Mavzu: $y=\left|F(x)\right|$, $y=F\left(\left|x\right|\right)$, $y=\left|F\left(\left|x\right|\right)\right|$ funksiyalar

4. Функции вида $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$ и их графики. Пусть функция задана графически (см. рис. 38). Используя этот график, построим приближенно графики функций вида $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ и $y = |f(|x|)|$.

Функцию $y = |f(x)|$ можно задать аналитически в виде

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad \operatorname{sign}(f(x)) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если} \quad \operatorname{sign}(f(x)) < 0. \end{cases}$$

Поэтому график такой функции приближенно изображается следующим образом (рис. 39).

Функцию $y = f(|x|)$ можно задать аналитически в виде

$$y = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in [0; +\infty), \\ f(-x), & \text{если} \quad x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

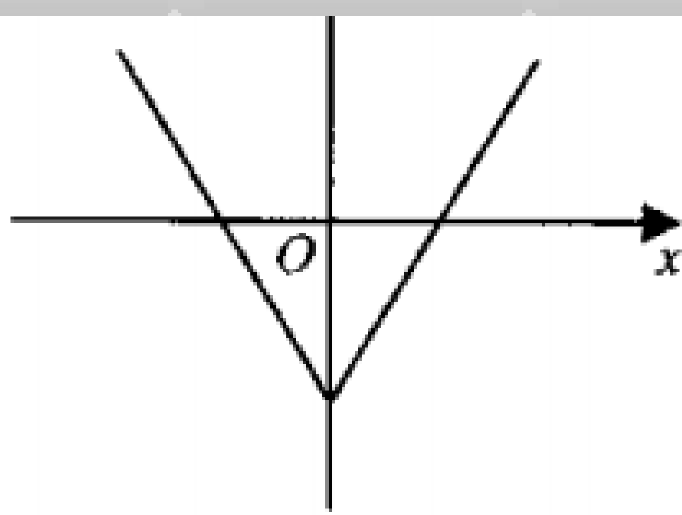

Рис. 40

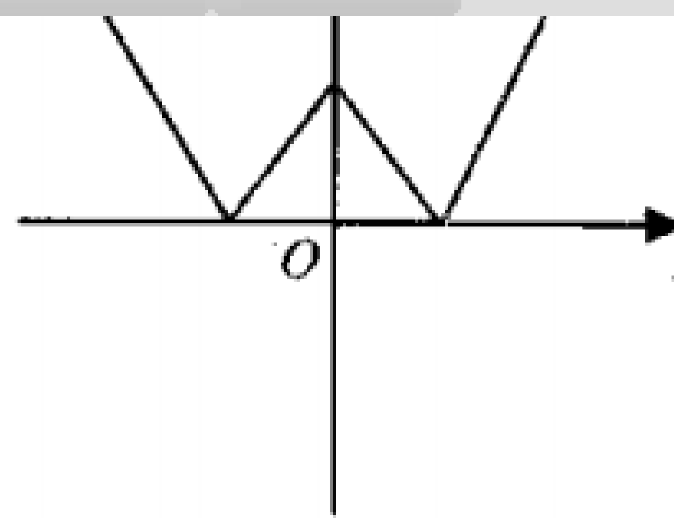

Рис. 41

График такой функции приближенно изображен на рисунке 40.

Функция $y = |f(|x|)|$ задается аналитически в виде

$$y = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [0; +\infty), \ \operatorname{sign}(f(x)) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если } x \in [0; +\infty), \ \operatorname{sign}(f(x)) < 0 \\ f(-x), & \text{если } x \in (-\infty; 0), \ \operatorname{sign}(f(x)) \geq 0 \\ -f(-x), & \text{если } x \in (-\infty; 0), \ \operatorname{sign}(f(x)) < 0. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 41.

3. Функция $y = \text{sign}(x)$. Кусочно-заданную функцию, которая принимает значение 1, когда аргумент $x > 0$, значение 0, когда $x = 0$ и значение -1, когда $x < 0$, можно записать в виде

$$y = \begin{cases} 1, & x \in (0; +\infty), \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

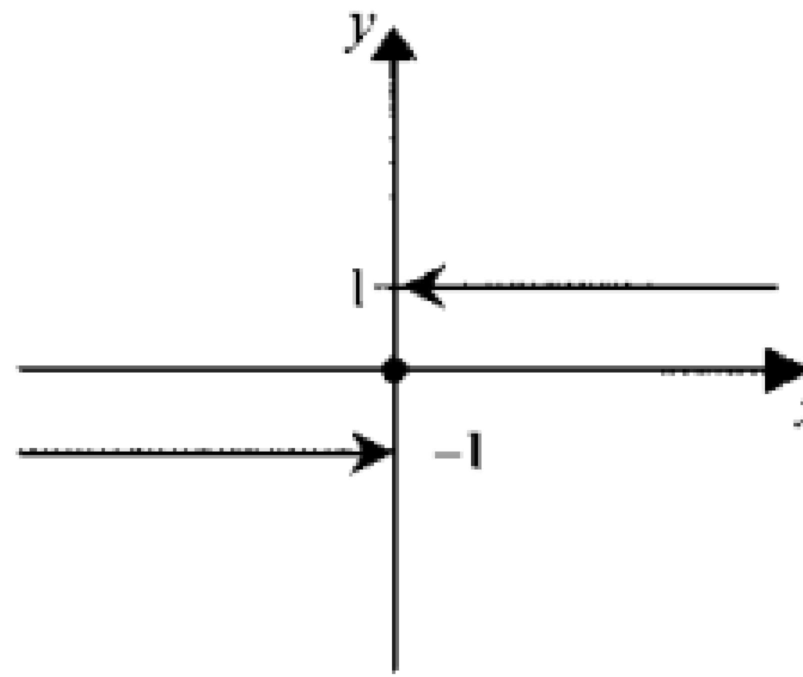

Рис. 36

Эту функцию обозначают символом $y = \text{sign}(x)$. На рисунке 36 изображен график функции $y = \text{sign}(x)$.

Пример 3. Построить график функции

$$y = \operatorname{sign}(x^2 - 5x + 6).$$

Решение. Аргументом данной функции является выражение $x^2 - 5x + 6$. Найдем корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$. Это числа $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Тогда, воспользовавшись методом интервалов для решения неравенств, имеем:

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ при } x \in (-\infty;\ 2) \cup (3;\ +\infty);$$

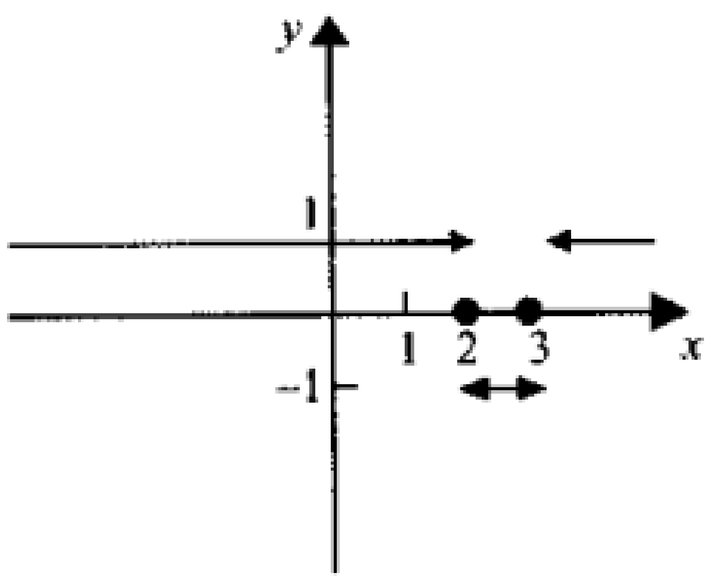

Рис. 37

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \text{ при } x \in (2;\ 3);$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ при } x \in \{2;\ 3\}.$$

Значит, функцию можно записать в виде

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty), \\ -1, & \text{если } x \in (2; 3), \\ 0, & \text{если } x \in \{2; 3\}. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 37.