²

- Если же сделаем следующие преобразования

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

То увидим, что при $h \rightarrow 0$ выражение $2x+h$, следовательно и выражение $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ неограниченно приближаются к выражению $2x$.

Таким образом,
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

- Выражение $2x$ представляет собой новую функцию, которая получилась из исходной функции x^2 с помощью определенного процесса. Этот процесс заключался в вычислении предела отношения приращения функции x^2 к приращению аргумента x при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.
- **Полученная с помощью такого процесса функция $2x$ называется производной от функции x^2 .**

Процесс нахождения производной является новым математическим действием. Это действие обозначается поставленным над данной функцией знаком штрих $f'(x)$. Например, $(x^2)' = 2x$

- **Производной от данной функции называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.**
- **Примеры:**

$$(\sqrt{x})' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

- **Операция нахождения производной от функции называется дифференцированием этой функции.**
- **Если h произвольным образом стремится к нулю и если при этом отношение**

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

стремится к конечному пределу, то

- **говорят, что функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ дифференцируема.**

Общие правила составления производных

- 1. Производные суммы равна сумме производных.

$$\begin{aligned} [\gamma(x) + \varphi(x) - \lambda(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\gamma(x+h) + \varphi(x+h) - \lambda(x+h)] - [\gamma(x) + \varphi(x) - \lambda(x)]}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\gamma(x+h) - \gamma(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \frac{\lambda(x+h) - \lambda(x)}{h} \right] &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(x+h) - \gamma(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(x+h) - \lambda(x)}{h} &= \gamma'(x) + \varphi'(x) - \lambda'(x) \end{aligned}$$

- 2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$[A \cdot f(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A f(x+h) - A f(x)}{h} = A \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A \cdot f'(x)$$

Пример.

$$1. (x^2 + \sqrt{x} + \sin x)' = (x^2)' + (\sqrt{x})' + (\sin x)' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x.$$

$$2. (19x^3)' = 19(x^3)' = 19 \cdot 3x^2 = 57x^2$$

- **3. Производная произведения двух функций равна первой функции, умноженной на производную второй, плюс вторая функция, умноженная на производную первой.**

$$\begin{aligned}
 [f(x) \cdot \varphi(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)\varphi(x+h) - f(x)\varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)\varphi(x+h) - f(x)\varphi(x+h) + f(x)\varphi(x+h) - f(x)\varphi(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \varphi(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \cdot f(x) = f'(x)\varphi(x) + \varphi'(x)f(x).
 \end{aligned}$$

- **4. Производная дроби равна произведению знаменателя на производную числителя, минус произведение числителя на производную знаменателя, все разделенное на квадрат знаменателя.**

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} \right]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)\varphi(x) - \varphi(x+h)f(x)}{h\varphi(x+h)\varphi(x)} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)\varphi(x) - f(x)\varphi(x) + f(x)\varphi(x) - \varphi(x+h)f(x)}{h\varphi(x+h)\varphi(x)} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \varphi(x) - \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} f(x)}{\varphi(x+h)\varphi(x)} = \frac{f'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)f(x)}{[\varphi(x)]^2}.
 \end{aligned}$$

Пример.

$$1. (x^2 \cdot \sin x)' = x^2 \cdot (\sin x)' + \sin x \cdot (x^2)' = x^2 \cos x + 2x \sin x.$$

$$2. \left(\frac{\sin x}{x^2} \right)' = \frac{x^2 \cdot (\sin x)' - (x^2)' \cdot \sin x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4}.$$

- **5. Производная постоянной величины равна нулю.**

$$y = c, y' = 0$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

- **6. Производная от аргумента равна 1.**

$$y = x, y' = 1$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

Производная сложной функции и техника дифференцирования.

- Пусть $y = u^3$ и $u = \sin x$
- Если рассматривать отдельно равенство $y = u^3$, то можно считать аргументом u , а функцией y . В этом случае производная от величины y по аргументу u выразится так: $y'_u = 3u^2$
- Мы здесь вместо обычного обозначения y' применили обозначение y'_u . Это мы сделали для того, чтобы в дальнейшем не перепутать между собой эту производную с другой производной, которая у нас еще появится.
- Если рассматривать отдельно равенство $u = \sin x$, то можно считать аргументом x , а функцией u .
- В этом случае производная от величины u и по аргументу x выразится так:
- $u'_x = \cos x$
- Теперь станем рассматривать равенства $y = u^3$ и $u = \sin x$ в их связи друг с другом. Очевидно, что каждому значению аргумента x будет соответствовать определенное значение u , а полученному значению u будет соответствовать определенное значение y . Следовательно, мы можем рассматривать величину y не только как функцию величины u , но и как функцию аргумента x .
- Функцию y от x , заданную таким образом, называют *сложной* функцией от x , а величину u называют *промежуточной* переменной.
- При такой постановке вопроса возникает задача – найти производную от величину y по аргументу x .

- Придадим аргументу x приращение h , тогда величина u получит некоторое приращение h_1 , а после этого и величина y получит некоторое свое приращение h_2 .
- По определению производной $y'_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_2}{h}$.
- Но $\frac{h_2}{h} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h}$.
- Поэтому $y'_x = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_2}{h_1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1}{h}$.
- Но $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_2}{h_1} = y'_u$ и $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1}{h} = u'_x$.
- Поэтому $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.
- Значит, $y'_x = 3u^2 \cdot \cos x = 3 \sin^2 x \cos x$.
- Таким образом, **производная сложной функции по независимой переменной равна её производной по промежуточной переменной, умноженной на производную промежуточной переменной по независимой.**

- Примеры:

- 1) $y = 2^{\sin x}$

$$y'_x = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot \cos x$$

- 2) $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} \cdot (2ax + b)$$

- 3) $y = \ln \sin x$

$$y'_x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{tg} x$$

- 4) $y = \sin^3 x$

$$y'_x = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$$



Механическая интерпретация производной

- Известно, что функция $\frac{1}{2}gt^2$
- выражает путь, пройденный при свободном падении. Придадим аргументу t приращение h . Тогда приращение функции окажется равным $\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2$
- Отношение $\frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$ есть средняя скорость на промежутке времени от момента t до момента $t+h$. Скоростью же в момент t мы называем тот предел, к которому стремится эта дробь при $h \rightarrow 0$. Но этот предел по определению как раз есть производная функции $\frac{1}{2}gt^2$
- Таким образом, оказывается, что производная от функции, выражающей пройденный путь при прямолинейном **движении, выражает скорость этого движения**. В этом и заключается механический смысл производной.

- Вычислив
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} g(t+h)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{h}$$

- , найдем формулу скорости движения $v=gt$, где gt есть как раз производная функции $\frac{1}{2} g t^2$
- Эту производную можно было получить и так:

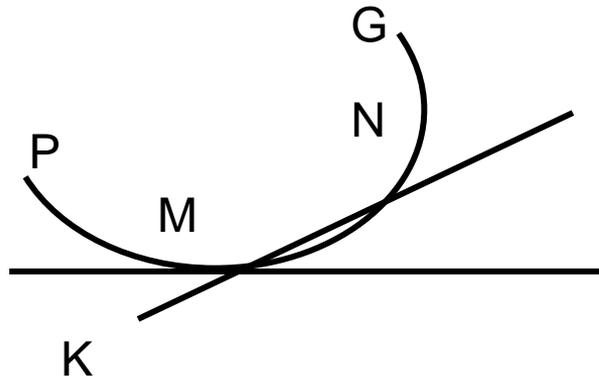
$$\left(\frac{1}{2} g t^2 \right)' = \frac{1}{2} g \cdot (t^2)' = \frac{1}{2} g \cdot 2t = gt$$

- Кратко говорят: ***Производная от пути по времени есть скорость.***
- Пример: Пройденный путь в зависимости от времени выражается функцией $\frac{a}{t} + b t^2$, где a и b – постоянные. Найти скорость движения.

$$v = \left(\frac{a}{t} + b t^2 \right)' = \left(\frac{a}{t} \right)' + (b t^2)' = a \cdot \left(\frac{1}{t} \right)' + b (t^2)' = a \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \right) + b \cdot 2t = -\frac{a}{t^2} + 2bt$$

Геометрическая интерпретация производной

- К кривой PG проведена секущая AB через две её точки M и N . Оставляя точку M неподвижной, вообразим, что точка N движется по кривой, неограниченно приближаясь к M . Тогда секущая AB станет поворачиваться вокруг неподвижной точки M , стремясь к предельному положению KT . Это предельное положение секущей называется касательной к кривой в точке M .



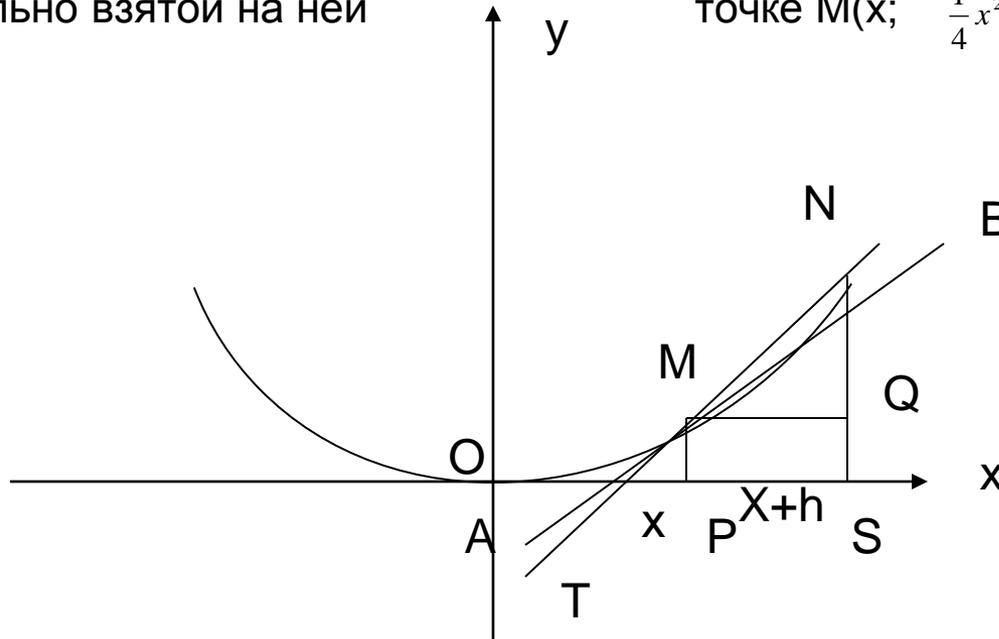
Определение. Касательной к данной кривой в данной точке M называется предельное положение секущей, проходящей через данную точку M и через другую точку N кривой, при условии, что точка N приближается по кривой неограниченно к неподвижной точке M .

Условимся называть тангенс угла между осью x и касательной к кривой **угловым коэффициентом касательной**

- Задача : Найти угловой коэффициент касательной к кривой в произвольно взятой на ней

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

точке $M(x; \frac{1}{4}x^2)$



Возьмем на кривой точку $N[x+h; \frac{1}{4}(x+h)^2]$ и проведем $MQ \parallel OX$. Тогда

$$MQ = h; NS = \frac{1}{4}(x+h)^2; QS = MP = \frac{1}{4}x^2; NQ = \frac{1}{4}(x+h)^2 - \frac{1}{4}x^2. \quad \text{tg} \angle NPQ = \frac{NQ}{MQ} = \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2 - \frac{1}{4}x^2}{h}$$

Если станем приближать точку M к точке N, то секущая станет приближаться к положению касательной AB. При этом h стремится к нулю, а величина угла QMN к величине угла PAM .

Но последний предел есть производная функции $y = \frac{1}{4}x^2$

Следовательно, $\text{tg} \angle PAN = (\frac{1}{4}x^2)' = \frac{1}{4}(x^2)' = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2}x$, т.е.

$$\text{tg} \angle PAM = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2 - \frac{1}{4}x^2}{h}$$

угловой коэффициент касательной равен производной функции.