Элементы комбинаторики

Практическое занятие 1

Цели и задачи занятия

Цель

систематизировать знания о комбинаторике, полученные в школе

Задачи

–Сформировать представление о месте комбинаторики в математике и практической деятельности;

–подготовиться к решению задач по теории вероятностей

По окончании занятия необходимо

иметь чёткое представление о месте комбинаторики в теории вероятностей и математической статистике, о решении прикладных задач комбинаторными методами;

знать основные понятия, теоремы и формулы, относящиеся к данному разделу

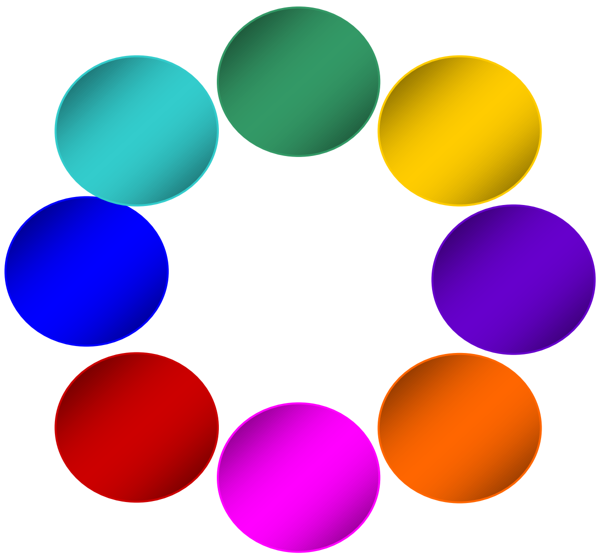
уметь применять их к решению практических задач, в том числе, реализуемых с помощью компьютера

В конспекте отразите следующие вопросы, проиллюстрировав их примерами из домашнего задания (с решениями)

1. Предмет комбинаторики
2. Правило произведения
3. Правило суммы
4. Перестановки (без повторения и с повторениями)
5. Размещения (без повторения и с повторениями)
6. Сочетания (без повторения и с повторениями)

Предмет комбинаторики

Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия.



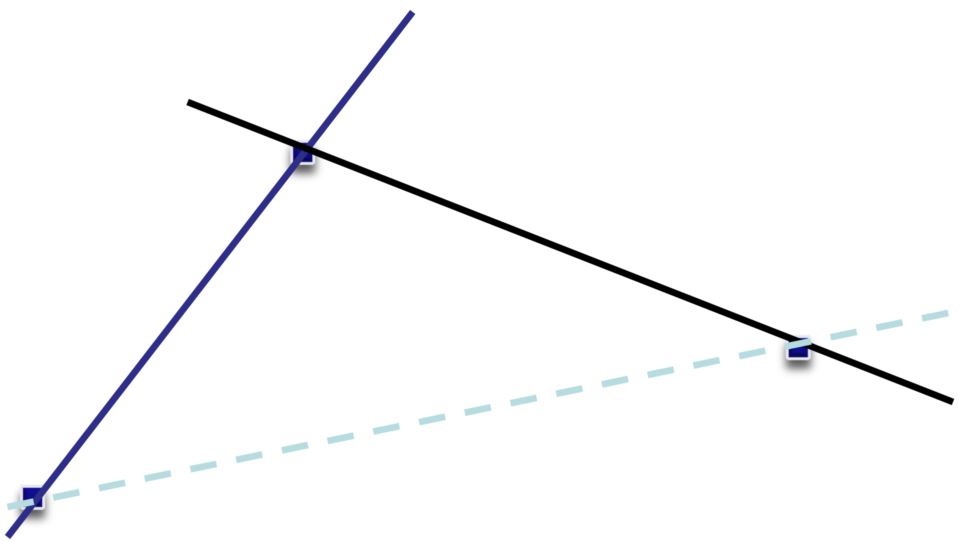
Предмет комбинаторики

Разные пути или варианты, которые приходится выбирать человеку, складываются в самые разнообразные комбинации. И целый раздел математики, называемый комбинаторикой, занят поиском ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или другом случае.

А Б В ?

Пример

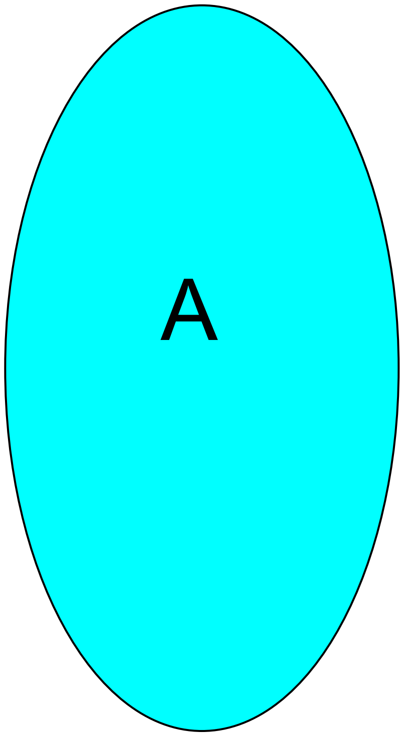
Сколько прямых проходит через различные пары из трех точек, не лежащих на одной прямой?



Правило суммы

Пусть некоторый предмет A может быть выбран m способами, а другой предмет B может быть выбран n способами. Тогда имеется $m + n$ возможностей выбрать либо предмет A, либо предмет B.

Правило суммы

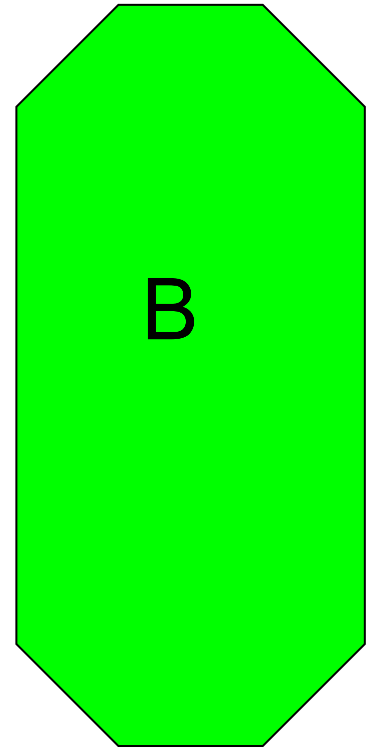


$$A \quad \textit{или} \quad B$$

$$A \vee B$$

$$A \cup B$$

$$A + B$$

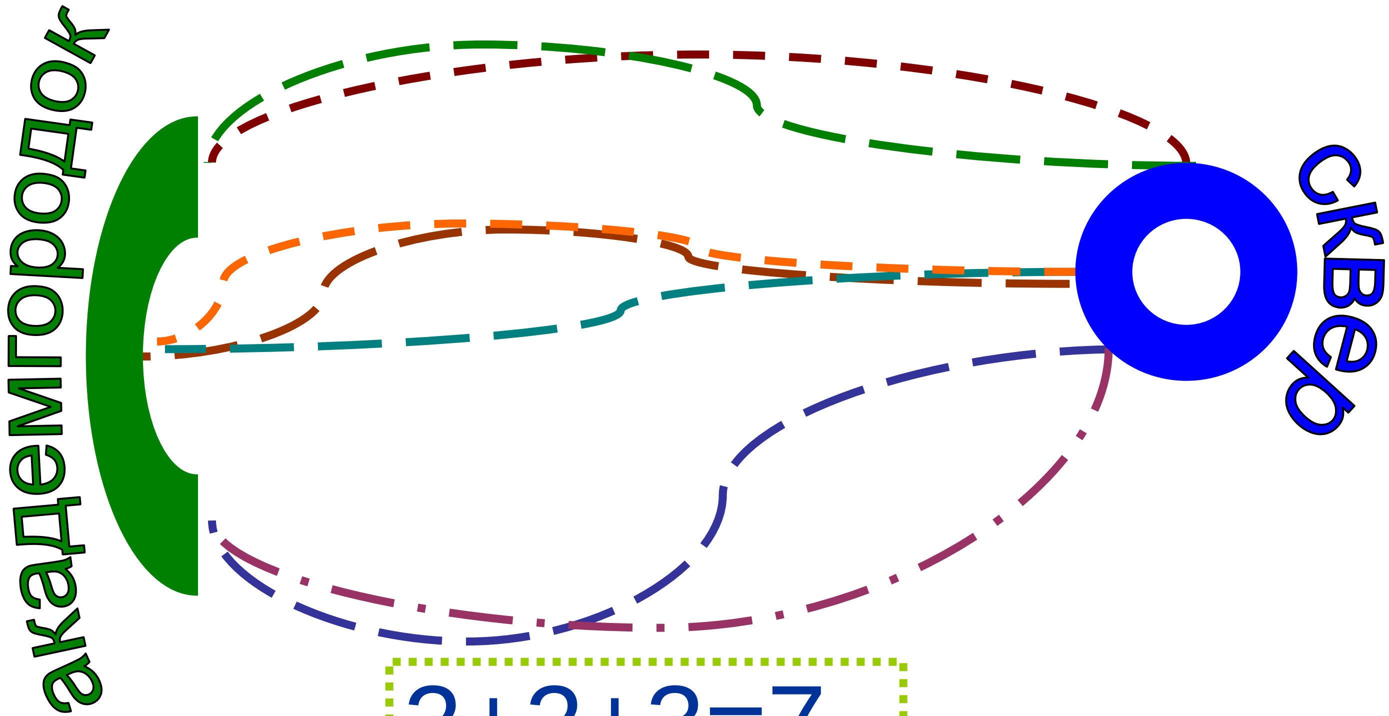


Задача 1

От сквера Кирова до академгородка можно проехать через Ангарский мост, плотину и новый мост. В первом случае количество дорог равно 2, во втором — 2, в третьем — 3.

Сколькими способами можно добраться от сквера Кирова до академгородка ?

Решение

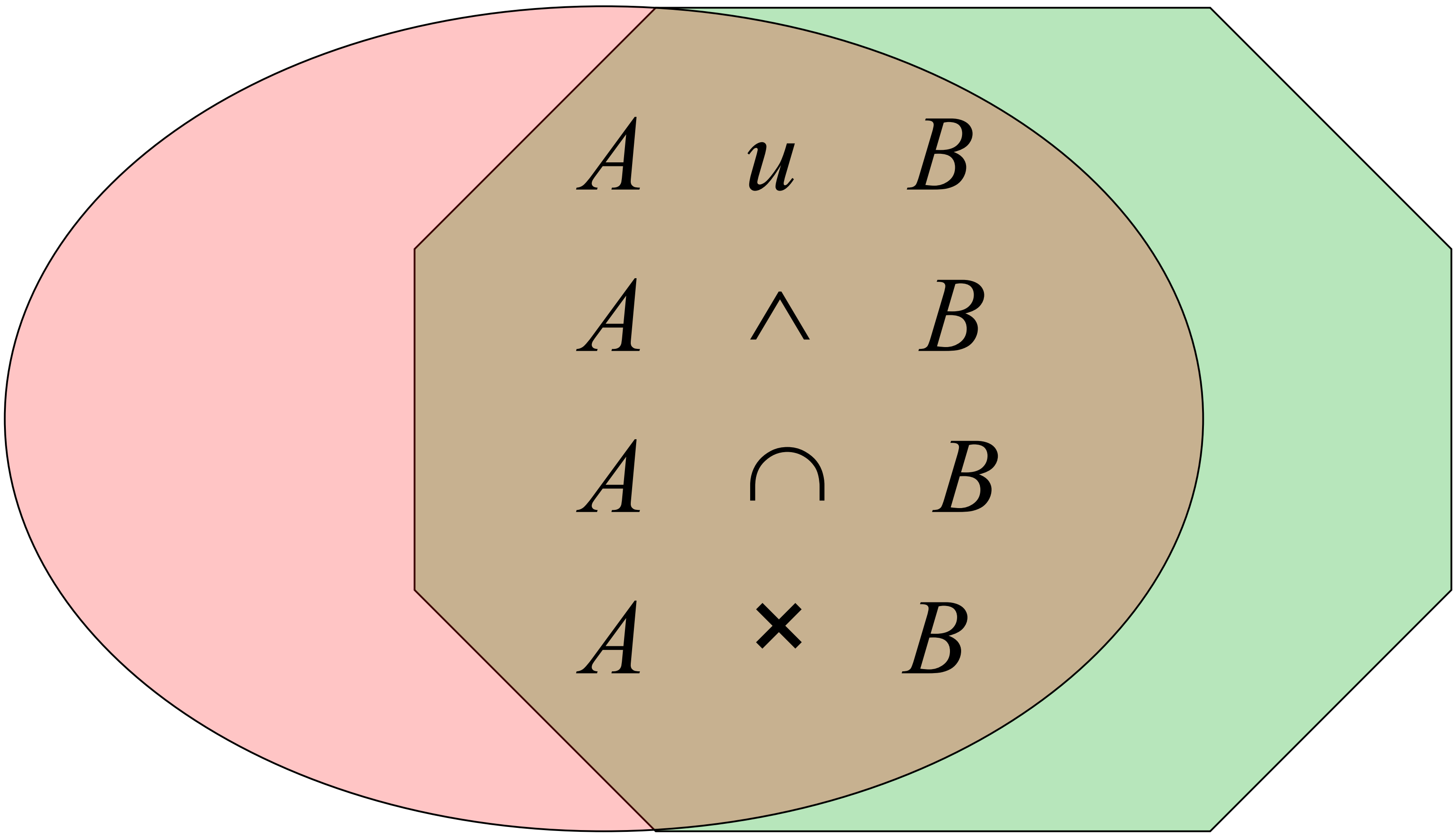


2+2+3=7

Правило произведения

Пусть некоторый предмет A может быть выбран m способами, а другой предмет B может быть выбран n способами. Тогда имеется mn возможностей выбрать предмет A и предмет B.

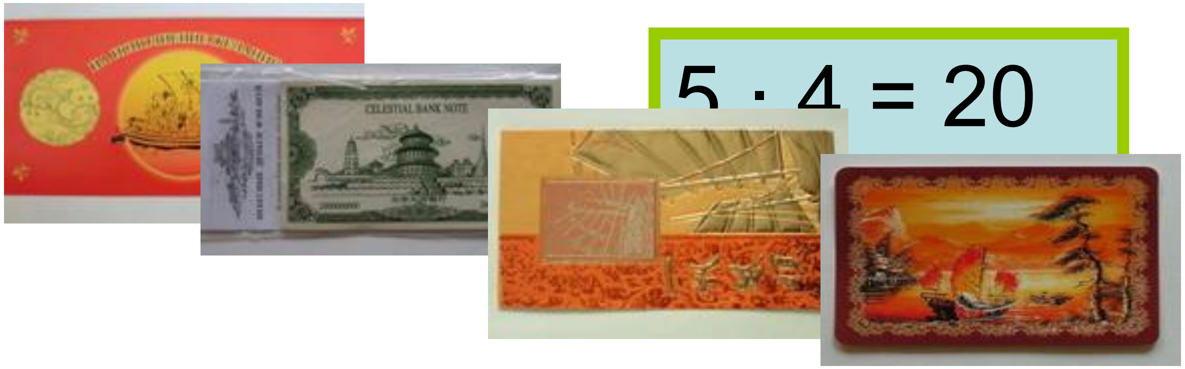
Правило произведения



Задача 2

В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида открыток. Сколькими способами можно купить конверт и открытку?

Решение



$5 \cdot 4 = 20$

Задача 3

Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова КОНВЕРТ?

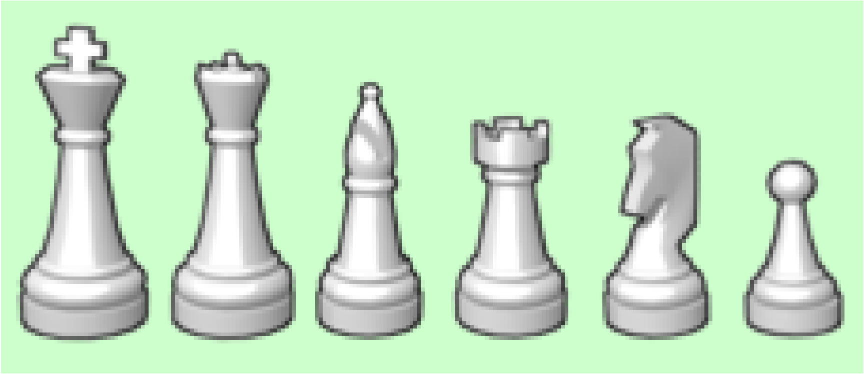
Решение

КОНВЕРТ

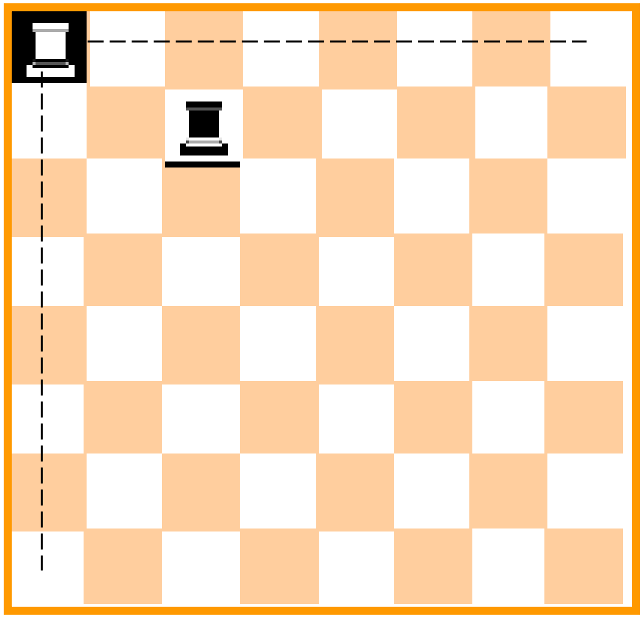
- Гласную можно выбрать двумя способами.
- Согласную — пятью способами.
- **Ответ.** 2 · 5 = 10.

Задача 4

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?



Решение

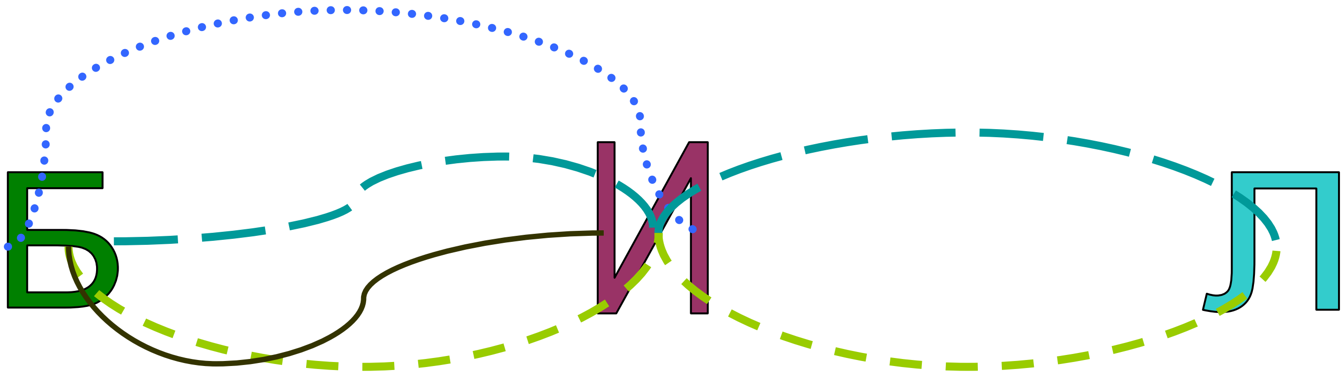


$$64 \cdot 49 = 3136$$

Задача 5

От Братска до Иркутска можно добраться поездом, самолётом, автобусом, теплоходом. Из Иркутска до Листвянки можно доехать на автобусе, либо на теплоходе. Сколькими способами можно проехать от Братска до Листвянки?

Решение



$$4 \cdot 2 = 8$$

Задача 6

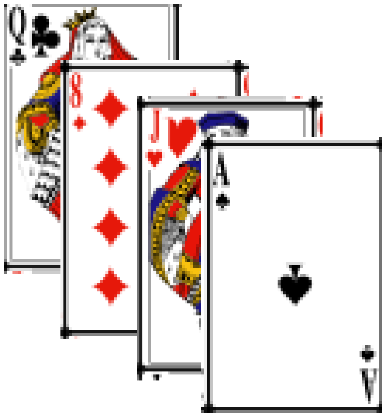
У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

Решение

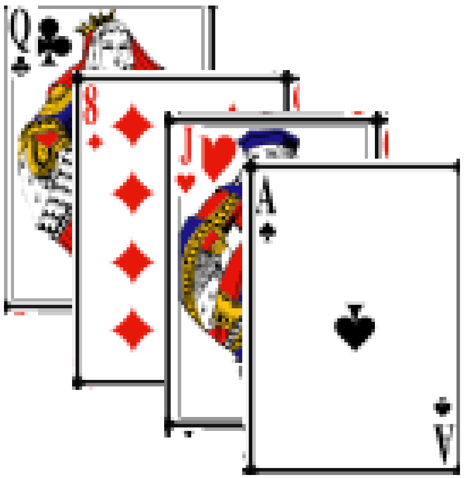
$$20 \cdot 20 + 10 \cdot 10 = 500$$

Задача 9

Сколькими способами из колоды (36 карт) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?



Решение



$$9\times8\times7\times6=3024$$

- В каждой масти по 9 карт.
- Из каждой масти выбираем по 1 карте, учитывая достоинство уже выбранной ранее карты.

Факториал

$n!$

- произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно (читается n–факториал).

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

- Замечание: $0! = 1! = 1$.

Перестановки

Число различных способов, которыми может быть упорядочено данное множество, состоящее из **n** элементов, называется **числом перестановок** множества и обозначается P_n.

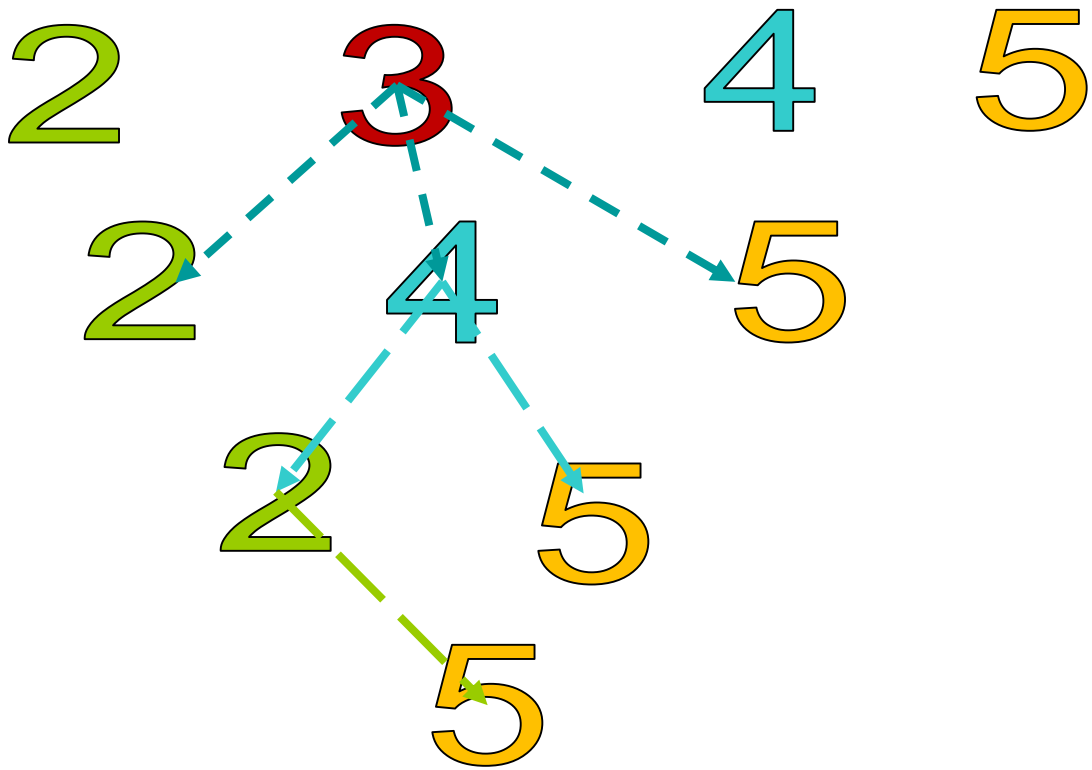
Перестановки без повторений

$$\boxed{P_n = n!}$$

Задача 10

Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых цифры 2, 3, 4, 5 встречаются ровно по одному разу?

Решение



4
×
3
×
2
×
1

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

Задача 11

Сколько трёхзначных чисел можно получить из цифр 1,2,3, если цифры в числе не повторяются?

Решение

Сотни	1		2		3	
Десятки	2	3	1	3	1	2
Единицы	3	2	3	1	2	1

$$P = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$

Перестановки с повторениями

Пусть имеются предметы *k* различных типов.

Сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа,..., n_k элементов *k*-го типа?

Перестановки с повторениями

$$P_{n_1;\dots n_k} = \frac{n!}{n_1!\dots n_k!},$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

Задача 12

Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас», так, чтобы получались разные «слова»? Смысл «слов» значения не имеет.

Решение

«Ананас» - 6:

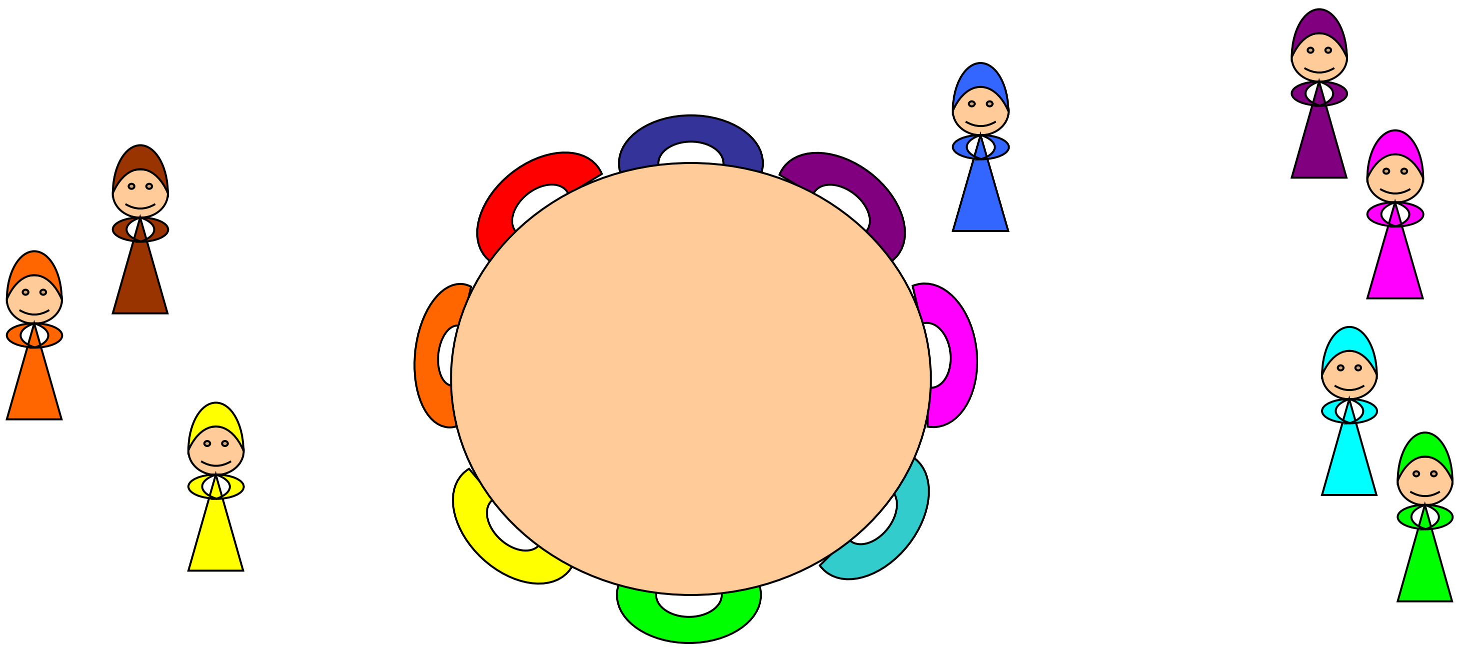
а – 3; н – 2; с – 1.

А А А   Н Н   С

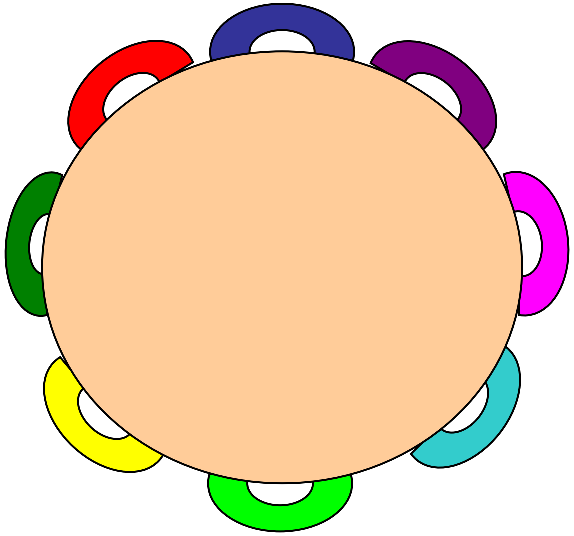
$$P_{3;2;1} = \frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 60$$

Задача 13

К Маше пришли 7 подружек. Сколькими способами можно рассадить 8 человек за столом?



Решение



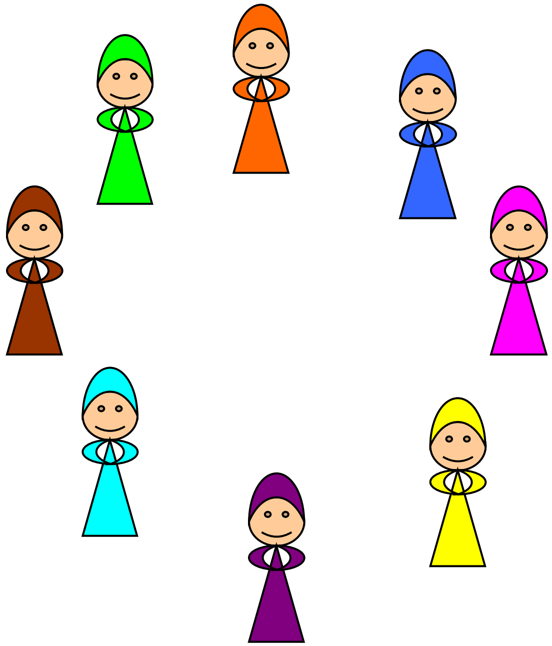
$$P_8 = 8! =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

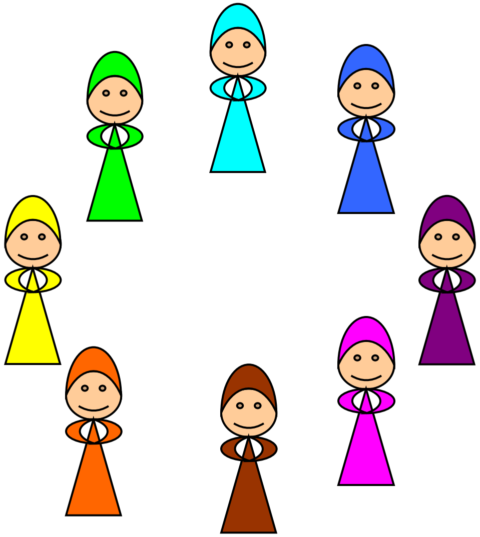
$$= 40320$$

Задача 14

8 девушек водят хоровод. Сколькими способами они могут встать в круг?



Решение



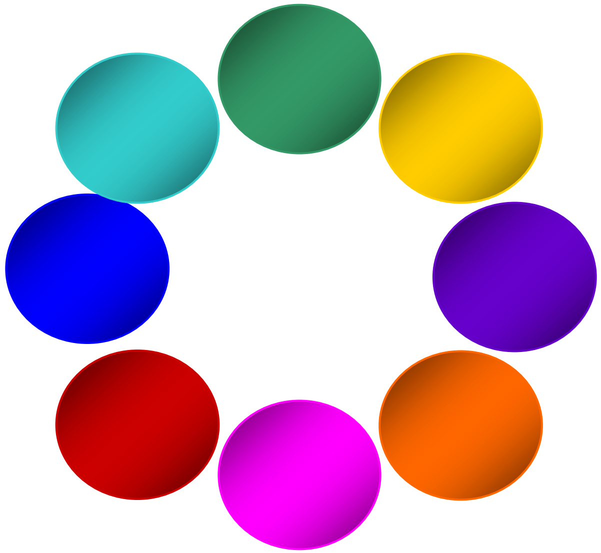
Девушки могут перемещаться по кругу.

Число перестановок уменьшается в 8 раз.

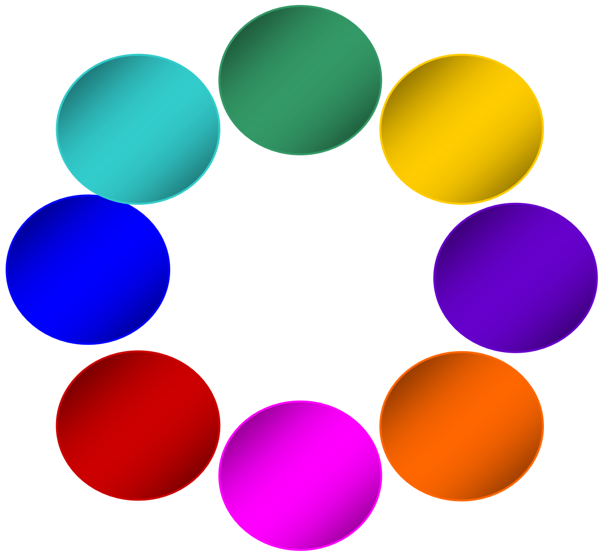
Ответ: **7!**

Задача 15

Сколько ожерелий можно составить из 8 различных бусин?



Решение



- Ожерелье можно вращать.
- Его можно и перевернуть.
- Число перестановок уменьшается ещё вдвое.

Ответ: 7!/2

Размещения

Число упорядоченных *k* элементных подмножеств множества из *n* элементов называется **числом размещений** из *n* элементов по *k* и обозначается A_n^k

Размещения

Размещения без повторений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} =$$

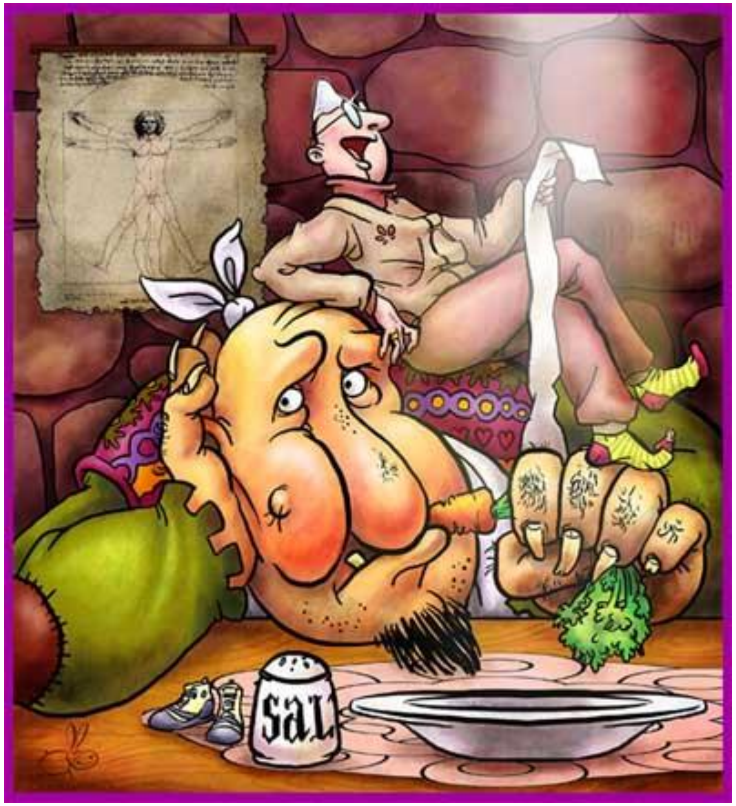
$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

Размещения с повторениями

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Задача

У людоеда в подвале томятся 25 пленников. Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин?



Решение

$$A_{25}^{3}=\frac{25!}{22!}=25\times 24\times 23=13800$$

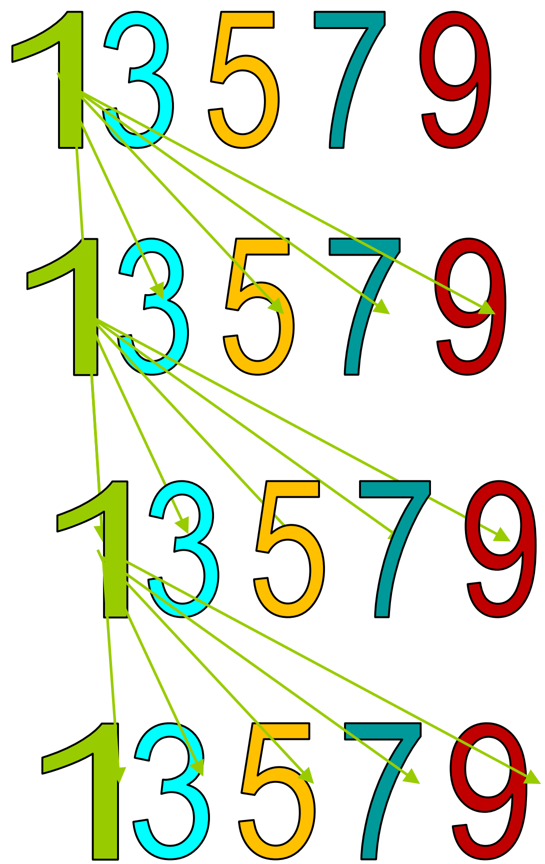
Задача

Сколько существует 4-значных чисел, в записи которых встречаются только нечетные цифры?

Решение

- Однозначных нечётных чисел ровно 5.
- К каждому однозначному нечётному числу вторая нечетная цифра может быть дописана 5 различными способами.
- Далее – по аналогии:

$$5\times5\times5\times5=625$$



Задача

Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Указание. Сосчитайте отдельно количества одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.

Решение

$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$

А Б В

Сочетания

Если из *n* элементов составлять группы по *m* элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то получившиеся при этом комбинации называются ***сочетаниями*** без повторений (с повторениями) из *n* элементов по *m*.

Сочетания

Сочетания без повторений	Сочетания с повторениями
$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$

Задача.

В городе проводится первенство по футболу. Сколько в нем состоится матчей, если участвуют 12 команд?

Решение.

$$C_{12}^{2}=\frac{12!}{2!(12-2)!}=\frac{11\cdot 12}{2}=66$$

Задача.

В группе 10 стрелков, из них 6 снайперов. Для выполнения боевой задачи нужно отобрать 5 стрелков, причем снайперов должно быть не меньше 4. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

Не меньше 4 – это значит, что снайперов должно быть либо 4, либо 5.4 снайпера из 6 можно выбрать C_6^4 способами, остальных стрелков выбираем из оставшихся 4 стрелков (10-6) C_4^1 способами. Проводим аналогичные рассуждения, когда в группе снайперов 5.

$$C_6^4 \cdot C_4^1 + C_6^5 \cdot C_4^0 = 15 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 66$$

Задача.

В классе 24 ученика, из них 8 отличников. Нужно выбрать 12 человек так, чтобы среди них было хотя бы 5 отличников. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: 901628

Свойства сочетаний

$$C_n^n = C_n^0 = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$$

Решение

$$C_x^2 = \frac{x!}{2(x-2)!} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ \dfrac{x^2 - x}{2} = 153 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 18, \\ y = 8. \end{cases}$$

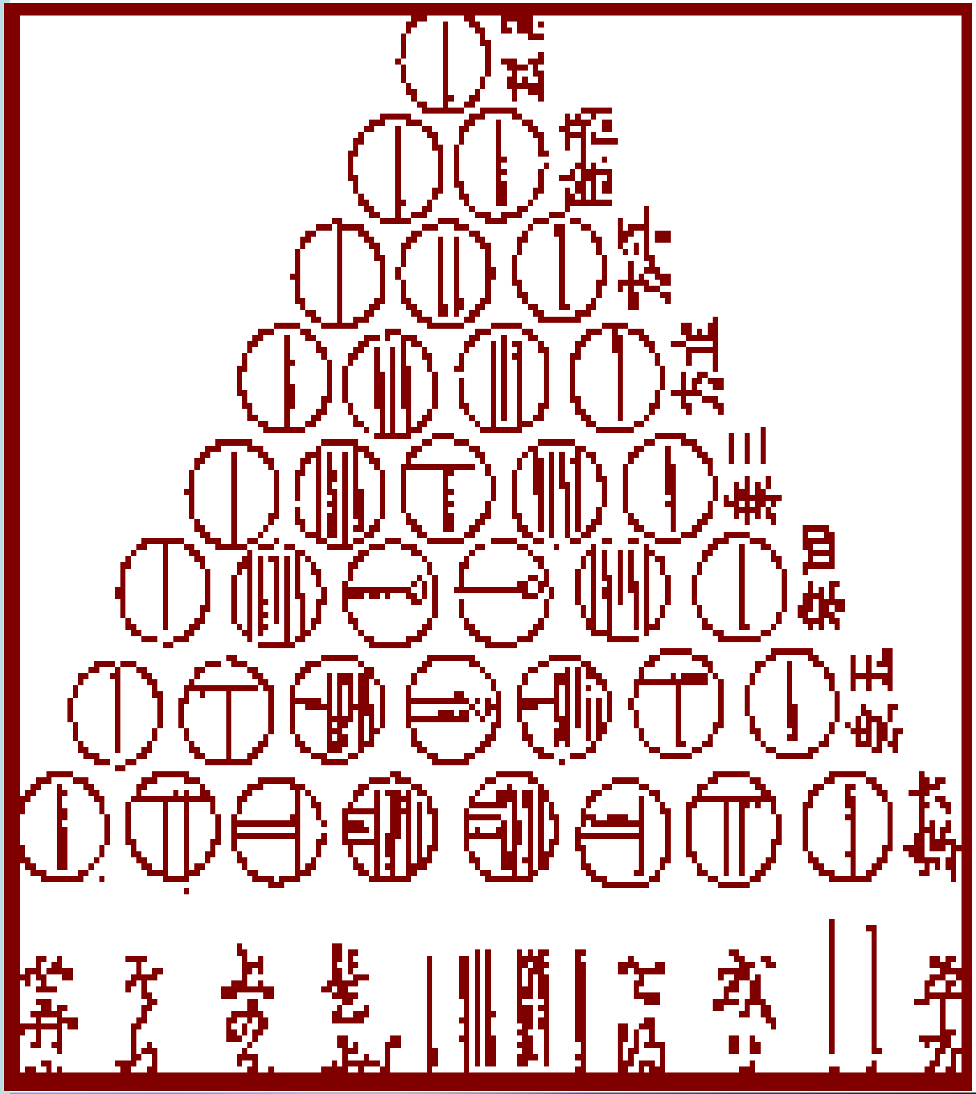
Треугольник Паскаля

- Треугольник Паскаля является одной из наиболее известных и изящных числовых схем во всей математике.
- Блез Паскаль, французский математик и философ, посвятил ей специальный "Трактат об арифметическом треугольнике".

Треугольник Паскаля

- Эта треугольная таблица была известна задолго до 1665 года - даты выхода в свет трактата.
- В 1529 году треугольник Паскаля был воспроизведен на титульном листе учебника арифметики, написанного астрономом Петром Апианом.

- Изображен треугольник на иллюстрации книги "Яшмовое зеркало четырех элементов" китайского математика Чжу Шицзе, выпущенной в 1303 году.
- Омар Хайям, бывший философом, поэтом, математиком, знал о существовании треугольника в 1110 году, в свою очередь заимствовав его из более ранних китайских или индийских источников.



Построение треугольника Паскаля

- Треугольник Паскаля - это бесконечная числовая таблица "треугольной формы", в которой на вершине и по боковым сторонам стоят единицы, каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа в предшествующей строке.
- Таблица обладает симметрией относительно оси, проходящей через его вершину.

Построение

		Строки
Числа	1	0
натуральные	1 1	1
треугольные	1 2 1	2
	1 3 3 1	3
	1 4 6 4 1	4
	1 5 10 10 5 1	5
	1 6 15 20 15 6 1	6

Свойства строк

Сумма чисел n-й строки Паскаля равна 2^n (потому что при переходе от каждой строки к следующей сумма членов удваивается, а для нулевой строки она равна $2^0 = 1$)

Свойства строк

Все строки треугольника Паскаля симметричны (потому что при переходе от каждой строки к следующей свойство симметричности сохраняется, а нулевая строка симметрична).

Свойства строк

Каждый член строки треугольника Паскаля с номером n тогда и только тогда делится на т, когда т- простое число, а n - степень этого простого числа

Нахождение элемента треугольника

Каждое число в треугольнике Паскаля можно определить тремя способами:

- C_n^k, где n - номер строки, k- номер элемента в строке;
- оно равно сумме чисел предыдущей диагонали, начиная со стороны треугольника и кончая числом, стоящим над данным.

- Каждое число треугольника Паскаля, уменьшенное на единицу, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит данное число, причем сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются.