Произведение матриц. Обратная матрица.

Лакаев Ш.С
Доцент кафедры «Высшая математика»

КУРСАВКА 2016

Произведение матриц

Определение **Произведением** матрицы A_{mxn} на матрицу B_{nxk} называется матрица C_{mxk} такая, что элемент матрицы , стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, т.е. элемент c_{ij}, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B .

Задание. Найти A*B , если $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Решение. Так как $A=A_{2\times3}$, а $B=B_{3\times1}$, то в результате получим матрицу $C=C_{2\times1}$, т.е. матрицу вида $C=\begin{pmatrix}c_{11}\\c_{21}\end{pmatrix}$

Найдем элементы данной матрицы:

$$c_{11}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}=1\cdot1+2\cdot2+0\cdot3=5$$

$$c_{21}=a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31}=3\cdot1+1\cdot2+(-1)\cdot3=2$$

Таким образом, получаем, что: $C=AB=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

Или короче:

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&-1\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2+0\cdot3\\3\cdot1+1\cdot2+(-1)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

Ответ. $C=AB=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной матрицей для квадратной матрицы А, если $A * A^{-1} = E$

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Составим **алгоритм нахождения обратной матрицы** с использованием равенства $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * A^T$.

- Вычисляем определитель матрицы A и убеждаемся, что он отличен от нуля (в противном случае матрица A необратима).
- Строим (A_{ij}) - матрицу из алгебраических дополнений элементов .
- Транспонируем матрицу (A_{ij}) , тем самым получаем A^T.

- Умножаем каждый элемент матрицы A^T на число $\frac{1}{|A|}$.

Этой операцией завершается нахождение обратной матрицы .

- Для проверки результата, проводим вычисление произведения $A * A^{-1}$. Если $A * A^{-1} = E$, то обратная матрица найдена верно, в противном случае где-то была допущена ошибка.

Пример: найти матрицу, обратную матрице A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Определитель матрицы $|A| = 26$.
Следовательно матрица A имеет обратную.

2. Найдём все алгебраические дополнения.

A_{11} = 1*(3+1) = 4
A_{12} = -1*(9+2) = -11
A_{13} = 1*1 = 1

A_{21} = -1*(-6) = 6
A_{22} = 1*(3-0) = 3
A_{23} = -1*(1+4) = -5

A_{31} = 1*2 = 2
A_{32} = -1*(-1) = -1
A_{33} = 1+(1+6) = 7

3. Следующий шаг - составим матрицу из получившихся дополнений:

$$\begin{vmatrix} 4 & -11 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

4. Далее нам нужно транспонировать получившуюся матрицу:

$$(\mathbf{A_{ij}})^{\mathbf{T}} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -11 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \end{vmatrix}$$

5. Умножаем эту матрицу на число, обратное определителю, то есть на 1/26:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{26} * \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -11 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4/26 & 6/26 & 3/26 \\ -11/26 & 3/26 & 1/26 \\ 1/26 & -5/26 & 7/26 \end{vmatrix}$$

6. Выполним проверку:

$$\mathbf{A} * \mathbf{A}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 4/26 & 6/26 & 3/26 \\ -11/26 & 3/26 & 1/26 \\ 1/26 & -5/26 & 7/26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение СЛАУ матричным способом

Систему линейных алгебраических уравнений можно представить в виде произведения матриц $A*X=B$, где A матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных;

X – матрица-столбец неизвестных;

B – матрица-столбец свободных членов.

Тогда $X=A^{-1}*B$, где A^{-1}матрица, обратная матрице A

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ