Геометрия 9 класс

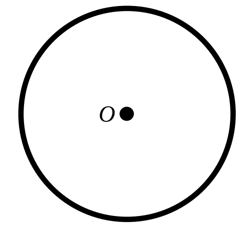
Окружность и ее элементы

Содержание

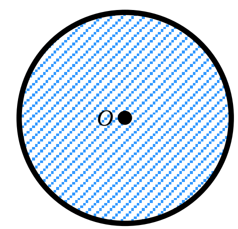
- Основные понятия
- Свойства вписанных углов
- Углы, связанные с окружностью
- Отрезки, связанные с окружностью
- Теорема Птолемея
- Окружность, вписанная в многоугольник
- Окружность, описанная около многоугольника
- Вневписанная окружность

Основные понятия

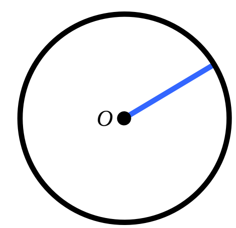
Окружность — множество всех точек плоскости, удаленных на заданное расстояние от заданной точки (центра).



Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью.



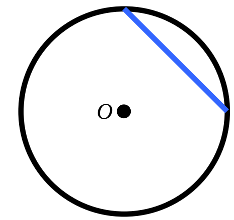
Радиус — отрезок, соединяющий точку окружности с центром.



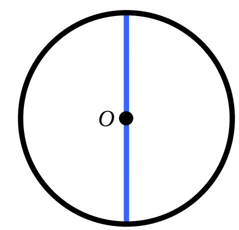
Содержание

Основные понятия

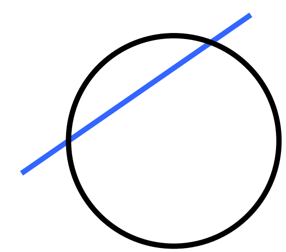
Хорда — отрезок, соединяющий любые две точки окружности.



Диаметр — хорда, проходящая через центр окружности.



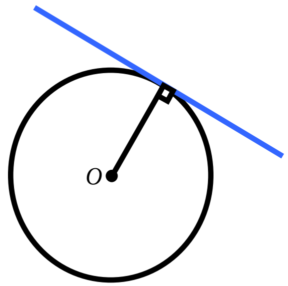
Секущая — прямая, проходящая через две произвольные точки окружности.



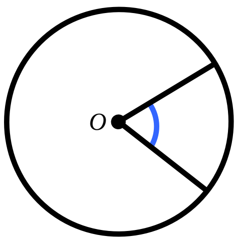
Содержание

Основные понятия

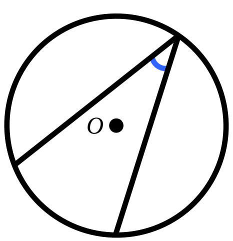
Касательная — прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярно ее радиусу. Касательная имеет с окружностью только одну общую точку.



Центральный угол — угол, образованный двумя радиусами. Центральный угол измеряется дугой, на которую опирается.



Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются ее хордами.



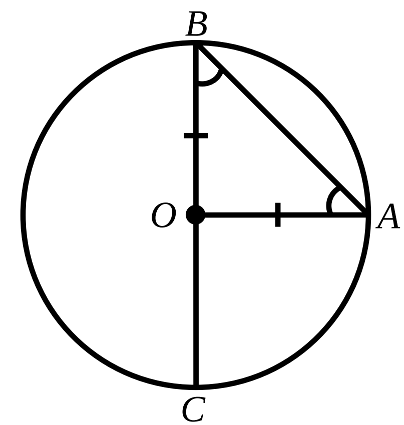
Содержание

Свойства вписанных углов

1. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство.

1) Центр на одной из сторон.



$\angle ABC$ — вписанный угол, BA и BC — хорды, OA — радиус. Проведем радиус OA. Рассмотрим треугольник OAB:

$$OB = OA$$

Следовательно, он равнобедренный и $\angle A = \angle B$

Угол AOC — внешний, следовательно,

$$\angle AOC = \angle A + \angle B = 2\angle B$$

Следовательно,

$$\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC$$

Угол AOC измеряется дугой AC, следовательно, его половина измеряется половиной дуги AC. Что и требовалось доказать.

Содержание

Свойства вписанных углов

2) Центр лежит внутри угла *ABC*.

$\angle ABC$ — вписанный угол, *BD* — диаметр,

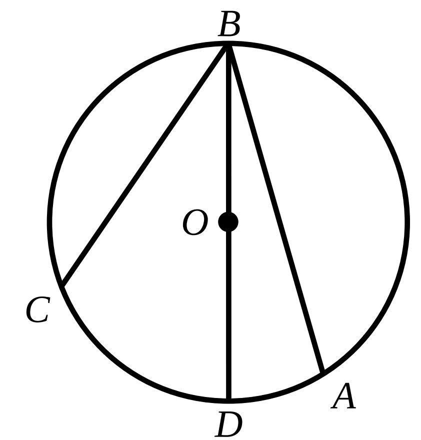
$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$

По свойству 1:

$$\angle ABC = (\angle ABD + \angle DBC) = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{DC}$$

Следовательно,

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{CA}$$



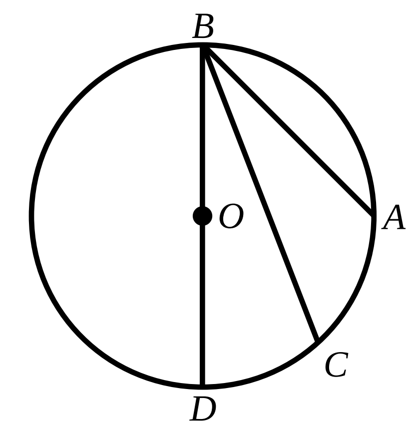
Что и требовалось доказать.

3) Центр лежит вне угла.

$\angle AOB$ — вписанный угол, *BD* — диаметр.

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD =$$

$$= \frac{1}{2}\overset{\smile}{DA} - \frac{1}{2}\overset{\smile}{DC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{CA}$$



Что и требовалось доказать.

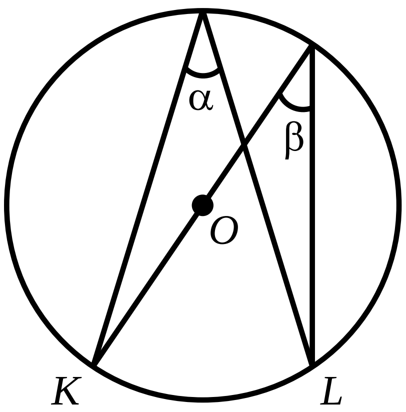
Содержание

Свойства вписанных углов

2. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Доказательство.

$\angle\alpha$ и $\angle\beta$ — вписанные углы, *KL* — дуга.



По свойству 1:

$$\angle\alpha = \frac{1}{2}\breve{KL}$$

$$\angle\beta = \frac{1}{2}\breve{KL}$$

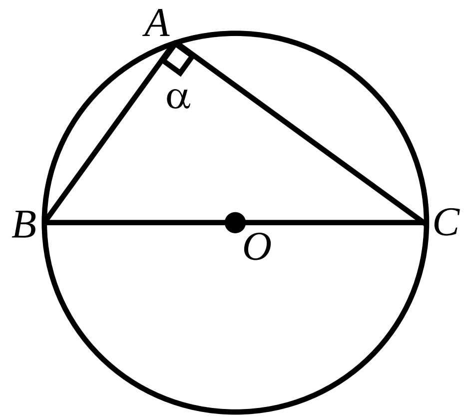
Следовательно,

$$\angle\alpha = \angle\beta$$

Что и требовалось доказать.

Содержание

3. Вписанный угол, опирающийся на диаметр — прямой.



Доказательство.

$\angle\alpha$ — внутренний угол, BC — диаметр.

По свойству 1:

$$\angle\alpha = \frac{1}{2}\breve{BC}$$

Так как BC — полуокружность, следовательно, $\breve{BC} = 180°$

Таким образом,

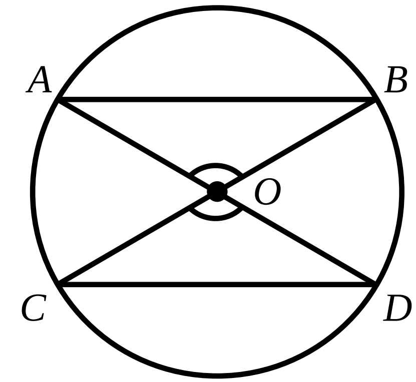
$$\angle\alpha = \frac{1}{2}\breve{BC} = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$$

Что и требовалось доказать.

Содержание

4. Равные дуги окружности стягиваются равными хордами.

Доказательство.



$\breve{AB} = \breve{CD}$, AB и CD — хорды.

1. Проведем радиусы $R = OA = OB = OC = OD$

2. Треугольники OAB и OCD равны, т.к.

$OA = OB = OC = OD$ (радиусы).

$\angle BOA = \frac{1}{2}\breve{AB}$ и $\angle DOC = \frac{1}{2}\breve{DC}$

Следовательно,

$$\angle BOA = \angle DOC$$

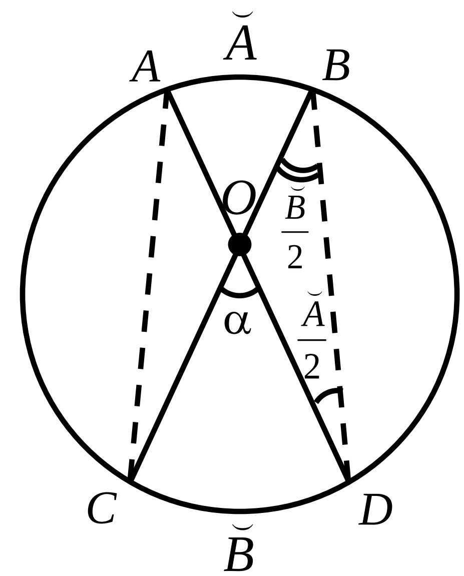
В равных треугольниках против соответственно равных углов лежат равные стороны, следовательно, $AB = CD$

Что и требовалось доказать.

Содержание

Теорема (угол между пересекающимися хордами). Угол между двумя пересекающимися хордами равен полусумме высекаемых ими дуг.

$$\alpha = \frac{\breve{B} + \breve{A}}{2}$$



Доказательство.

Угол α — внешний угол треугольника *DOB*.

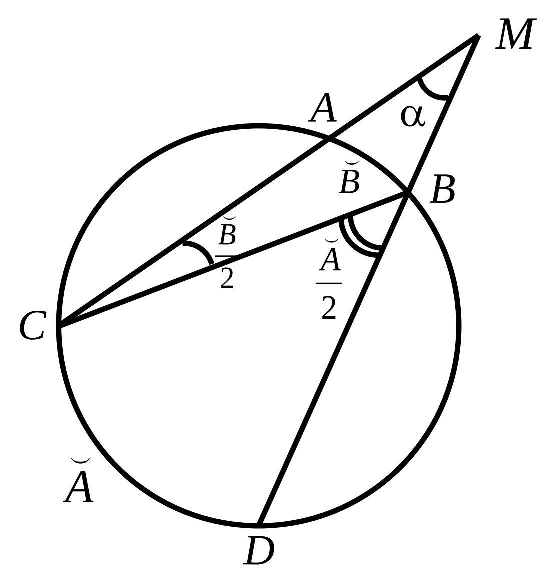
$$\alpha = \frac{\breve{B} + \breve{A}}{2}$$

Что и требовалось доказать.

Содержание

Теорема (угол между секущими). Угол между двумя секущими, проведенными из одной точки, равен полуразности большей и меньшей высекаемых ими дуг.

$$\alpha = \frac{\breve{A} - \breve{B}}{2}$$



Доказательство.

По теореме о внешнем угле треугольника *MBC*:

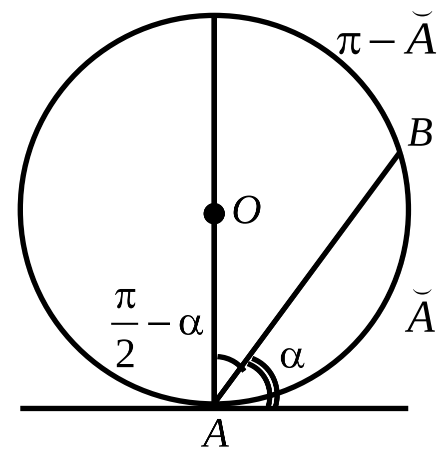
$$\frac{\breve{A}}{2} = \alpha + \frac{\breve{B}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\breve{A} - \breve{B}}{2}$$

Что и требовалось доказать.

Содержание

Теорема (угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания). Угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой.

Доказательство.



1. Проведем диаметр.

2. Угол $\frac{\pi}{2}-\alpha$ опирается на дугу $\pi-\breve{A}$

Тогда,

$$\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{1}{2}(\pi-\breve{A})\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\breve{A}}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\breve{A}}{2}$$

Что и требовалось доказать.

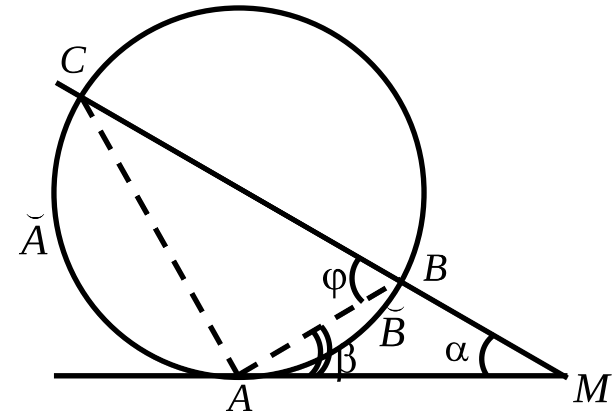
Аналогично для тупого угла $\pi-\alpha$

Содержание

Углы, связанные с окружностью

Теорема (угол между касательной и секущей). Угол между касательной и секущей равен полуразности высекаемых ими дуг.

Доказательство.



По теореме о вписанных углах: $\angle\varphi = \frac{1}{2}\breve{A}$

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle\beta = \frac{1}{2}\breve{B}$

$\angle\varphi$ — внешний угол треугольника *ABM*.

$$\angle\varphi = \angle\beta + \angle\alpha \Leftrightarrow \angle\alpha = \angle\varphi - \angle\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\breve{A} - \frac{1}{2}\breve{B} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\breve{A} - \breve{B}}{2}$$

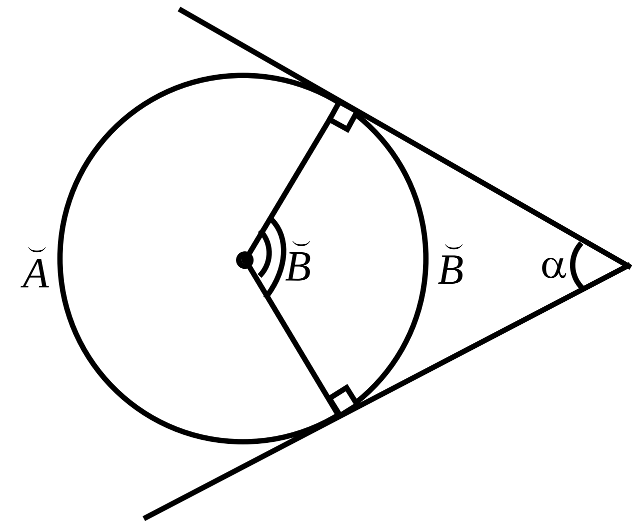
Что и требовалось доказать.

Содержание

Теорема (угол между касательными). Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки, равен полуразности большей и меньшей высекаемых ими дуг.

Доказательство.

Проведем радиусы в точки касания, они перпендикулярны касательным.



$$\alpha + 90^\circ + 90^\circ + \breve{B} = 360^\circ \Leftrightarrow \alpha = 180^\circ - \breve{B}$$

Примечание.

$$\frac{\breve{A} + \breve{B}}{2} = 180^\circ$$

Тогда

$$\alpha = \frac{\breve{A} + \breve{B}}{2} - \breve{B} = \frac{\breve{A} - \breve{B}}{2}$$

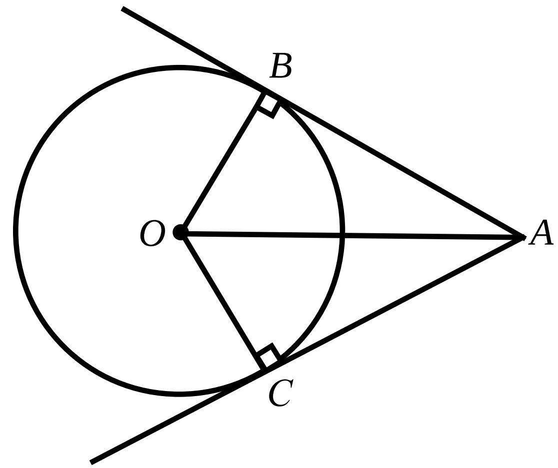
Что и требовалось доказать.

Содержание

Отрезки, связанные с окружностью

Теорема. Отрезки касательных к окружностям, проведенным из одной точки, равны.

Доказательство.



$\Delta AOB = \Delta AOC$, так как гипотенуза OA — общая,

$OB = OC$ — радиусы.

Следовательно,

$$AB = AC$$

Что и требовалось доказать.

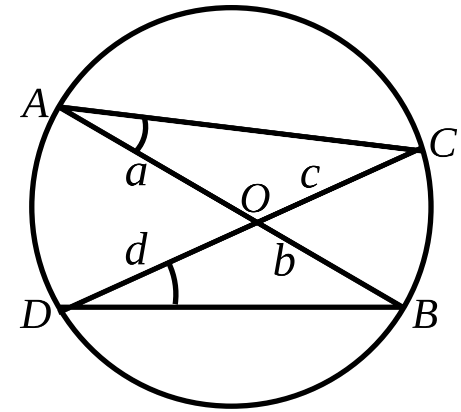
.

Содержание

Отрезки, связанные с окружностью

Теорема. Произведение отрезков, на которые делится хорда данной точкой, есть для данной окружности величина постоянная.

$$ab = cd$$



Доказательство.

Пусть AB и CD — данные хорды, O — точка пересечения.
Проведем хорды AC и BD.

$\Delta AOC \sim \Delta DOB$, так как $\angle AOC = \angle DOB$ — вертикальные,
$\angle CAB = \angle CDB$ — опираются на дугу CB.

Тогда

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow ab = cd$$

Что и требовалось доказать.

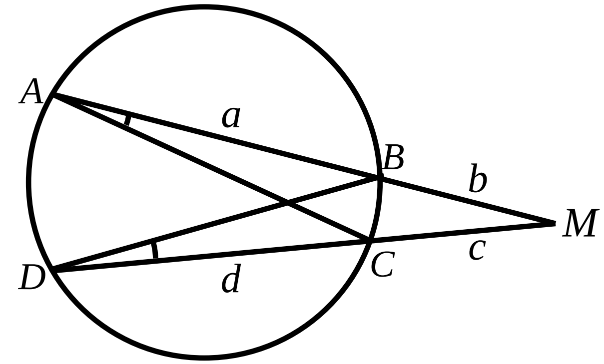
Содержание

Отрезки, связанные с окружностью

Теорема. Произведение секущей на ее внешнюю часть есть для данной окружности величина постоянная.

$$(a+b)\cdot b=(c+d)\cdot d$$

Доказательство.



Проведем хорды AC и BD.

$\Delta AMC \sim \Delta DMB$ (по двум углам):

$\angle AMD$ — общий,

$\angle MAC = \angle BDC$ — опираются на дугу BC.

Тогда

$$\frac{b}{c+d}=\frac{c}{a+b}\Leftrightarrow (a+b)\cdot b=(c+d)\cdot d$$

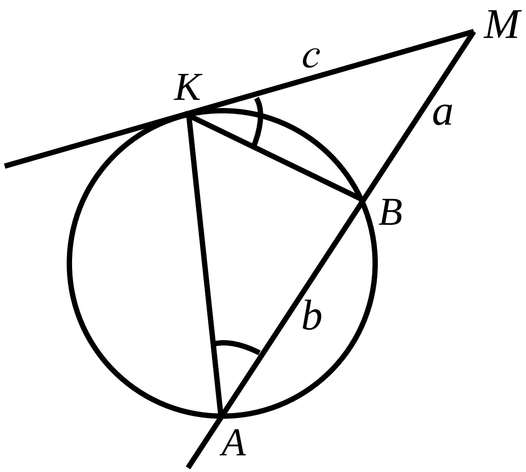
Что и требовалось доказать.

Содержание

Отрезки, связанные с окружностью

Теорема. Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

$$c^2 = a \cdot (a+b)$$



Доказательство.

$\Delta MKB \sim \Delta MAK$, так как $\angle KMA$ — общий,

$$\angle MKB = \angle KAB = \frac{1}{2}\breve{KB}$$

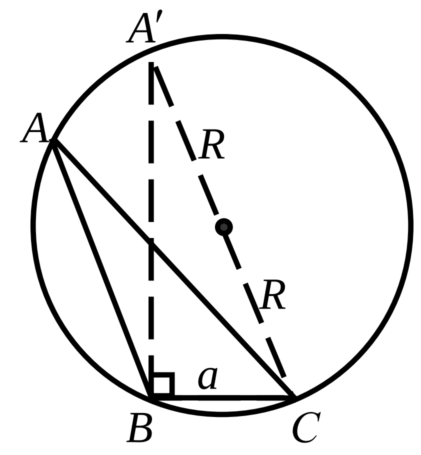
Тогда

$$\frac{c}{a+b} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c^2 = a \cdot (a+b)$$

Что и требовалось доказать.

Содержание

Теорема. Отношение хорды к синусу вписанного угла, который на нее опирается, равно двум радиусам (теорема синусов).



Доказательство.

$\angle A = \angle A'$, так как они опираются на одну дугу BC.

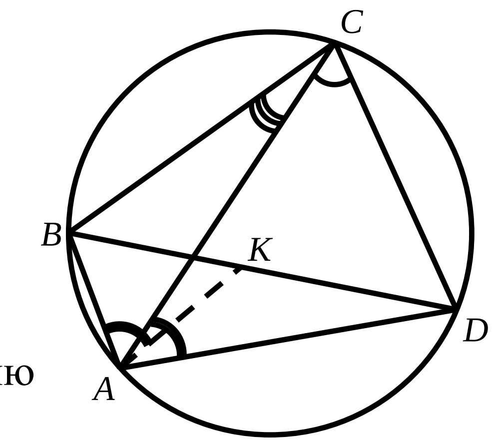
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin A'} = 2R$$

Что и требовалось доказать.

Содержание

Теорема Птолемея

Теорема. Во всяком четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма произведений длин противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей.



$$|AC|\cdot|BD|=|AB|\cdot|CD|+|AD|\cdot|BC|$$

Доказательство.

1. Проведем диагонали *AC* и *BD*.

2. Выберем на диагонали *BD* точку *K* так, чтобы $\angle BAK=\angle CAD$

3. Тогда треугольники *KBA* и *ACD* подобны (по равному по построению углу и по углу, опирающемуся на дугу *AD*); треугольники *AKD* и *ABC* подобны (по двум углам: $\angle BAC=\angle KAD$ (по построению) и $\angle BDA=\angle BCA$).

4. Тогда:

$$\begin{cases}\dfrac{|BK|}{|BA|}=\dfrac{|CD|}{|AC|}\\[2mm] \dfrac{|AD|}{|KD|}=\dfrac{|AC|}{|BC|}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|BK|\cdot|AC|=|CD|\cdot|BA|\\ |AD|\cdot|BC|=|AC|\cdot|KD|\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|AC|(|BK|+|KD|)=|AB|\cdot|CD|+|AD|\cdot|BC|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|AC|\cdot|BD|=|AB|\cdot|CD|+|AD|\cdot|BC|$$

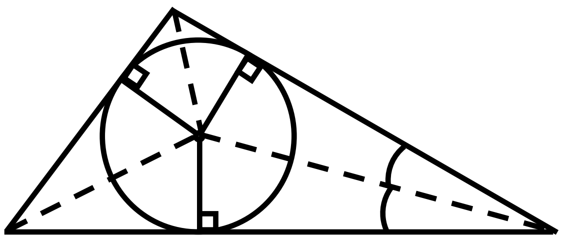
Что и требовалось доказать.

Содержание

Окружность, вписанная в многоугольник

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется *вписанной* в многоугольник, а многоугольник — *описанным* около этой окружности.

1) В любой треугольник можно вписать окружность.



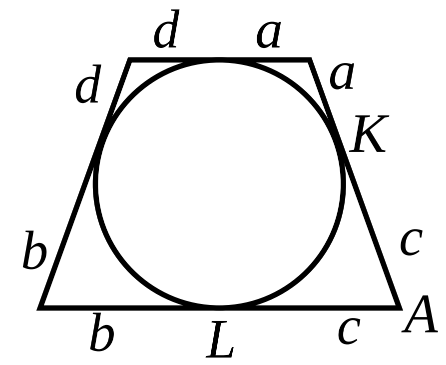
$r = \frac{S}{p}$, где p — полупериметр.

Центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис.

Содержание

Окружность, вписанная в многоугольник

2) В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.



$|AK| = |AL|$, так как AK и AL — касательные к окружности, проведенные из одной точки.

Аналогично с остальными отрезками.

Тогда сумма противоположных сторон есть для данного четырехугольника величина постоянная.

Содержание

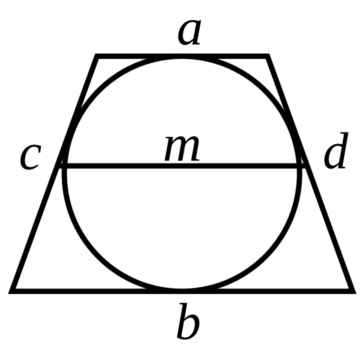
Окружность, вписанная в многоугольник

3) Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

Из параллелограммов окружность можно вписать в ромб, квадрат.

Если в трапецию вписана окружность, то сумма оснований равна сумме боковых сторон, а средняя линия — полусумме боковых сторон.

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}$$

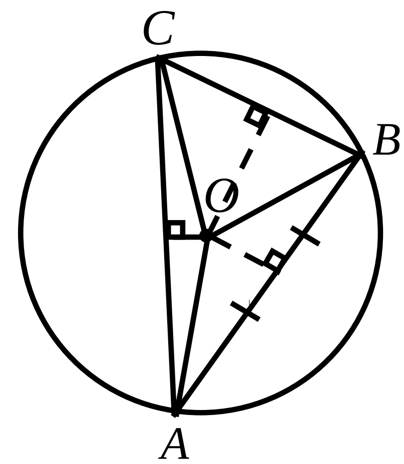


Содержание

Окружность, описанная около многоугольника

Если вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется *описанной* около многоугольника, а многоугольник — *вписанным* в эту окружность.

1) Около любого треугольника можно описать окружность.



$$R = \frac{4S}{abc}$$

$$S = 2R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

Центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

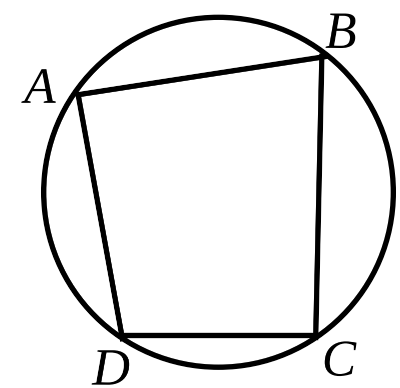
Содержание

Окружность, описанная около многоугольника

2) В любом четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма противоположных углов равна 180°.

$$\angle A = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BCD}$$

$$\angle C = \frac{1}{2}\overset{\smile}{DAB}$$



Тогда

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BCD} + \overset{\smile}{DAB}) = 180^\circ$$

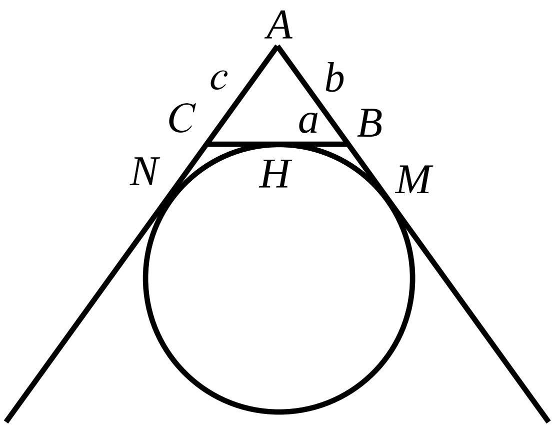
Из всех параллелограммов окружность можно описать около прямоугольника, квадрата.

Содержание

Вневписанная окружность

Вневписанная окружность — окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других его сторон.

Теорема. Расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности с продолжением его боковой стороны равно полупериметру *p*.



Доказательство.

1. $|AN|=|AM|$ — отрезки касательных, исходящих из одной точки.

$$|CH|=|CN|,\quad |HB|=|BM|$$

2. $P=|AC|+|CH|+|AB|+|HB|=|AN|+|AM|=2|AN|$

Таким образом, $|AN|=p$

Примечание: точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника делит его периметр пополам: $|AC|+|CH|=p$

Следствие:

$$|CH|=p-|AC|=p-c$$

$$|HB|=p-b$$

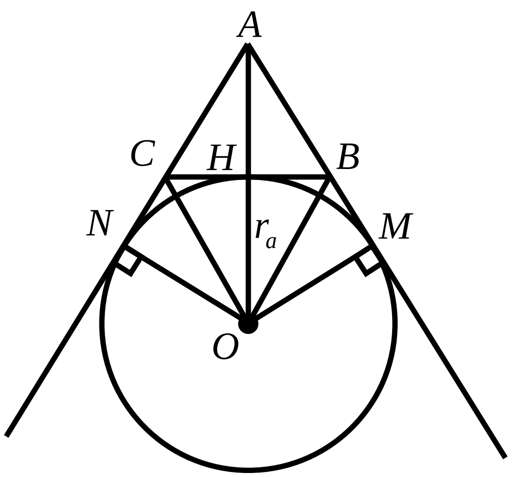
.

Содержание

Вневписанная окружность

Теорема. Радиус вневписанной окружности, проведенный к стороне a, вычисляется по формуле:

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$



Доказательство.

1. Площадь четырехугольника *ONAM*:

$$S_{ONAM} = S_{AOM} + S_{AON} = \frac{1}{2} r_a |AM| + \frac{1}{2} r_a |AN| =$$
$$= r_a |AM| = p \cdot r_a$$

2. Площадь четырехугольника *ONAM*:

$$S_{ONAM} = S_{ABC} + S_{OMBCN} = S_{ABC} + 2S_{BOH} + 2S_{CHO} =$$
$$= S_{ABC} + 2S_{BOC} = S_{ABC} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r_a \cdot a = S_{ABC} + r_a \cdot a$$

3. Таким образом,

$$r_a \cdot p = S_{ABC} + r_a \cdot a \Leftrightarrow r_a (p-a) = S_{ABC} \Leftrightarrow r_a = \frac{S_{ABC}}{p-a}$$

Что и требовалось доказать.

Содержание

Вневписанная окружность

Теорема. Площадь треугольника можно вычислить по формуле:

$$S = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}$$

Доказательство.

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r = \frac{S}{p-a} \cdot \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c} \cdot \frac{S}{p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r = \frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r = \frac{S^4}{S^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r = S^2 \Leftrightarrow S = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}$$

Что и требовалось доказать.

Содержание

Конец

Начать заново

Завершить показ