# Все
# аксиомы и теоремы стереометрии

# Содержание:

- Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия
- Параллельность прямых и плоскостей
- Перпендикулярность прямых и плоскостей

# Аксиомы стереометрии

**С1.** ***Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.***

**С2.** ***Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.***

**С3.** ***Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.***

# Простейшие следствия из аксиом стереометрии

- **Теорема 15.1:**

Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

- **Теорема 15.2:**

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

- **Теорема 15.3:**

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

# Параллельность прямых и плоскостей

➢**Теорема 16.1:**

Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

➢**Теорема 16.2:**

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны

➢**Теорема 16.3:**

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой - нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

➢**Теорема 16.4:**

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

➢**Теорема 16.5:**

Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

# Перпендикулярность прямых и плоскостей

**Теорема 17.1:**

Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

**Теорема 17.2:**

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

**Теорема 17.3:**

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

**Теорема 17.4:**

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

**Теорема 17.5:**

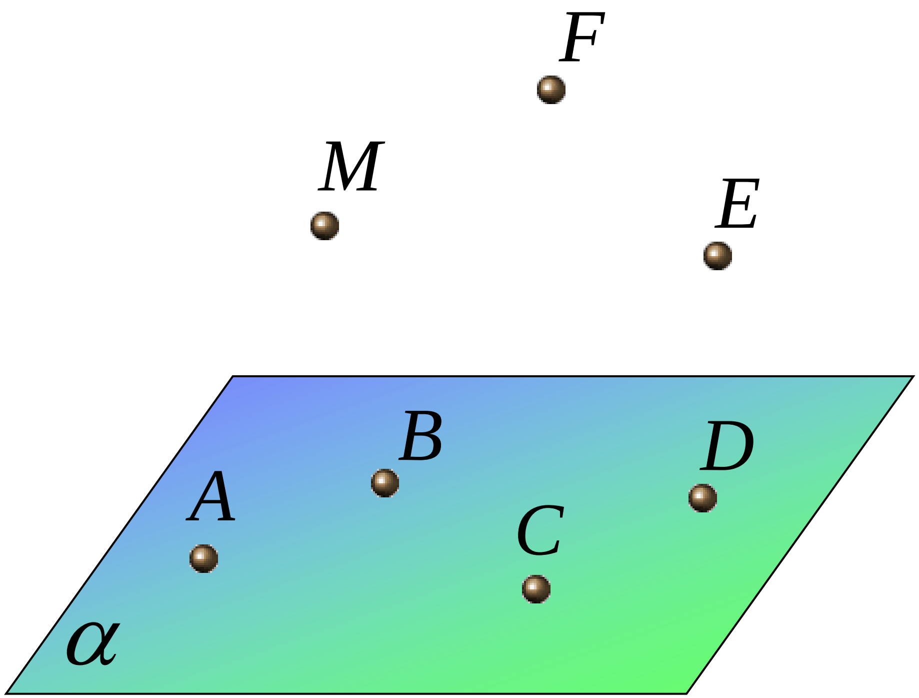
Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна наклонной.

**Теорема 17.6:**

Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

# Аксиомы стереометрии

**С1.** ***Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.***

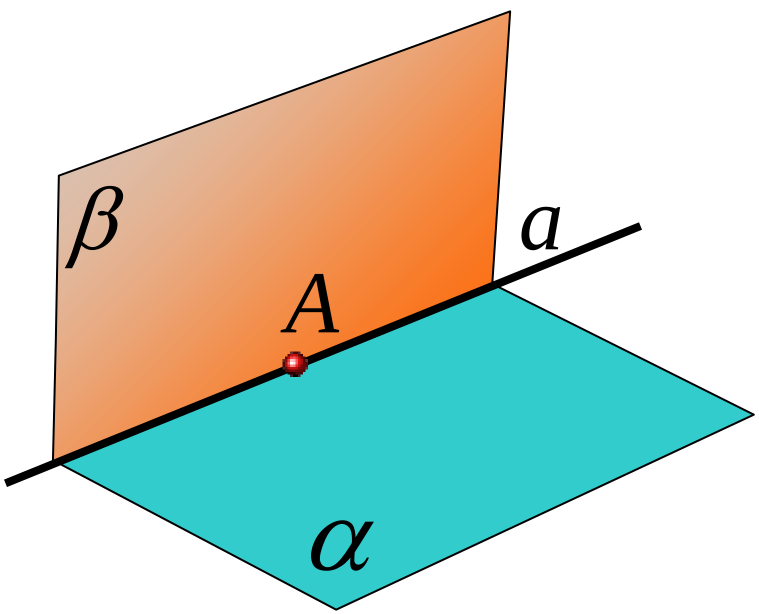



Точки $A, B, C, D \in \alpha$

Точки $M, F, E \notin \alpha$

# Аксиомы стереометрии

**С2.** ***Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.***




$$т.A \in \alpha,$$

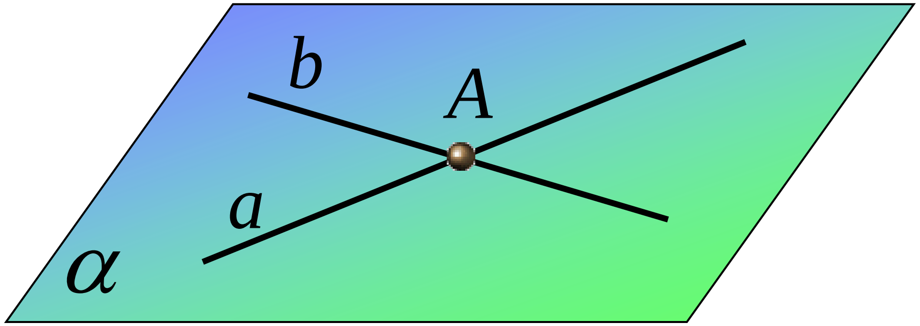
$$т.A \in \beta,$$

$$\alpha \cap \beta = a,$$

$$т.A \in a$$

# Аксиомы стереометрии

**С3.** ***Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.***




$$a \cap b = \text{т.} A$$

$$a, b \in \alpha,$$

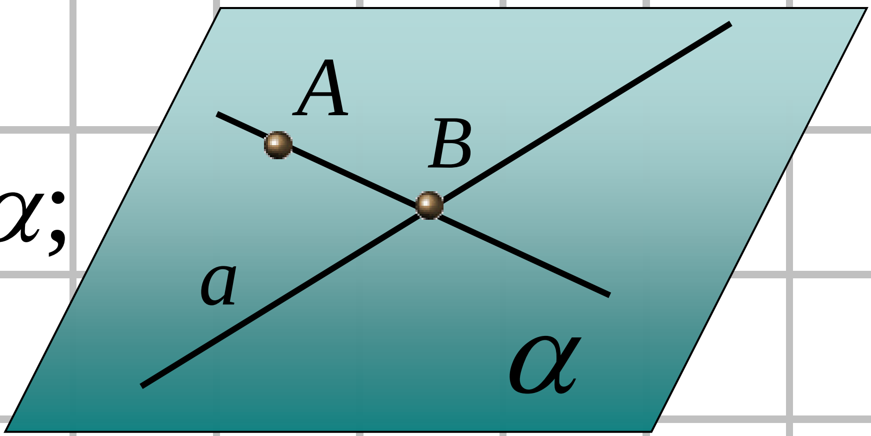
$$\alpha - (!)$$

**Теорема 15.1: Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.**

- Дано: прямая а, $т.A \notin a$
- Доказать:

$\exists \alpha$, такая, что $т.A \in \alpha, a \in \alpha$;

$пл.\alpha$ – единственная !




- Доказательство:

1)Возьмём $т.B \in a$ (по I)

2) Проведём прямую АВ, $AB \cap a = т.B$

3)Через прямые АВ и а проведём плоскость $\alpha$

4) $\alpha$ - ! (по $C_3$)

Теорема доказана.

**Теорема 15.2: Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.**

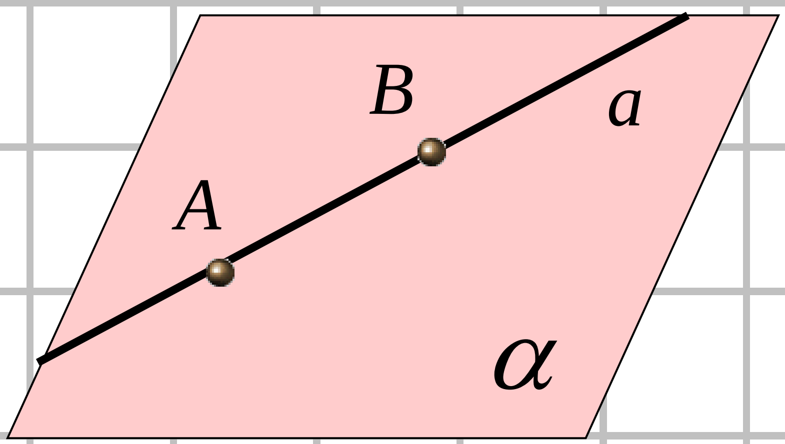
- Дано: прямая $a$ , плоскость $\alpha$.

$m.A, B \in a$

$m.A, B \in \alpha$

- Доказать:

$a \in \alpha$



•Доказательство:

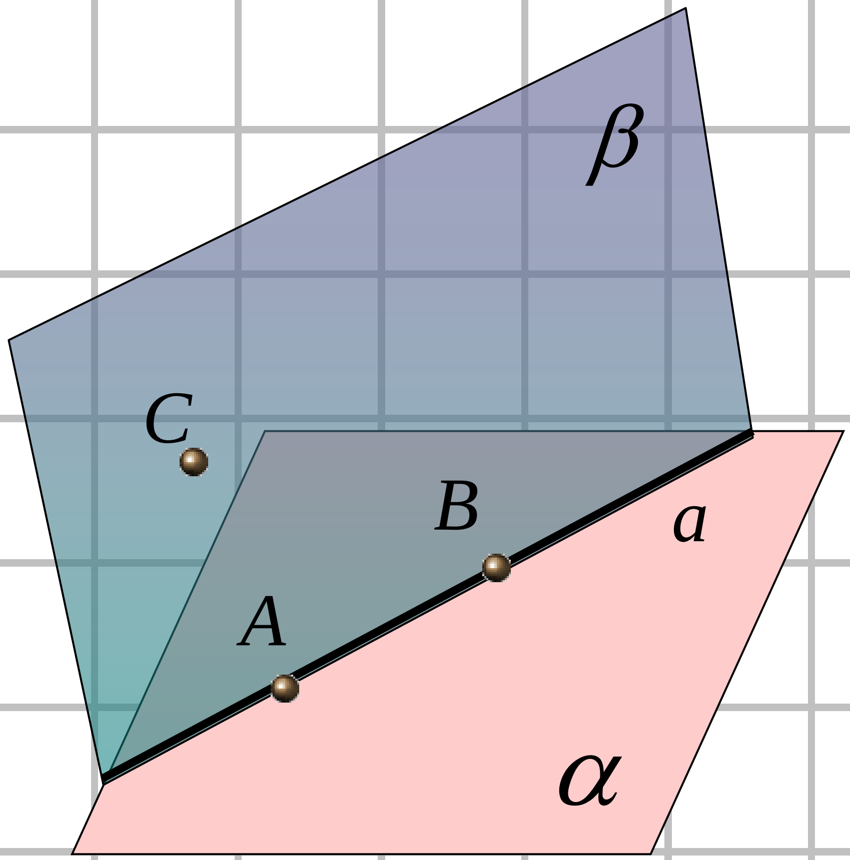
1) Возьмём $т.C \notin \alpha$

2) Через прямую $a$ и $т.C$ проведём плоскость $\beta$ (по Теореме 15.1)

3)
$$\left.\begin{array}{l} т.A \in \alpha, \beta \\ т.B \in \alpha, \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = a$$

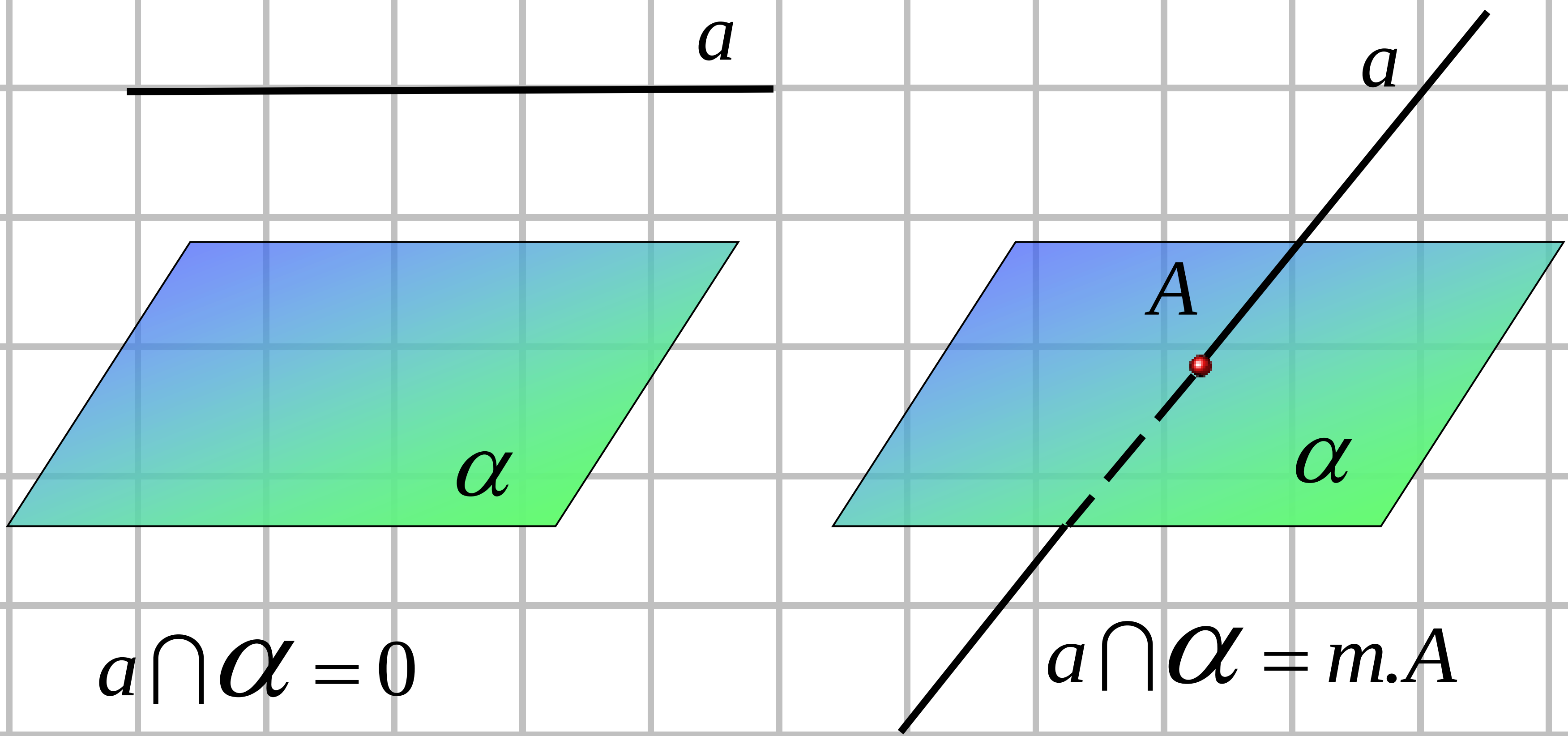
И значит, $a \in \alpha$.

Теорема доказана.



## Следствие из Теоремы 15.2:

**Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.**



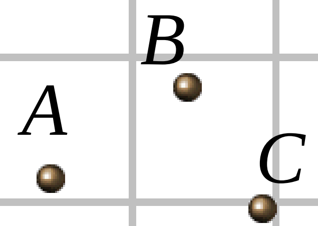

$a \cap \alpha = 0$

$a \cap \alpha = m.A$

**Теорема 15.3: Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.**

- Дано:

т. $A, B, C \notin a$

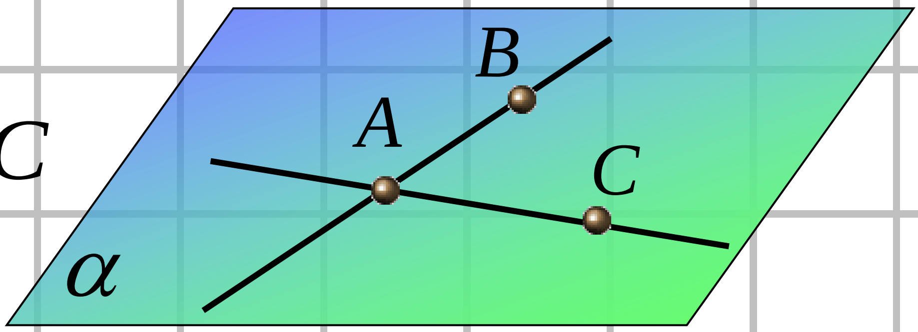



- Доказать:

1) $\exists \alpha$, такая, что т. $A, B, C \in \alpha$

2) пл. $\alpha$ – единственная (!)

•Доказательство:




Проведём прямые $AB$ и $AC$

$$AB \cap AC = т.A$$

По $C_3$ через $AB$ и $AC$ можно построить плоскость $\alpha$, и притом только одну.

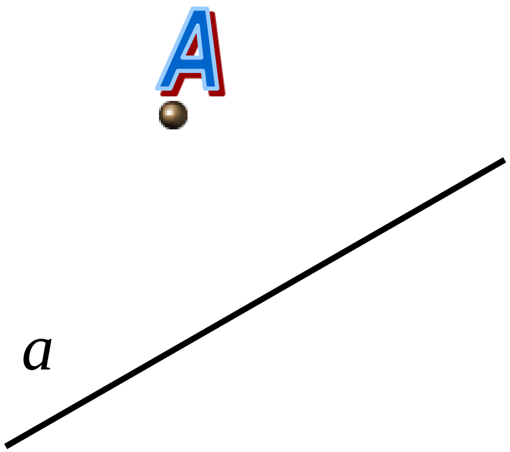
Теорема доказана.

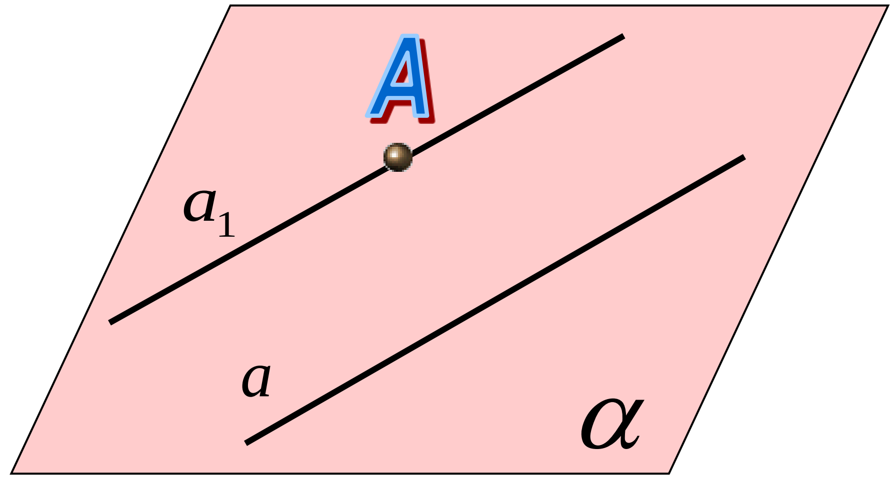
**Теорема 16.1:** **Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.**

- Дано:

прямая *a*,
т.А $\notin$ *a*

- Доказать:
- I) $\exists a_1,\text{ т.ч. } m.A \in a_1, a \parallel a_1$
- II) $a_1 - \text{единственная } !$






**Доказать:**

I) $\exists a_1$, т.ч. $m.A \in a_1, a \parallel a_1$

II) $a_1 - $ !

**Доказательство:**

I) 1) Проведём плоскость $\alpha$ через прямую *a* и т.*A* ( по Т.15.1)

2) Через т.А проведём прямую $a_1$

$$a_1 \parallel a, a_1 \in \alpha$$

Существование доказано.

II) 3) Предположим,

$$\exists a_2 \parallel a, \text{т.ч. } m.\text{A} \in a_2$$

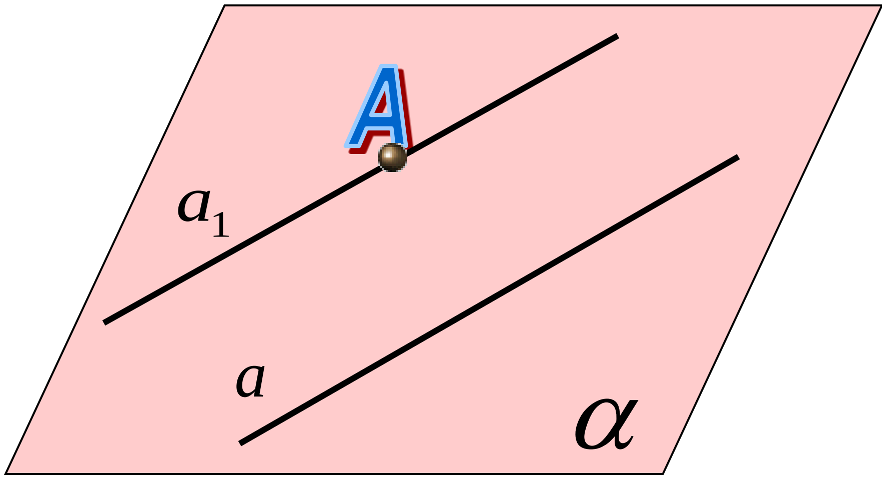
4) Проведём через прямые $a$ и $a_2$ плоскость $\alpha_2, m.ч.$

$$a \in \alpha_2, a_2 \in \alpha_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m.A \in \alpha_2$$

5) Получили, что через прямую а и точку А проходит 2 различные плоскости $\alpha$ и $\alpha_2$, а по Т.15.1 через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести единственную плоскость, значит, $a_1 - !$

**Теорема доказана.**

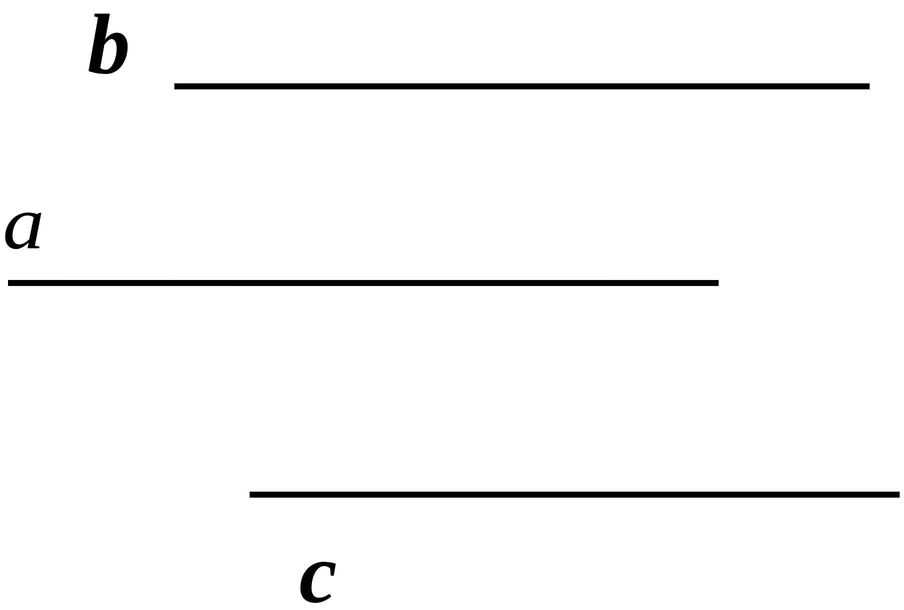


# Признак параллельности прямых

***Теорема 16.2:***

**Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.**

Рассмотрим случай, когда прямые не принадлежат одной плоскости.




- Дано:

  $a \parallel b, \mathrm{a} \parallel \mathrm{c}$

  $a, b, c \notin$ одной плоскости

- Доказать:

  $b \parallel c$

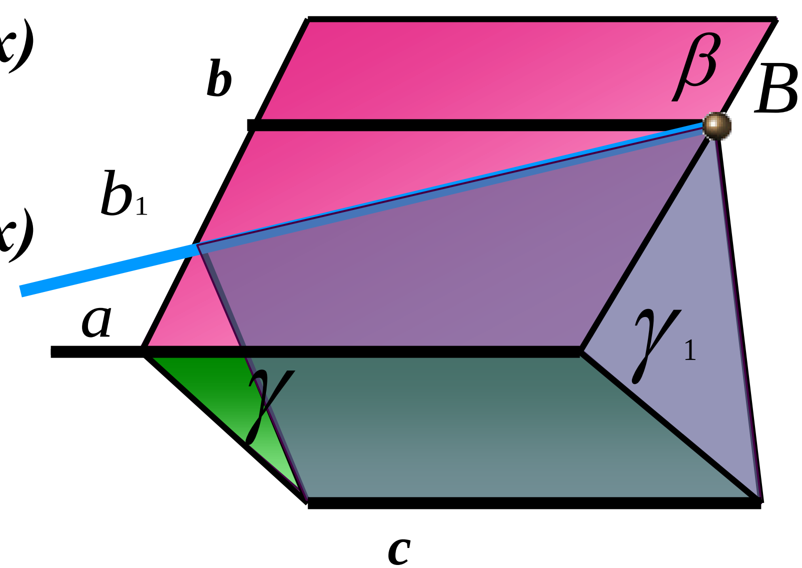
## Доказательство:

**1)** $a \parallel b;\ a, b \in \beta$
***(по определению параллельных)***

**2)** $a \parallel c;\ a, c \in \gamma$
***(по определению параллельных)***

***3) Возьмём*** $\text{т. } B \in b,$
$\text{т.} B, \text{прямая } c \in \gamma_1$
***(по теореме 15.1)***

**4)** $\gamma_1 \cap \beta = b_1,\ m.B \in b_1$



5) Предположим, что

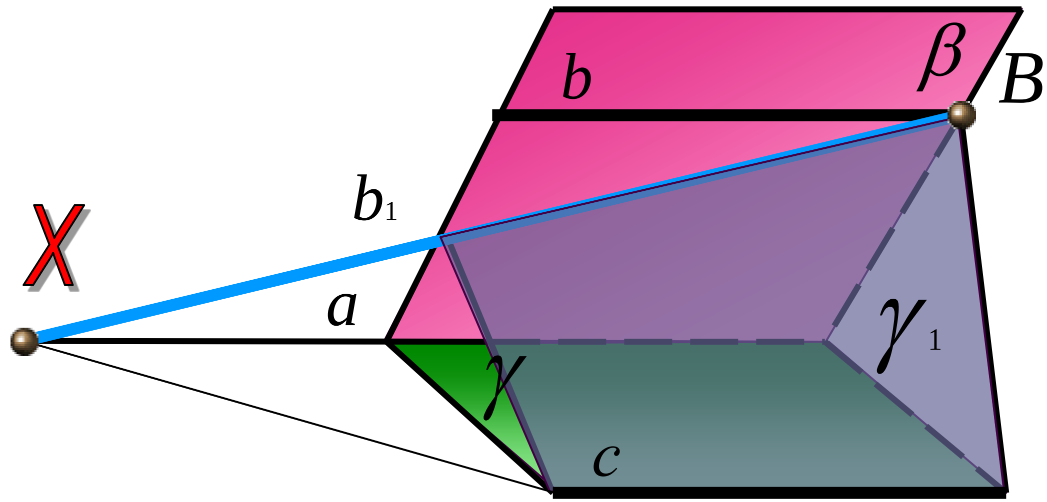
$b_1 \cap \gamma$, *тогда*

$b_1 \cap c = т.X$

$b_1 \cap a = т.X$

следовательно,

$a \cap c = т.X$




6) Но по условию $a \parallel c$. Значит, наше предположение (п.5) не верно, и значит $b_1$ не пересекает пл.$\gamma$,

$b_1$ не пересекает пр.$c$,

$b_1$ не пересекает пр.$a$,

7) Значит, $b_1 = b$

$$\left.\begin{array}{l} b, c \in \gamma_1 \\ b, c - \text{не пересекаются} \end{array}\right\} \Rightarrow b \parallel c$$

***Что и требовалось доказать.***

# Признак параллельности прямой и плоскости

***Теорема 16.3:*** **Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой - нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.**

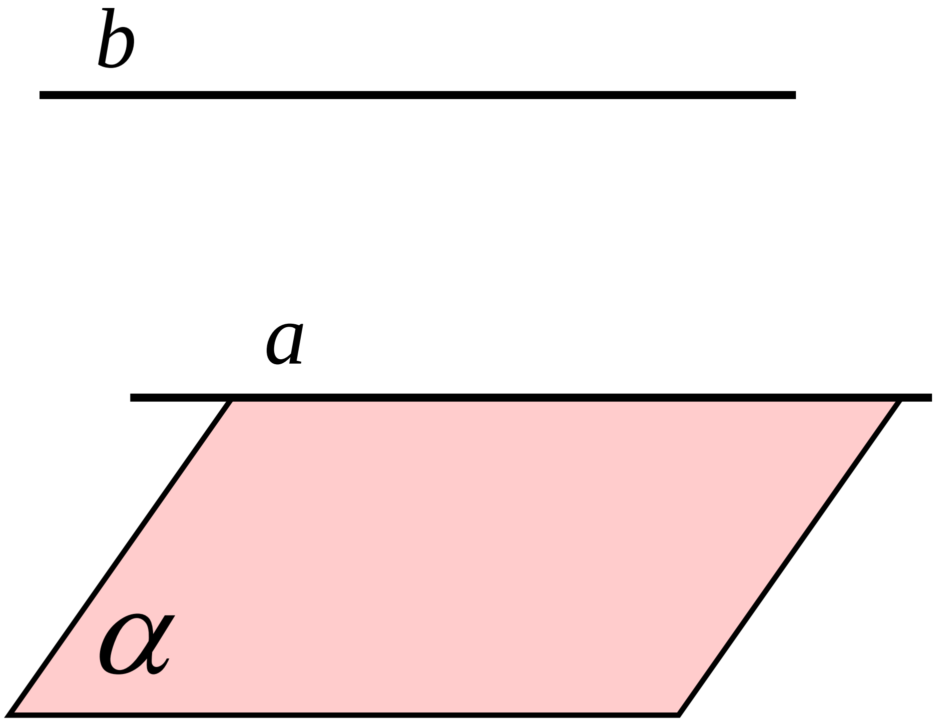
- Дано:

  плоскость $\alpha$

  $a \in \alpha,$

  $b \notin \alpha,$

  $a \parallel b$




- Доказать:

  $b \parallel \alpha$

- Доказательство:

1) $a \parallel b;\ a, b \in \alpha_1$ (по определению параллельных)

$\alpha \cap \alpha_1 = a$

2) Пусть $b$ не параллельна $\alpha$, то есть $b \cap \alpha = m.X$

Тогда $m.X \in a$, а значит

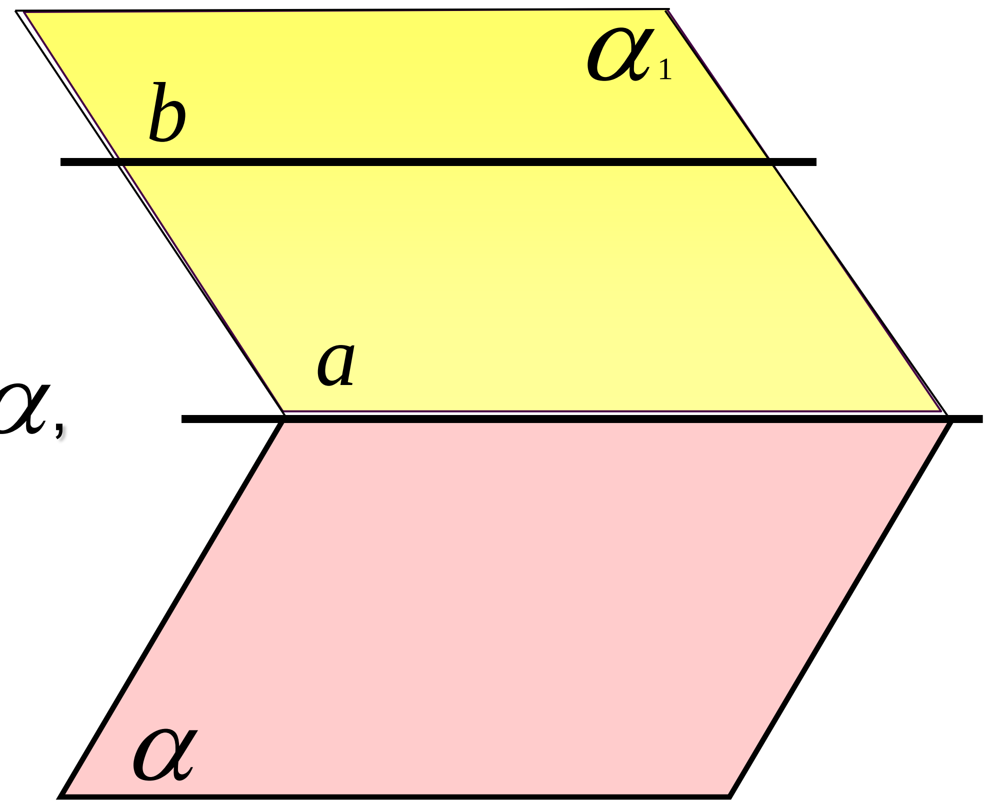
$a \cap b = m.X$

Но по условию

$a \parallel b \Rightarrow b$ не пересекает $\alpha$

и следовательно, $b \parallel \alpha$

- Теорема доказана.



# Признак параллельности плоскостей

**Теорема 16.4:** **Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.**

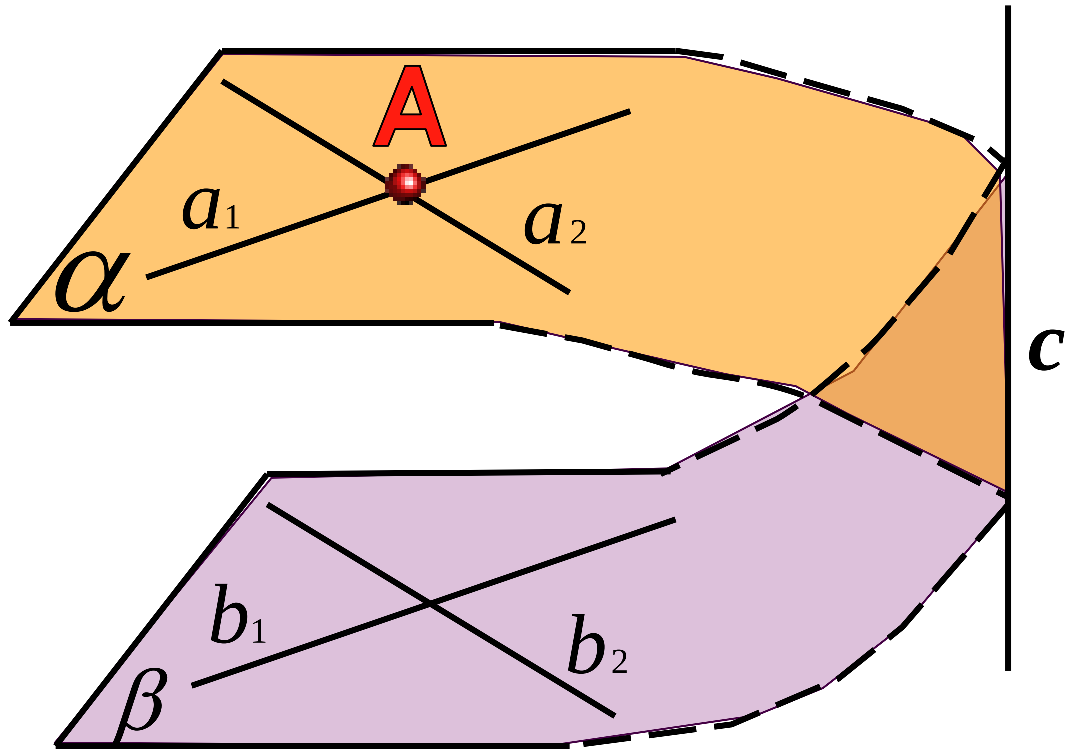
- Дано:

$$a_1, a_2 \in \alpha$$

$$b_1, b_2 \in \beta$$

$$a_1 \cap a_2 = т.A$$

$$a_1 \parallel b_1,\ \ a_2 \parallel b_2$$




- Доказать:

$$\alpha \parallel \beta$$

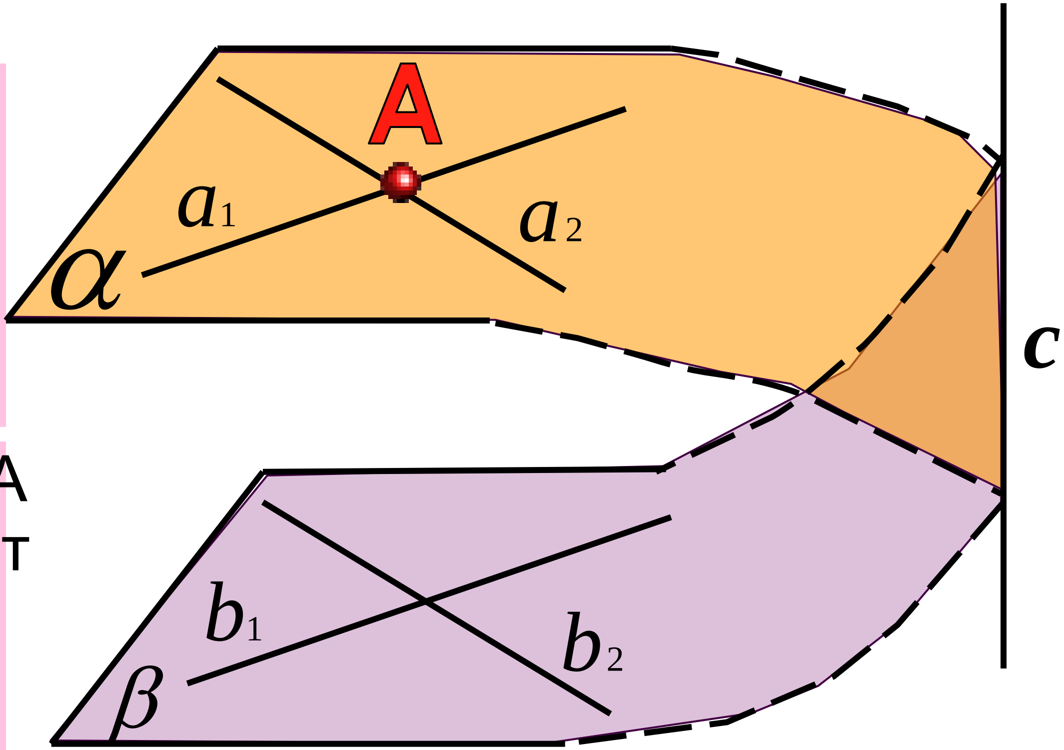
- Доказательство:

1) Пусть $\alpha \cap \beta = c$

2) $a_1, a_2 \parallel \beta$ (по Т.16.3)

3) Прямые $a_1, a_2$ не пересекают прямую *c* и лежат с ней в одной плоскости, а значит, $a_1, a_2 \parallel c$

4) Следовательно, через т.А в плоскости $\alpha$ проходит 2 прямых, параллельных данной, а это противоречит аксиоме параллельных. Наше предположение (п.1) неверно, и значит, $\alpha \parallel \beta.$ Теорема доказана.



# Существование плоскости, параллельной данной плоскости

***Теорема 16.5:*** **Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.**

- Дано:

  плоскость $\alpha$

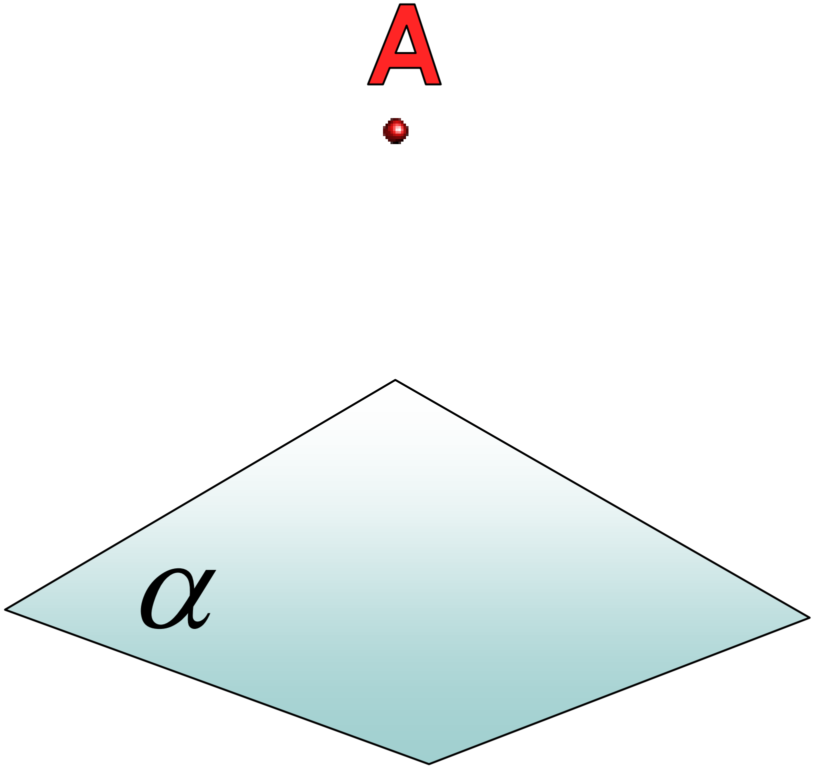
  $m.A \notin \alpha$

- Доказать:

1) $\exists \beta, \text{т.ч. } m.A \in \beta; \alpha \parallel \beta$

2) $\beta - !$

(единственность мы доказывать не будем)



# Доказательство:

1) Возьмём произвольные прямые $a \in \alpha$

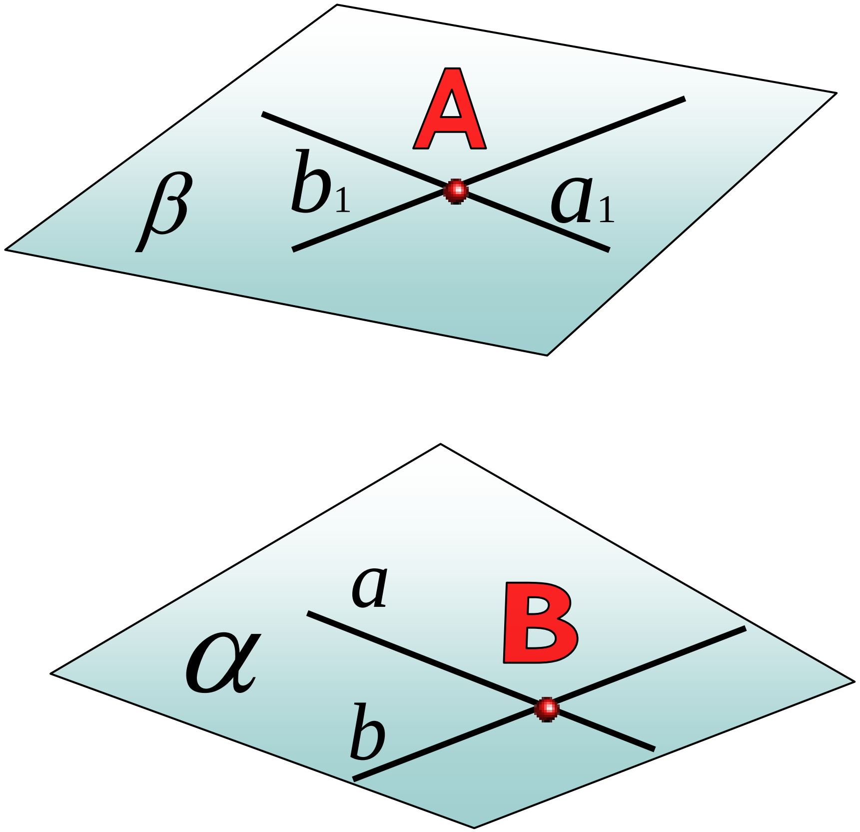
$b \in \alpha$

$a \bigcap b = m.B$

2) Через точку А проведём прямые $a_1, b_1$ такие, что $a_1 \parallel a, b_1 \parallel b.$

3) Проведём плоскость $\beta$ через прямые $a_1, b_1$

4) По Т.16.4 $\alpha \parallel \beta.$




- Теорема доказана.

**Теорема 17.1:** **Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.**

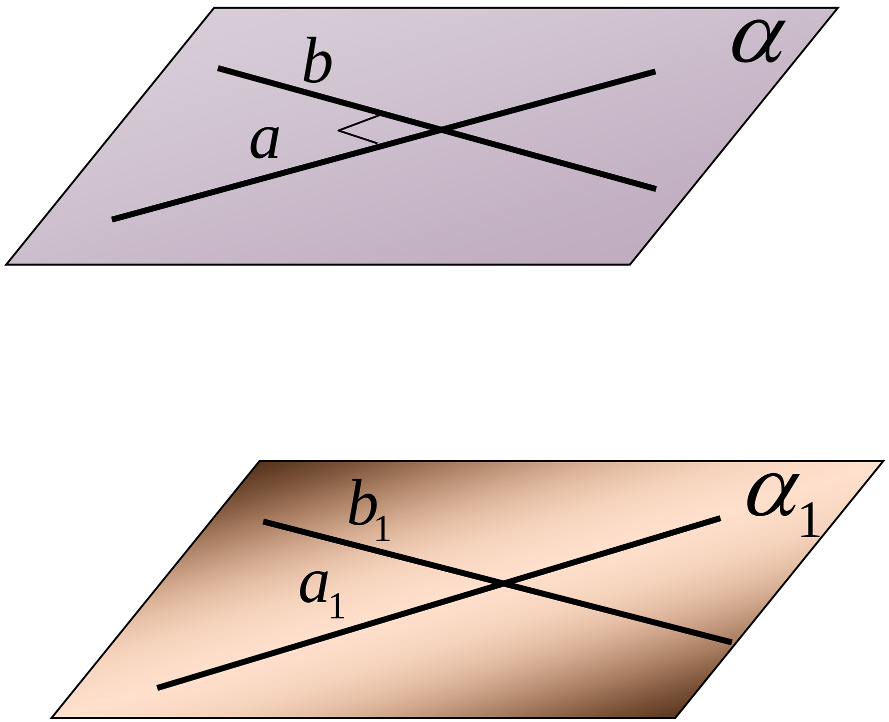
**Дано:** $a \perp b; a, b \in \alpha$

$a_1 \cap b_1;$

$a_1 \| a, b_1 \| b$

$a_1, b_1 \in \alpha_1$

**Доказать:** $a_1 \perp b_1$



# Дополнительное построение:

1) $a \cap b = m.C;\; a_1 \cap b_1 = m.C_1$

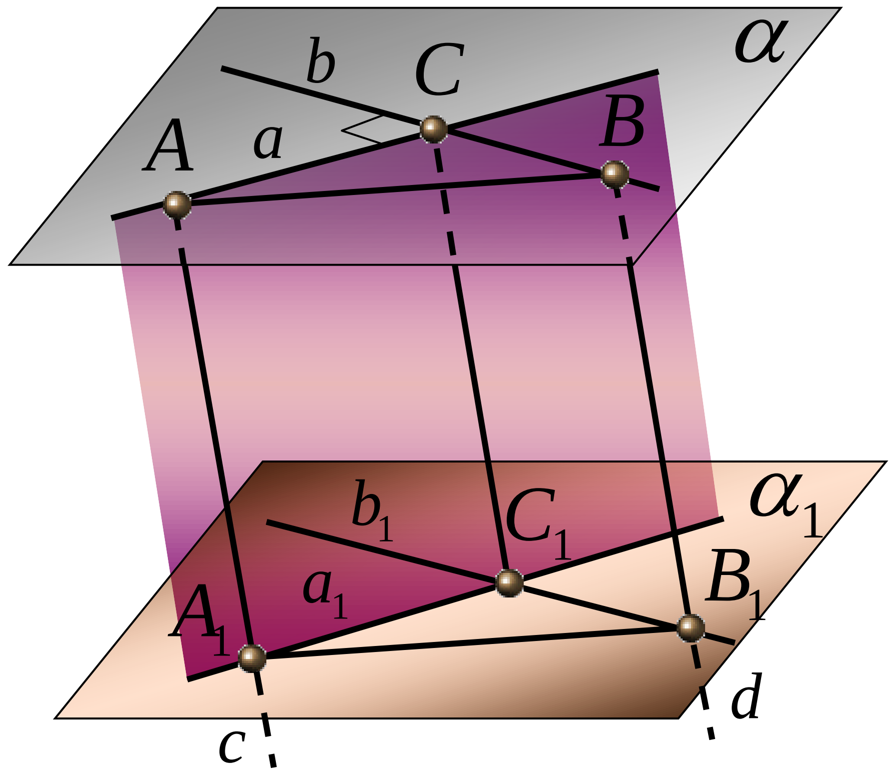
2) В плоскости параллельных прямых $a$ и $a_1$ проведём прямую $c \parallel CC_1$,

$$\left.\begin{array}{l} c \cap a = m.A \\ c \cap a_1 = m.A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 \parallel CC_1$$

3) Аналогично проведём прямую $d \parallel CC_1$ ,

$$\left.\begin{array}{l} d \cap b = m.B \\ d \cap b_1 = m.B_1 \end{array}\right\} \Rightarrow BB_1 \parallel CC_1$$

4) Проведём отрезки $AB$ и $A_1B_1$ .



# Доказательство:

1) Так как по построению $AA_1 \parallel CC_1$ и $BB_1 \parallel CC_1$,то по теореме 16.2 $\boxed{AA_1 \parallel BB_1}$

2) Плоскости $\alpha$ и $\alpha_1$ параллельны по теореме 16.4.

3) Рассмотрим четырёхугольник $ACC_1A_1$

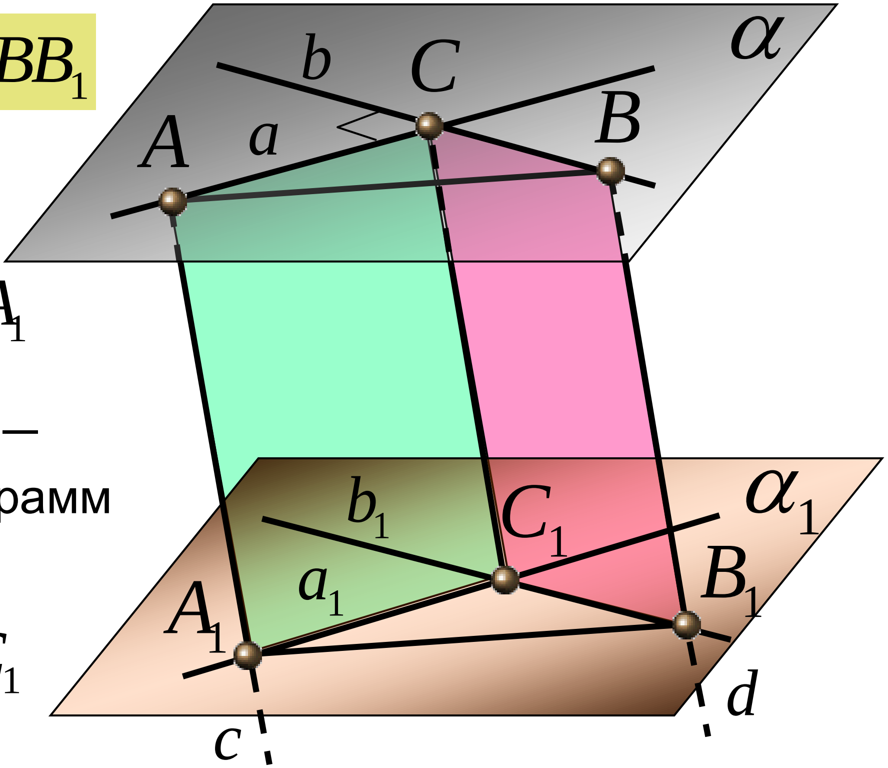
$$\left.\begin{array}{l} AC \parallel A_1C_1 \text{ -по условию} \\ AA_1 \parallel CC_1 \text{-по построению} \end{array}\right\} \Rightarrow ACC_1A_1 - \text{параллелограмм}$$

$$\Rightarrow \boxed{AC = A_1C_1}$$

4) Рассмотрим четырёхугольник $CBB_1C_1$

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel B_1C_1 \text{ -по условию} \\ BB_1 \parallel CC_1 \text{-по построению} \end{array}\right\} \Rightarrow CBB_1C_1 - \text{параллелограмм}$$

$$\Rightarrow \boxed{BC = B_1C_1}$$



# Доказательство:

5) Рассмотрим четырёхугольник $ABB_1A_1$ :

$AA_1 \parallel BB_1$ -из 1)

$AB \parallel A_1B_1$ -по 1-му свойству параллельных плоскостей

$\Rightarrow ABB_1A_1$ – параллелограмм

$\Rightarrow \boxed{AB = A_1B_1}$

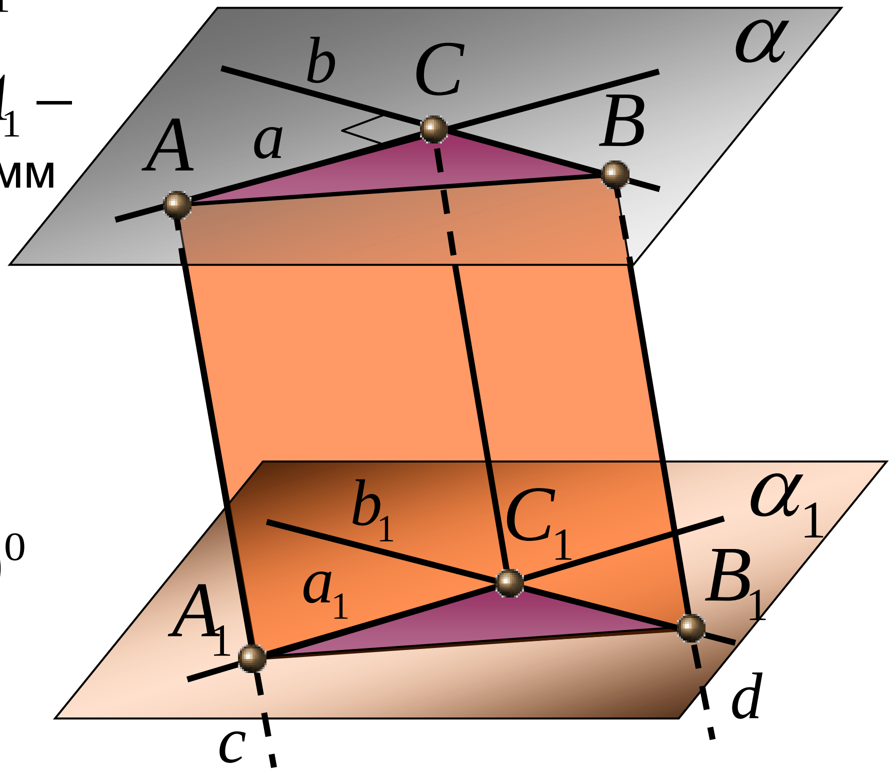
6) Рассмотрим $\Delta\, ABC$ и $\Delta\, A_1B_1C_1$

Они равны по 3-м сторонам.

$\angle ACB = 90^0 \Rightarrow \angle A_1C_1B_1 = 90^0$

А значит, $\boxed{a_1 \perp b_1.}$

Теорема доказана.



**Теорема 17.2:**

**Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.**

Дано:

Плоскость $\alpha$,

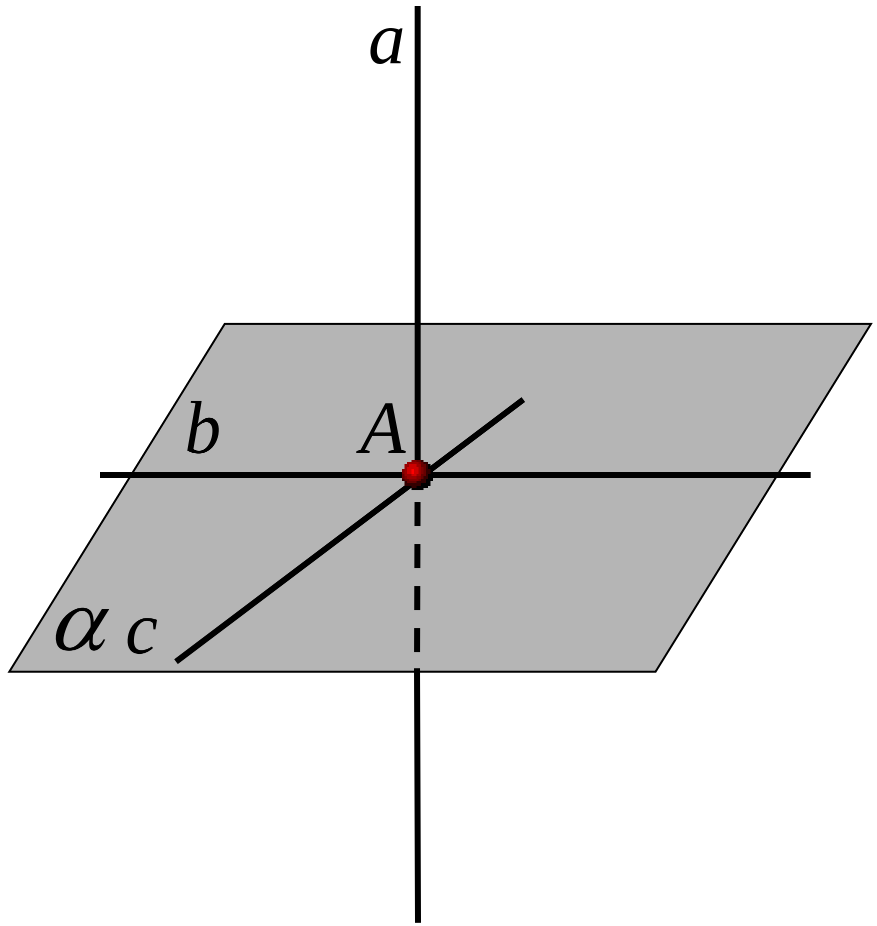
$a \notin \alpha; b, c \in \alpha$

$b \cap c = m.A$

$a \perp b, a \perp c$

Доказать:

$a \perp \alpha$



# Дополнительное построение:

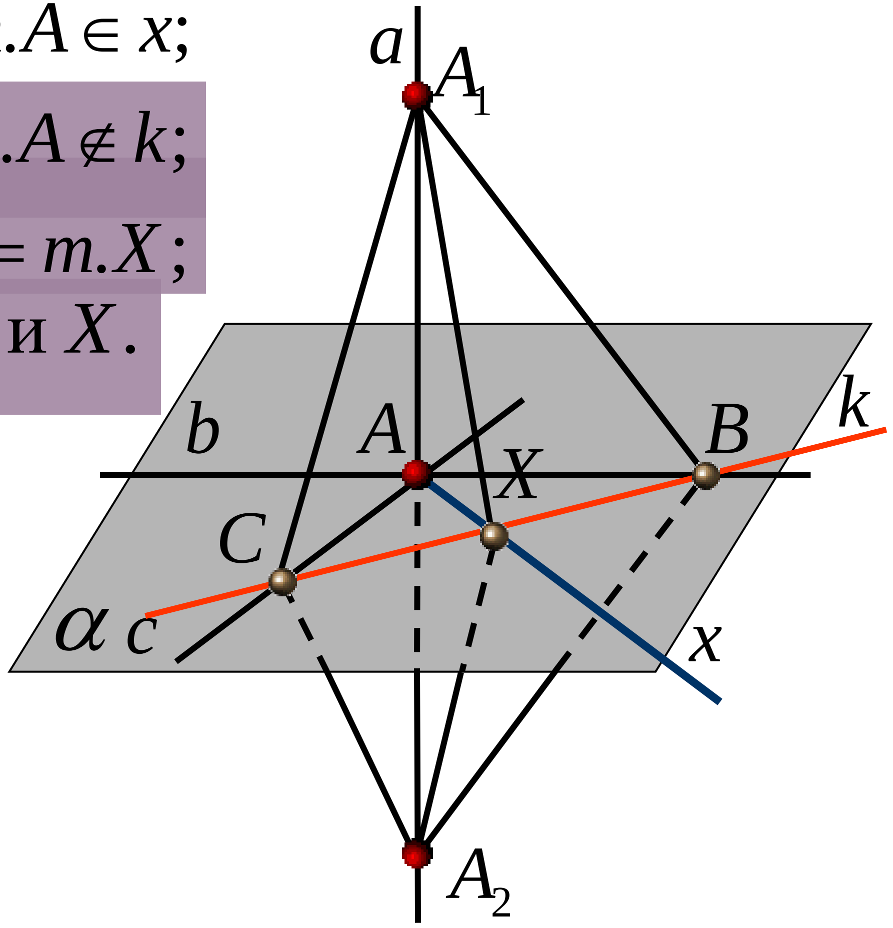
1) $AA_1 = AA_2; A_1, A_2 \in a;$

2) *Проведём* прямую $x \in \alpha; т.A \in x;$

3) *Проведём* прямую $k \in \alpha; т.A \notin k;$

$k \cap c = т.C, k \cap b = т.B, k \cap x = т.X;$

4) *Соединим* $т.A_1, A_2$ с $т. B, C$ и $X$.



# Доказательство:

1) Рассмотрим $\Delta A_1A_2C$ - равнобедренный, так как $A_1A = A_2A$ -по построению, $AC \perp a$ - по условию. Т.е. АС– высота и медиана $\Delta A_1A_2C$ Следовательно, $A_1C = A_2C$

2) $\Delta A_1A_2B$ - равнобедренный аналогично, $\Rightarrow A_1B = A_2B$

3) $\Delta A_1BC$ = $\Delta A_2BC$ по 3 призн., Т.к. ВС – общая, а две другие стороны равны из 1) и 2), следовательно,

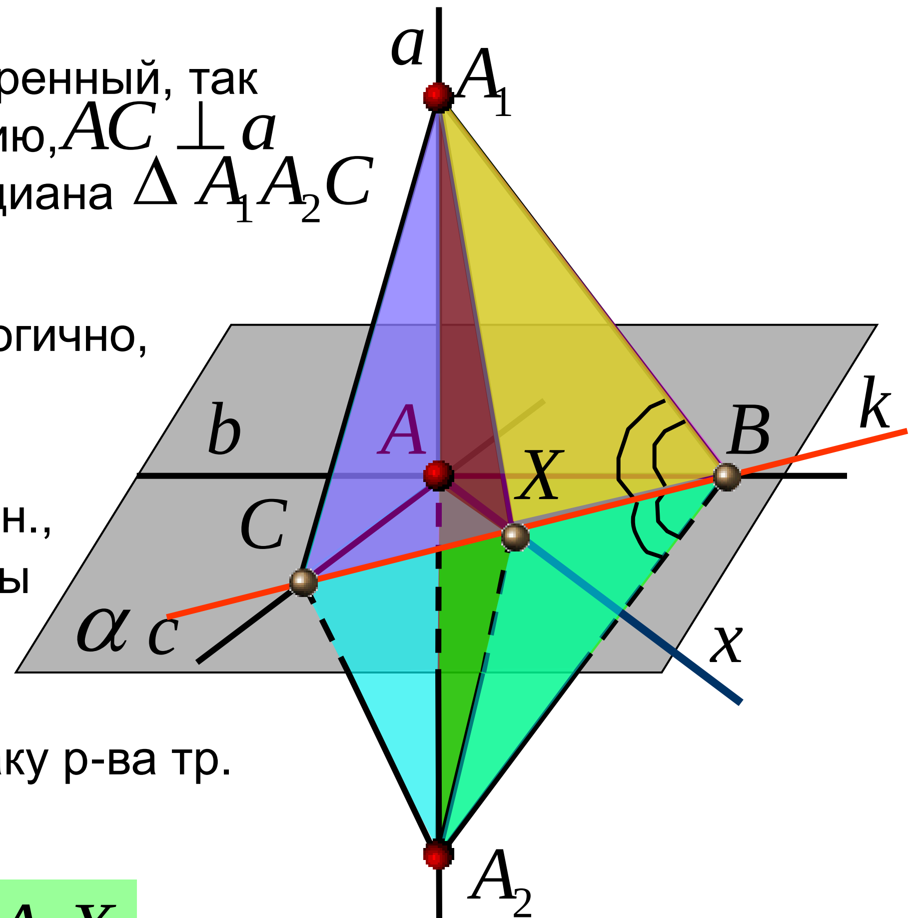
$$\angle A_1BC = \angle A_2BC$$

4) $\Delta A_1BX = \Delta A_2BX$ по 1 признаку р-ва тр. ($BX$ -общая, $A_1B = A_2B$)

$$\angle A_1BC = \angle A_2BC \Rightarrow A_1X = A_2X$$

5) Рассмотрим $\Delta A_1A_2X$ -он равнобедренный ( $A_1X = A_2X$, $A_1A = A_2A$)

$\Rightarrow$ ХА- медиана, высота, а значит, прямая $a \perp x$, и $\Rightarrow a \perp \alpha$ ч.и т.д.



**Теорема 17.3:**

**Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.**

Дано:

плоскость $\alpha$,

$$a \parallel b$$

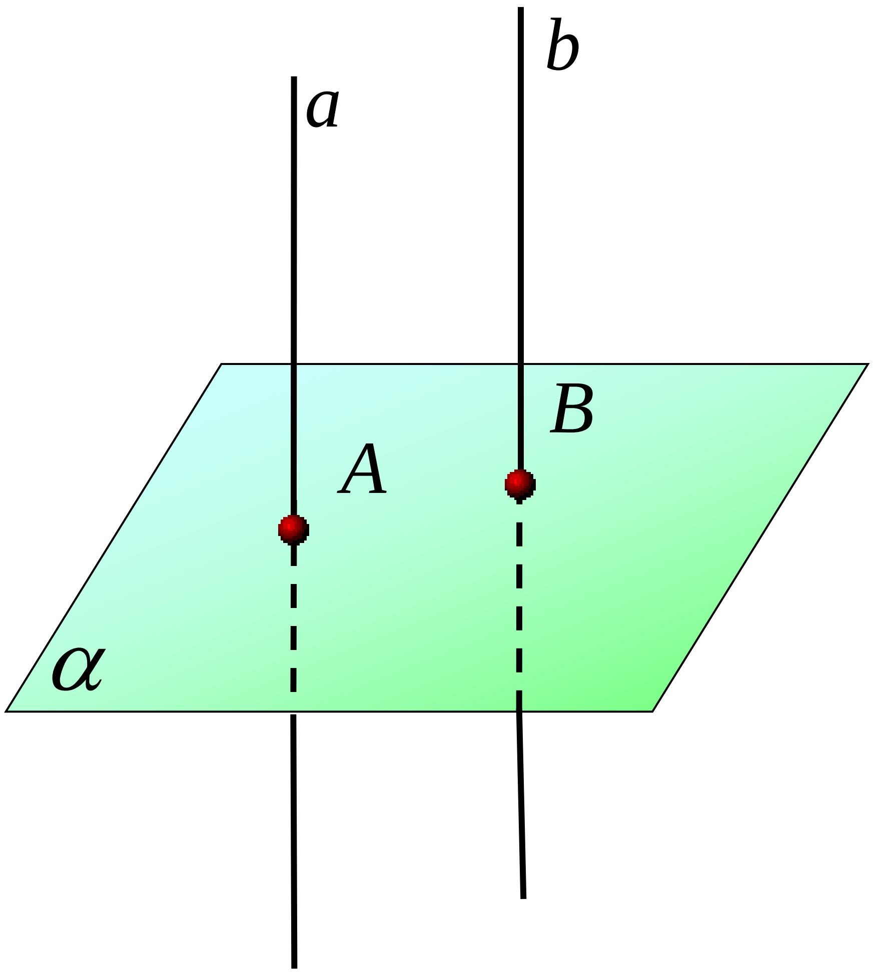
$$a \perp \alpha$$

$$a \cap \alpha = m.A$$

$$b \cap \alpha = m.B$$

Доказать:

$$b \perp \alpha$$

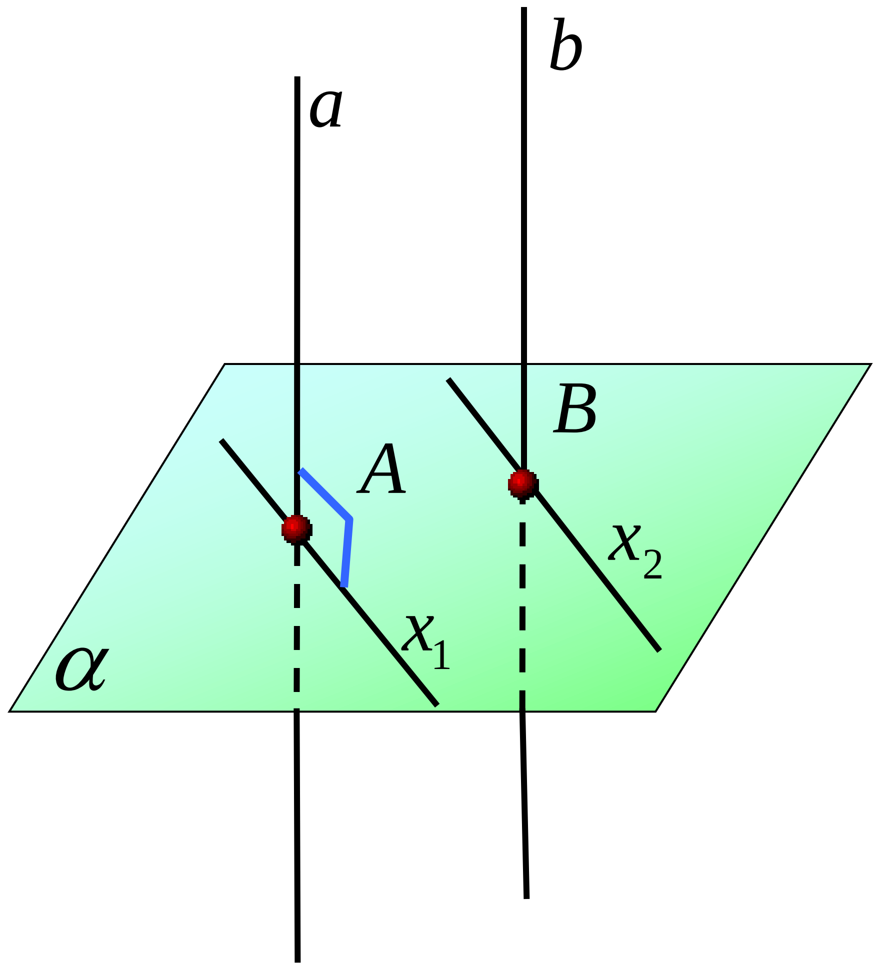


# Дополнительное построение:

1) Проведём в плоскости $\alpha$ через точку В произвольную прямую $x_2$.

2) Проведём в плоскости $\alpha$ прямую $x_1 \parallel x_2; т.A \in x_1$.

3) Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x_1$ по определению перпендикулярности прямой и плоскости.



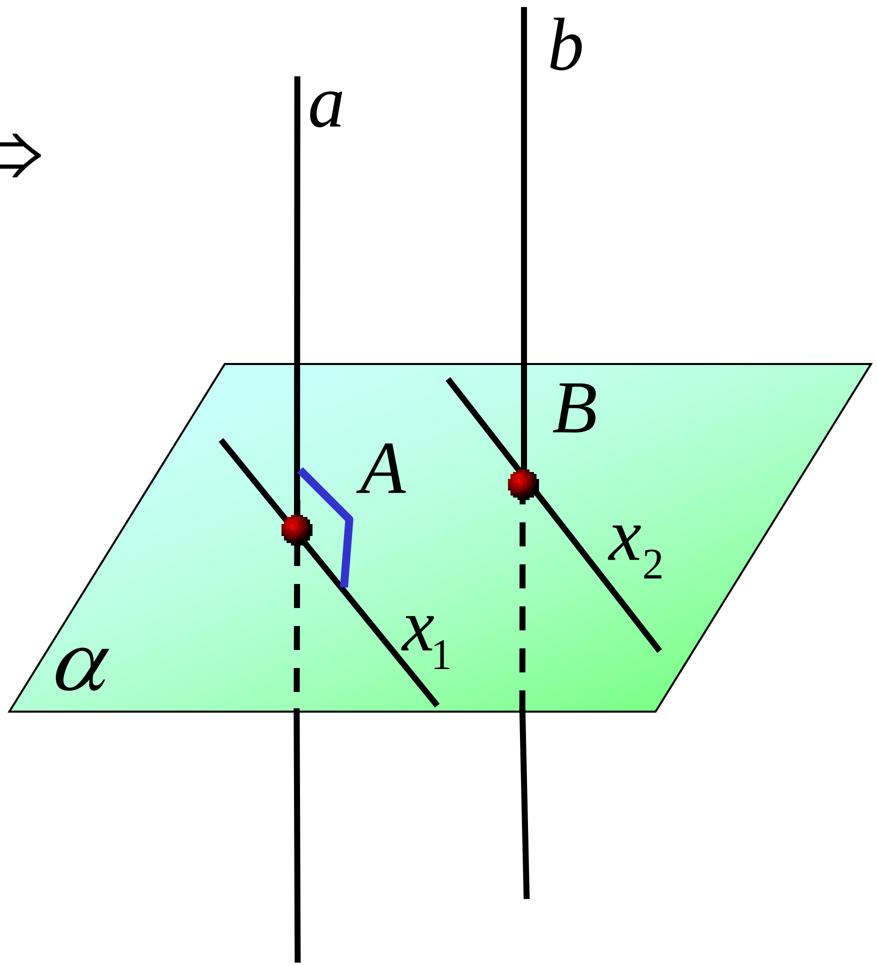
# Доказательство:

1) $a \perp x_1$ и $a \parallel b$ – по условию
$x_1 \parallel x_2$ -по построению
$\Rightarrow$

$\Rightarrow b \perp x_2$ по теореме 17.1.

Но так как выбор прямой $x_2$ был произволен, то $b \perp \alpha$

Теорема доказана.



**Теорема 17.4:**

**Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.**

Дано:

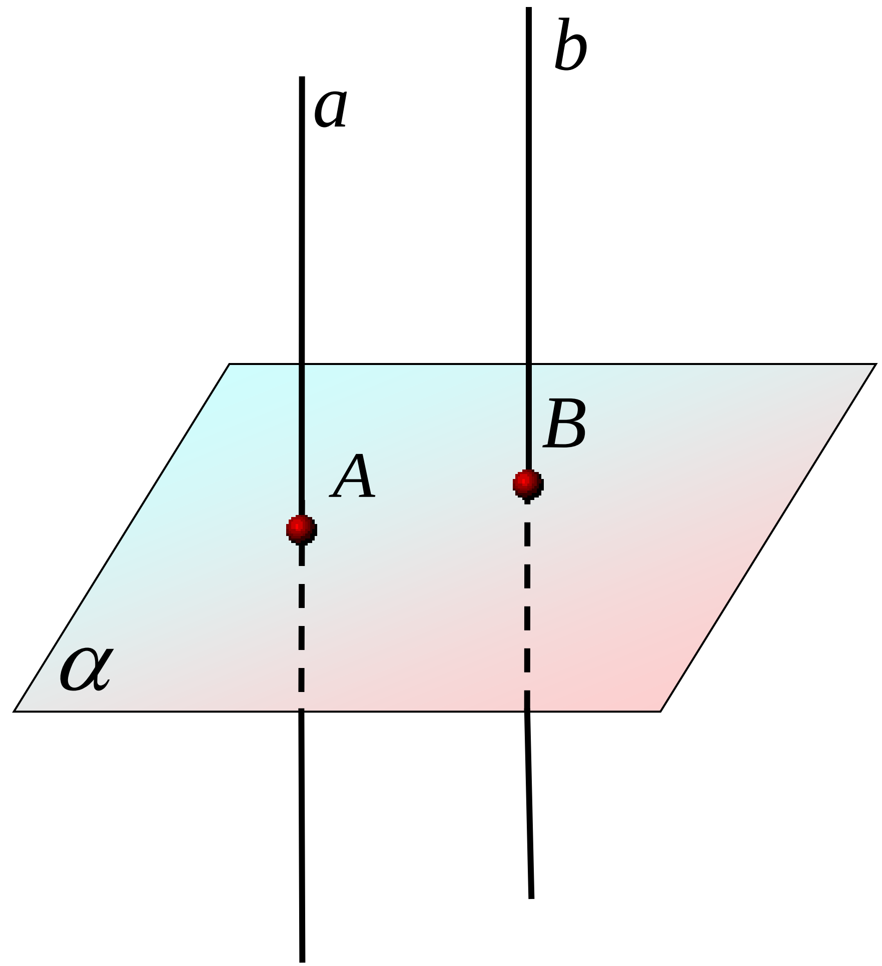
плоскость $\alpha$,

$a \perp \alpha$

$b \perp \alpha$

Доказать:

$a \parallel b$



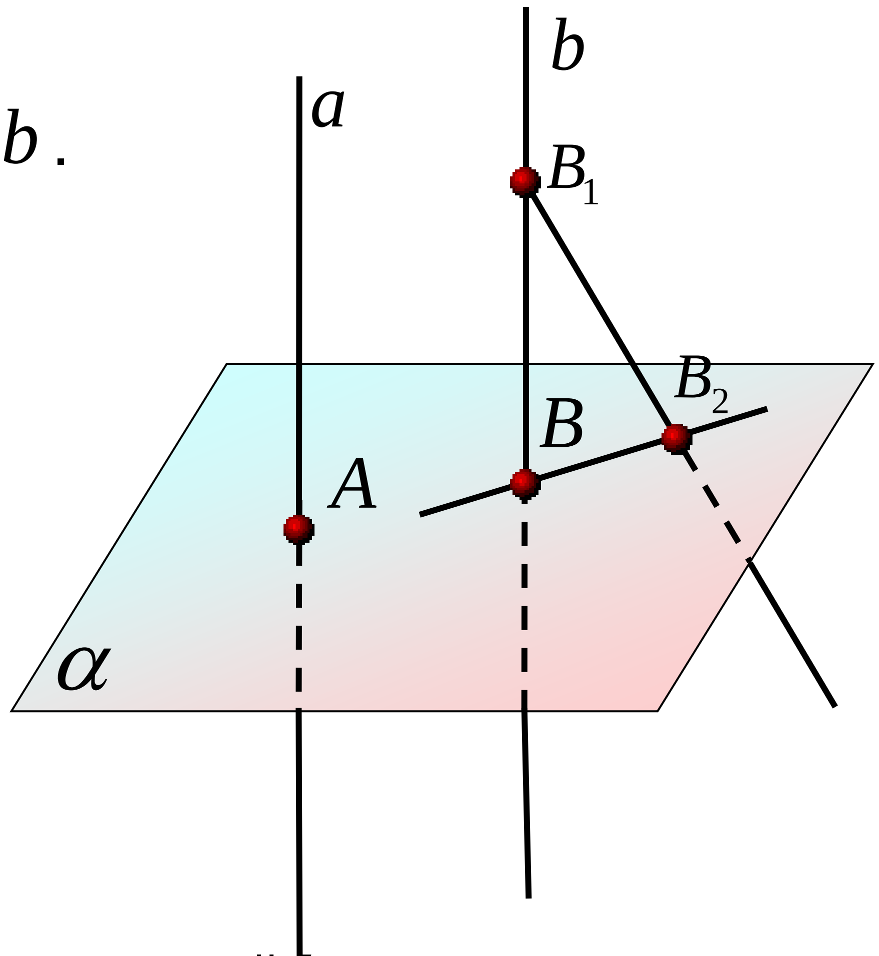
# Доказательство:

Предположим противное - прямая $a$ не параллельна $b$.

Возьмём на прямой $b$ какую-нибудь т. $B_1$ и проведём через неё прямую $B_1B_2 \parallel a$.

$B_1B_2 \perp \alpha$ - по теореме 17.3

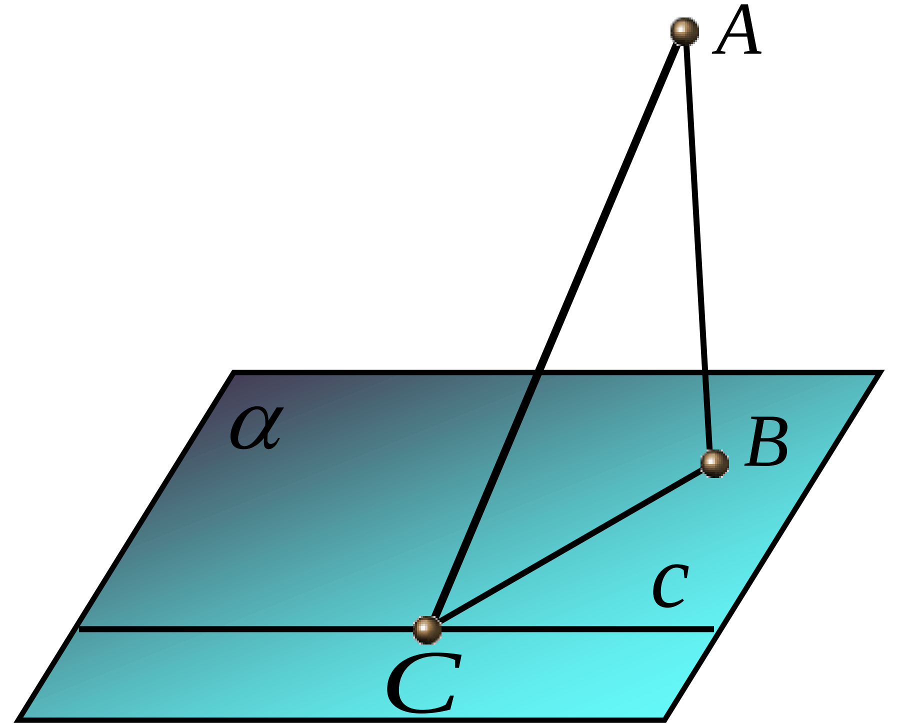
$\Rightarrow$ через т. $B$ проходят 2 пересекающиеся прямые, перпендикулярные $BB_2$.




Пришли к противоречию, а значит, $a \parallel b$.
Теорема доказана.

**Теорема 17.5:**

**Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна наклонной.**




Дано:

плоскость $\alpha$,

$т.A \notin \alpha;$

$AB - \text{перпендикуляр к } \alpha,$

$AC - \text{наклонная},$

$BC - \text{проекция } AC \text{ на } \alpha,$

$\text{прямая } c \in \alpha; т.C \in c,$

$BC \perp c.$

Доказать:

$c \perp AC$

# Доказательство:

1) Проведём $A'C \parallel AB.$

2) По теореме 17.3:

$A'C \perp \alpha \Rightarrow c \perp A'C.$

3) Проведём плоскость $\beta$ через прямые $AB$ и $A'C.$

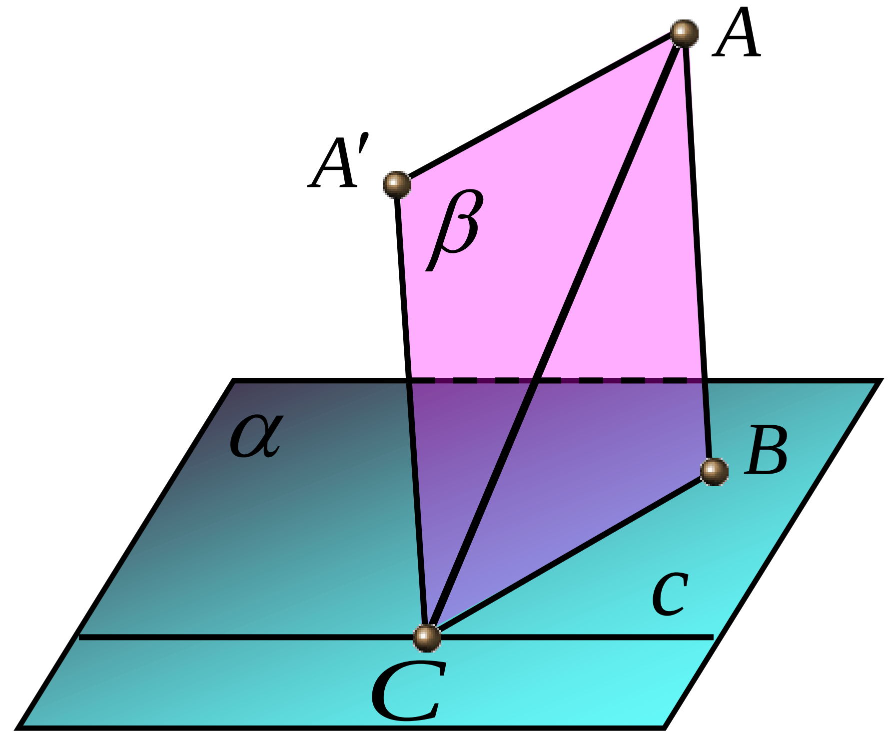
4) $c \perp A'C$ - по построению,

$c \perp BC$ - по условию,

$\Rightarrow c \perp \beta$ , а значит,

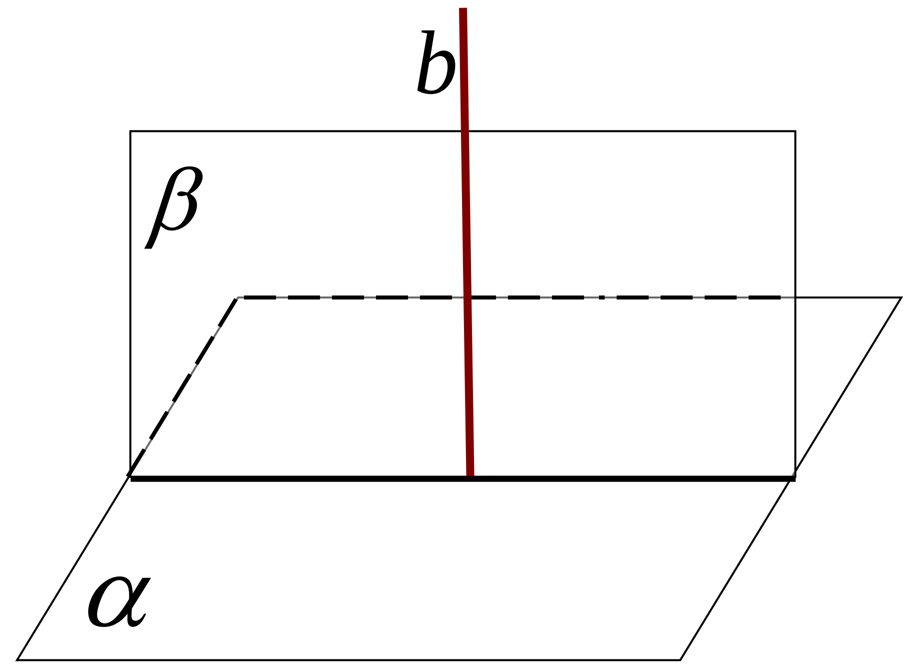
$c \perp AC.$

Теорема доказана.



## Теорема 17.6:

**Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны**




Дано:

плоскость $\alpha$,

прямая $b \perp \alpha$;

*плоскость* $\beta$,

$b \in \beta$.

Доказать:

$\alpha \perp \beta$

# Доказательство:

1) $\alpha \cap \beta = c$

$b \cap c = m.O$

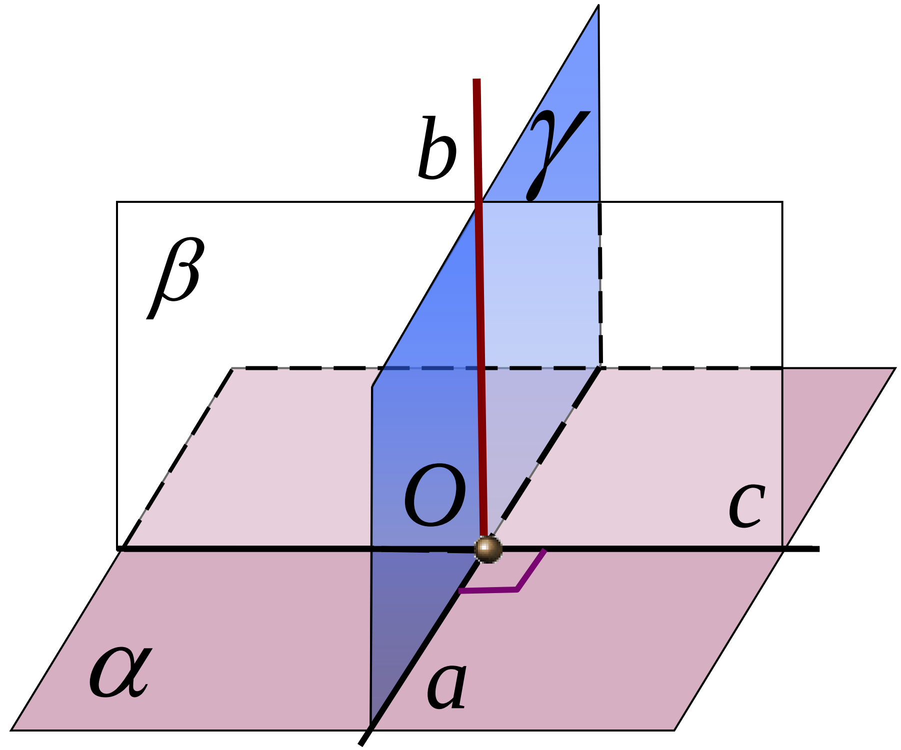
2) Проведём на пл. $\alpha$ через т. О прямую $a \perp c$

3) Проведём плоскость $\gamma$ через прямые $a$ и $b$.

4) $c \perp a$ - по построению

$c \perp b$ - по условию,

$\Rightarrow c \perp \gamma$




5) $a \perp b$ (т.к. $b \perp \alpha$), а значит, пл. $\gamma$ пересекает пл-ти $\alpha$ и $\beta$ по перпендикулярным прямым, $\Rightarrow \alpha \perp \beta$ по определению перпендикулярности плоскостей. Теорема доказана.