MAVZU:I.T.CH LARNI KANONIK KO'RINISHGA KELTIRING.

Ikkinchi tartibli chiziqlar umumiy $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ (1) tenglama bilan beriladi. Agar dekart koordinatalarda son o'qlarini parallel ko'chirsak, yangi ($o'x'y'$) sistema, qo'shimchasiga o'qlarni biror α burchakka bursak $o''x''y''$ sistema hosil bo'ladi. So'nggi sistemani OXУ tarzida belgilaymiz.

Teorema. I.T.Ch umumiy tenglamasi koordinata o'qlarini parallel ko'chirish va biror burchakka burish yordamida quyidagi hollardan biriga keltiriladi:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (ellips , $a=b$ *da aylana*)
2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (giperbola)
3. $y^2=2px$ (parabola)
4. $y^2-k^2x^2=0$ (ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq)
5.. $y^2-k^2=0$ yoki $x^2-k^2=0$ (ikki parallel to'g'ri chiziq)
6. $y^2=0$ yoki $x^2=0$ (ustma-ust tushgan to'g'ri chiziqlar)
7. $y^2+k^2x^2=0$ (bitta nuqta)
8. $y^2+k^2x^2=-1$ (bo'sh to'plam)

Isbot. Dastlab, O(0;0) koordinatalar boshini biror P($x_0;y_0$) nuqtaga parallel ko'chiramiz. Unda $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ almashtrish o'tkaziladi. Umumiy tenglama

A(x'^2+2$x'x_0 + x_0^2) + 2B(x'y' + x'y_0 + x_0y' + x_0y_0) + C(y'^2$+2 $y'y_0 + y_0^2) + 2D(x' + x_0) + 2E(y' + y_0) + F = 0$ yoki

A$x'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + (2Ax_0 + 2By_0 + 2D)x' + (2Bx_0 + 2Cy_0 + 2E)y'$+(A $x_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2x_0D + 2y_0$E+F)=0

ko'rinishiga keladi .

Demak, ($x_0;y_0$) $\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$ sistema echimi bo'lsa, umumiy tenglama A$x'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2$+$F' = 0$ (2)

ko'rinishga kelar ekan.

(2)-tenglamadagi $x'y'$ ko'paytmani yo'qatish uchun o'qlarni biror α burchakka buramiz, yani $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ almashtrish o'tkazamiz .Yangi sistemada x$\cdot$y ko'paytma koeffisienti -A$\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha + C\sin 2\alpha = 0$ bo'lsa, teorema isbotlanadi. Buning uchun ctg$2\alpha = \frac{A-C}{2B}$ shart o'rinli bo'ladigan α burchak tanlash etarli. (2)-tenglama $A'x^2 + C''y^2 + F'' = 0$ tenglamaga keladi.

Bu tenglama berilgan I.T.CH ning kanonik ko'rinishi deyiladi

Kanonik tenglama olinguncha A,B,C-sonlari o'zgarmaydi. AC-B^2 ifoda I.T.CH tenglamasi invarianti deyiladi. Bu ifoda uchun, $A' \cdot C' - B'^2 = AC - B^2$ bo'ladi.

I.T.CH $AC - B^2$ ifoda ishorasiga ko'ra quyidagi tirlarga bo'linadi:

1. $AC - B^2 > 0$ bo'lsa,I.T.CH elliptik tipda,

2. $AC - B^2 = 0$ bo'lsa,I.T.CH parobolik tipda,

3. $AC - B^2 < 0$ bo'lsa, I.T.CH giperbolik tipda bo'ladi.

1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$ tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring.

$\begin{cases} 3x_0 + 5y_0 - 1 = 0 \\ 5x_0 + 3y_0 - 7 = 0 \end{cases}$ sistema echimi $x_0 = 2,\ y_0 = -1$ bo'lganligii uchun $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$ almashtirish o'tkazamiz:

$$3(x'^2 + 4x' + 4) + 10(x'y' - x' + 2y' - 2) + 3(y'^2 - 2y' + 1) - 2(x' + 2) - 14(y' - 1) - 13 = 0$$ yoki

$3x'^2 + 10x'y' + 3y'^2 - 8 = 0$. Endi $ctg2\alpha = \frac{3-3}{10} = 0$ dan $\alpha = 45^\circ$ ekanligini topib, $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases}$ almashtirish o'tkazamiz:

$3 \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2 + 10 \cdot \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 3 \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) - 8 = 0$, yoki $8x^2 - 2y^2 = 8$

Tekshirilgan I.T.CH $x^2 - \frac{y^2}{2^2} = 1$ tenglamaga ega giperbola bo'ladi. AC-B^2 $= 3 \cdot 3 - 5^2 < 0$ ekanligi ham buni tasdiqlaydi.

2). $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$ kanonik ko'rinishga keltirilsin.

$\begin{cases} 8x_0 + 2y_0 + 8 = 0 \\ 2x_0 + 5y_0 + 2 = 0 \end{cases}$ echimi (-1;0) bo'lganligi uchun $\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' \end{cases}$ almashtirish o'tkazamiz.

$8(x'^2 - 2x' + 1) + 4(x' \cdot y' - y') + 5y'^2 + 16(x' - 1) + 4y' - 28 = 0$ yoki $8x'^2 + 4x'y' + 5y'^2 - 36 = 0$.

So'ngra $ctg2\alpha = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$ ekanligini topamiz. Bu holda α burchakni aniqlab bo'lmaydi, shuning uchun $\sin\alpha, \cos\alpha$ larni topishga harakat qilamiz:

$\frac{1}{tg2\alpha} = \frac{3}{4}$ yoki $\frac{1 - tg^2\alpha}{2\,tg\alpha} = \frac{3}{4}$, $2\,tg^2\alpha + 3\,tg\,\alpha - 2 = 0$ tenglamaga egamiz. Bundan $tg\,\alpha = \frac{1}{2}$ echimni olishimiz mumkin (0$< \alpha < \frac{\pi}{2}$ bo'lishiga harakat qildik xolos). $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ayniyatdan $\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, undan $\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ biz $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ deb almashtirish o'tkazamiz: x$' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y)$, $y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y)$ ekanligidan,

$\frac{8}{5}(4x^2 - 4xy + y^2) + \frac{4}{5}(2x^2 + 3xy - 2y^2) + \frac{5}{5}(x^2 + 4xy + 4y^2) - 36 = 0$.

Soddalashtirib, $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0 \; yoki \; \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ ellips kanonik tenglamasini hosil qilamiz.

Mavzuga doir masalalar.

1.Quyidagi aylanalar markazi koordinatalari va radiusi topilsin:

a) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$, b) $x^2+y^2-8x=0$, c) $x^2+y^2+4y=0$

2. A(-4;6) nuqta berilgan. Diametri OA kesmadan iborat aylana tenglamasini yozing:

3. A(1;2) nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlariga urinuvchi aylana tenglamasini yozing:

4. A(-1;3), B(0;2), C(1;-1) nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasini yozing.

5. $y = -\sqrt{-x^2 - 4x}$ chiziq shaklini chizing.

6. Berilgan nuqtadan berilgan aylanagacha bo'lgan eng qisqa (eng uzun) masofa topilsin.

a) A(6;-8) , $x^2+y^2=9$. b) B(3;9), $x^2+y^2-26x+30y+313=0$

7. Aylanalar orasidagi eng qisqa va eng katta masofani toping.

a) $x^2+y^2+4x-4y+7=0$ va $x^2+y^2-8x-8y+23=0$. b) $x^2+y^2+4x-4y+7=0$ va $x^2+y^2=25$

8. Qutb koordinatalarida berilgan aylanalar markazi va radiusini aniqlang.

a) $r=3\cos\varphi$, b) $r=-4\cos\varphi$, c) $r=\cos\varphi-\sin\varphi$.

9. Fokuslari abssissalar o'qida koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan ellips tenglamasini quyidagi shartlarda yozing:

a) yarim o'qlari 5 va 2; b) katta o'qi 10, 2c=8 ; c) kichik o'qi 24, 2c=10;

d) 2c=6, $\varepsilon=0,6$; e) direktrisalar orasidagi masofa 32 va $\varepsilon=0,5$.

10. $9x^2+25y^2=225$ ellips berilgan. Quyidagilarni toping:

a) yarim o'qlari; b) fokuslari; c) ekssentrisiteti d) direktrisa tenglamasi

11. Quyidagi ellipslar fokuslari koordinatalari, yarim o'qlari, ekssentrisiteti va driktrisa tenglamalari topilsin:

a) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$; b) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$; c) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.

12. Quyidagi chiziqlar shaklini chizing:

a) $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$, b) $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$.

13. Fokuslari absiqissa o'qida kordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan giperbola tenglamasini quyidagi shartlarda tuzing:

a) $2a=10$, $2b=8$; b) $2c=2$, $2b=8$; c) $2c=6$, $\varepsilon=1,5$; d) $2a=16$, $\varepsilon=1,25$;

e) $2c=20$ va asimpto'talari $y = \pm\frac{4}{3}x$.

14. $16x^2-9y^2=144$ giperbolada a,b, fokuslar koordinatalari, ekssentrisiteti, asimpto'ta va direktrisa tenglamalari topilsin.

15. Quyidagi chiziqlar shaklini chizing:

a) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$, b) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$.

16. Quyidagi giperbolalar fokuslari koordinatalari, yarim o'qlari, ekssentrisiteti, asimpto'ta va direktrisa tenglamalari topilsin:

a) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$, b) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$.

17. Uchi koordinata boshida joylashgan va quyidagi shartga bo'ysinuvchi parabola tenglamasini tuzing:

a) Abssissaga nisbatan simmetrik va A(9;6) nuqtadan o'tuvchi;

b) Ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik va C(1;1) dan o'tuvchi.

18. Quyidagi chiziqlar shaklini chizing:

a) $y = 2\sqrt{x}$, b) $y = -3\sqrt{-2x}$, c) $x = -\sqrt{3y}$, d) $x = 4\sqrt{-y}$

19. $r = \frac{12}{3-\sqrt{2}cos\varphi}$ ellipsda r=6 bo'ladigan nuqtani aniqlang.

20. $r = \frac{15}{3-4cos\varphi}$ giperbolada r=3 bo'ladigan nuqtani aniqlang.