Элементы комбинаторики

Решение комбинаторных задач

Правило умножение

Задача № 1. Из цифр 2, 4, 7 следует составить трехзначное число, в котором ни одна цифра не может повторяться более двух раз. Сколько всего таких чисел можно составить?

Решение.

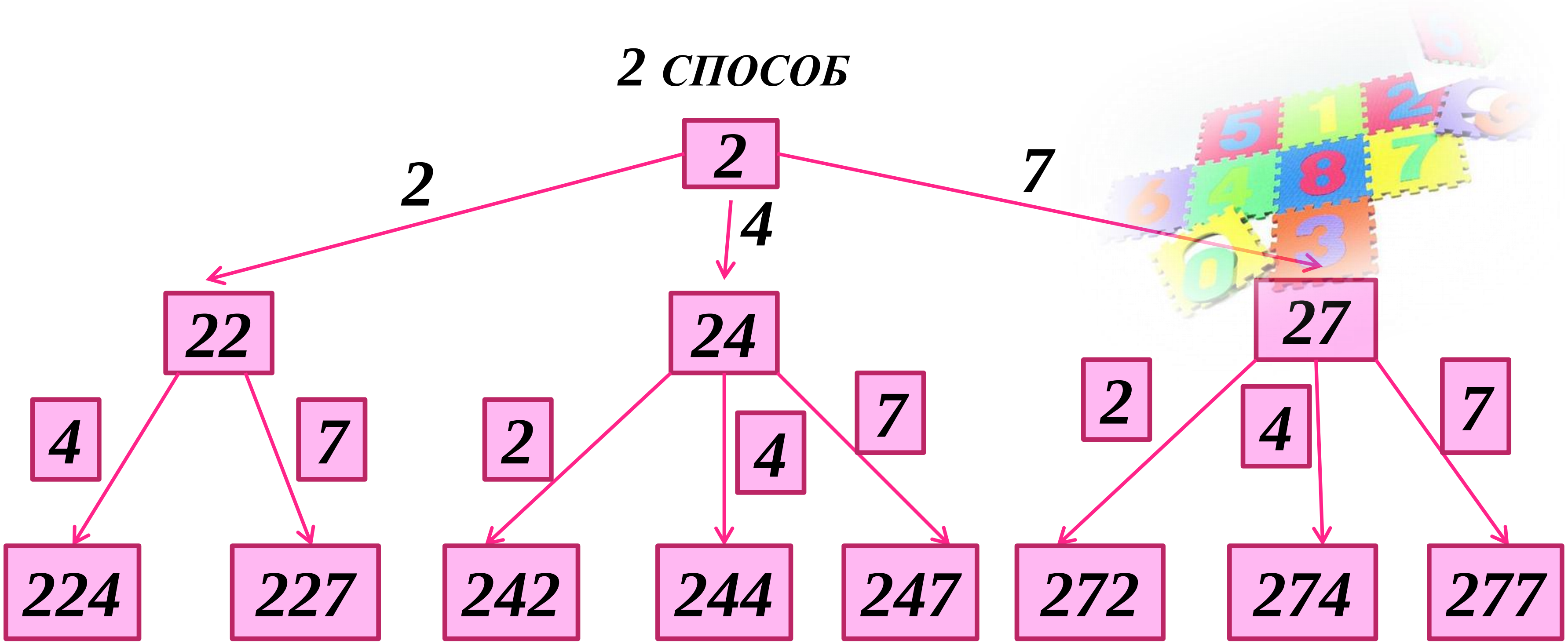
1 способ. Найдем количество всех трехзначных чисел, которые начинаются с цифры 2: 224, 227, 242, 272, 244, 277, 247, 274 – 8 чисел.

Найдем количество всех трехзначных чисел, которые начинаются с цифры 4: 442, 447, 424, 474, 422, 477, 427, 472 – 8 чисел.

Найдем количество всех трехзначных чисел, которые начинаются с цифры 7: 772, 774, 727, 747, 722, 744, 724, 742 – 8 чисел.

Ответ. 24 числа.

2 способ

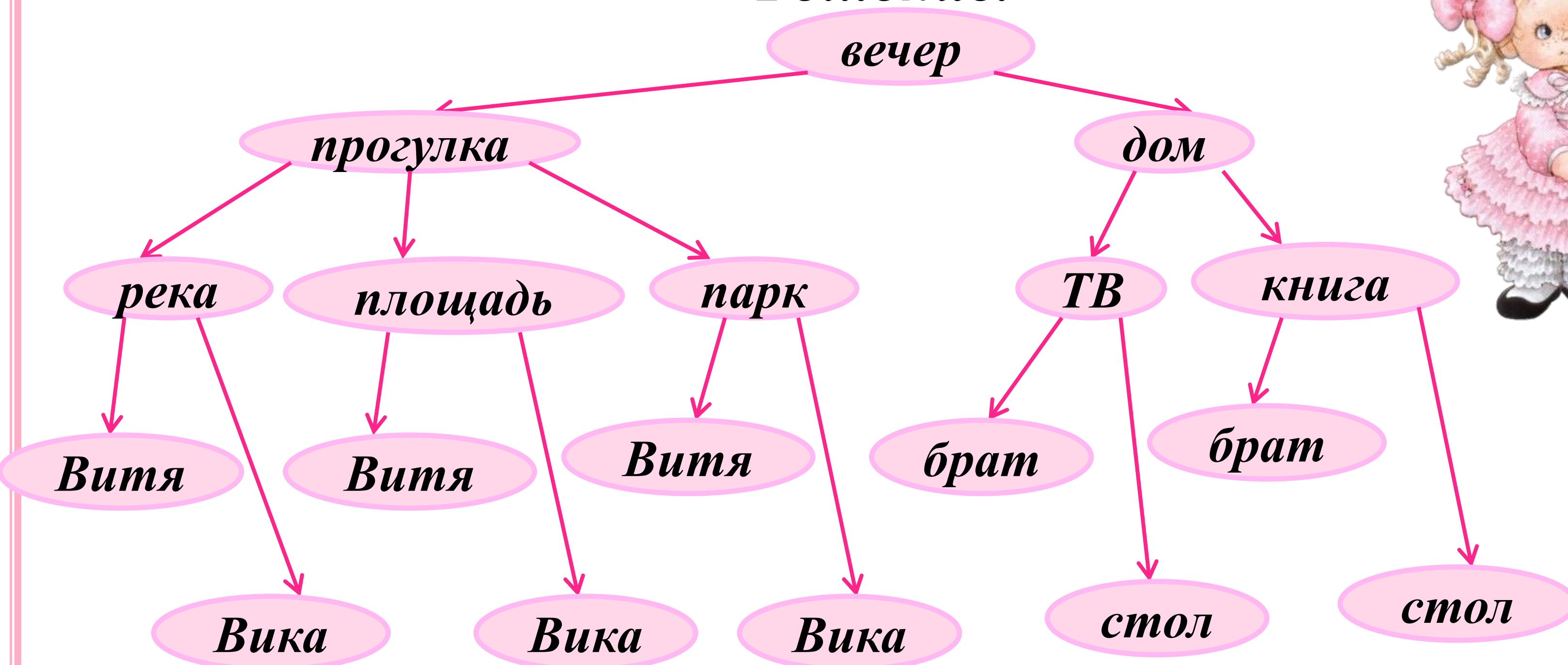


Всего 8чисел

Мы составили ***дерево возможных вариантов*** трехзначных чисел, где на первом месте стоит цифра 2. Составим дерево возможных вариантов для трехзначных чисел, где на первом месте стоит цифра 4, получим 8 чисел и для трехзначных чисел, где на первом месте стоит цифра 7, тоже 8 чисел. ***Всего 24 числа.***

Задача № 2. «Этот вечер свободный можно так провести…»: пойти погулять к реке, на площадь или в парк и потом пойти в гости к Вити или к Вике. А можно остаться дома, сначала посмотреть телевизор или почитать книжку, а потом поиграть с братом или разобраться у себя на письменном столе. Сколько всего вариантов существует для проведения данного вечера.

Решение.



Всего 10 вариантов

Задача № 3 На завтрак Вова может выбрать плюшку, бутерброд, пряник или кекс, а запить их он может кофе, соком или кефиром. Из скольких вариантов завтрака Вова может выбирать?

Решение

	Плюшка	Бутерброд	Пряник	Кекс
Кофе	Кофе, плюшка	Кофе, бутерброд	Кофе, пряник	Кофе, кекс
Сок	Сок, плюшка	Сок, бутерброд	Сок, пряник	Сок, кекс
Кефир	Кефир, плюшка	Кефир, бутерброд	Кефир, пряник	Кефир, кекс

12 вариантов завтрака

Задача № 4. Сколько различных танцевальных пар (юноша, девушка) можно составить из пяти юношей и восьми девушек.

Решение.

Каждый из ***пяти*** юношей может пригласить любую из ***восьми*** девушек.

Поэтому различных танцевальных пар можно составить $5 \cdot 8 = 40$.

Ответ. 40 танцевальных пар.

Выполненные при решении этих задач рассуждения опираются на следующее утверждение.

Правило умножения.

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний А и В, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания В.

Задача. Сколько среди четырёхзначных чисел, составленных из цифр 3, 4, 6, 8 (без повторений), таких, которые начинаются с цифры 3?

А. 24   Б. 18   В. 6   Г. 12

Решение

На первое место можно поставить ***только одну*** цифру – 3

На второе место можно поставить любую из ***трёх***: 4, 6 или 8

На третье место можно поставить любую из ***двух*** оставшихся цифр

На четвертое место можно поставить ***одну*** оставшуюся цифру

Используя правило умножения получаем ***1·3·2·1=6***

Ответ. В

Задача. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 4, 6, 8(без повторения).

А. 360 Б. 480 В. 240 Г. 400

Решение

Все числа состоят из одних и тех же цифр, значит сумма цифр каждого числа одинаковая и равна ***2+4+6+8= 20***.

Выясним сколько таких четырехзначных чисел существует.

На первое место можно поставить любую из ***четырех*** данных цифр.

На второе место любую из ***трёх*** оставшихся цифр.

На третье место любую из ***двух*** оставшихся цифр.

На четвёртое место ***одну*** оставшуюся цифру.

По правилу умножения получаем ***4·3·2·1=24*** числа.

Сумма цифр 24 чисел составляет ***24·20=480***.

Ответ Б.

Задача. Из класса, в котором учится 15 девочек и 10 мальчиков, нужно выбрать одну девочку и одного мальчика для ведения школьного вечера. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

Применим правило умножения: девочку можно выбрать ***15 способами***,

мальчика – ***10 способами***,

пару мальчик – девочка – ***15 · 10 = 150*** способами.

Ответ. 150

Задача. В чемпионате города по футболу играет десять команд. Сколькими способами могут распределиться три призовых места?

Решение

На первое место можно поставить любую из ***10*** команд,

на второе – любую из ***9*** оставшихся,

на третье – любую из ***8*** оставшихся.

По правилу умножения общее число способов, которыми можно распределить три места, равно ***10 · 9 · 8 = 720***.

Ответ. 720.

Задача. В расписании уроков на среду для первого класса должно быть четыре урока: два урока математики, урок чтения и урок физкультуры. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

Решение

Урок чтения можно поставить на любой из ***четырёх*** уроков,

Урок физкультуры – на любой из ***трёх*** оставшихся.

После этого для двух уроков математики останется ***единственный*** вариант поставить их в расписание.

По правилу умножения общее число способов составить расписание на среду равно $4 \cdot 3 = 12$.

Ответ. 12.

Задача. В конференции участвовало 30 человек. Каждый участник с каждым обменялся визитной карточкой. Сколько всего понадобилась карточек?

Решение.

Каждый из ***30*** участников конференции раздал ***29*** карточек.

Значит, всего было роздано ***30 · 29 = 870*** карточек.

Ответ. 870.

Задача. Сколько трёхзначных чисел можно записать, используя только цифры 0, 2, 4, 6?

Решение

На первое место можно поставить любую из цифр, кроме нуля, - это ***3 варианта*** ;

на второе место – любую из **4** цифр и

на третье – тоже любую из **4** цифр.

По правилу умножения общее количество вариантов равно $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

***Ответ*. 48.**

Задача. В меню школьной столовой 2 различных супа, 4 вторых блюда и 3 вида сока. Сколько можно составить вариантов обеда из трех блюд?

Решение

Первое блюдо можно выбрать ***2 способами***,

второе блюдо – 4 ***способами*** и

третье блюдо – ***3 способами***.

По правилу умножения общее количество вариантов равно $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

Ответ. 24.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Задача № 1. В семье шесть человек, а за столом в кухне шесть стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти шесть стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

Решение

Предположим, что первой садится бабушка. У нее имеется **6** вариантов выбора стула.

Вторым садится дедушка и независимо выбирает стул из **5** оставшихся

Мама делает свой выбор третьей, и выбор у нее будет из **4** стульев

У папы будет уже **3** варианта, у дочки – **2**, ну а у сын сядет на ***единственно*** незанятый стул.

По правилу умножения имеем $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Ответ. 720 дней.

Определение. ***Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают n! и называют «эн факториал»:*** $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Задача № 2. В 9 «А» классе в среду семь уроков: алгебра, геометрия, литература, русский язык, английский язык, биология и физкультура. Сколько вариантов расписания можно составить на среду?

Решение

Для алгебры – **7** вариантов. Для геометрии – **6** вариантов. Для литературы – **5** вариантов и т. д.

По правилу умножения получаем:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040.$$

Ответ. 5040.

Определение. ***Перестановкой называется множество из n элементов, записанных в определённом порядке.***

Теорема о перестановках элементов конечного множества:

n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно n! способами.

$$P_n = n!$$

Задача. Четыре друга купили билеты в кино: на 1-е и 2-е места в первом ряду и на 1-е и 2-е места во втором ряду. Сколькими способами друзья могут занять эти 4 места в кинотеатре?

Решение

Используя теорему о перестановках имеем:***4-е*** друга могут занять по одному ***4-е*** различных места ровно ***4!*** способами**.**

$$P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Ответ. ***24 способа***

Задача. Сколькими способами можно с помощью букв K, L, M, N обозначить вершины четырехугольника?

Решение

Используя теорему о перестановках имеем:***4-е*** различные буквы можно записать по одной около ***4-ех*** различных вершин многоугольника ровно **4!** способами.

$$P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Ответ. *24 способа*

Задача. Сколько различных нечетных пятизначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 4, 6, 8?

Решение

Т.к. числа должны быть нечётными, то на последнем пятом месте может быть только нечётная цифра – это ***1***.

Осталось ***4-е*** цифры(***2, 4, 6, 8***) и ***4-е*** разряда.

Используя теорему о перестановках имеем: $P_n = 4! = 24$

Ответ. 24 числа.

Задача. Сколько различных чётных пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение

Т. к. числа должны быть чётными, значит на последнем пятом месте должна стоять чётная цифра – это ***2*** или ***4***.

Найдем сколько пятизначных чётных чисел, которые оканчиваются цифрой ***2***.

Осталось ***4-е*** цифры(***1, 3, 4, 5***) и ***4-е*** разряда. Применяя теорему о перестановках имеем: $P_n = 4! = 24$ числа.

Рассуждая аналогично, получим, что пятизначных чётных чисел, оканчивающихся цифрой ***4***, тоже ***24***.

Получаем: $24 + 24 = 48$.

Ответ. 48 чисел.

РАЗМЕЩЕНИЯ

Задача. Сколькими способами можно записать двузначных чисел с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

Решение

Решим эту задачу, используя правило умножения.

В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных ***четырёх*** цифр, а на втором – любая из ***трёх*** оставшихся.

По правилу умножения таких двузначных чисел: $4 \cdot 3 = 12$

Ответ. 12 чисел.

При решении задач из 4-ёх данных элементов (цифр 1, 2, 3, 4) были образованы всевозможные соединения по 2 элемента в каждом, причём любые два соединения отличались либо ***составом элементов*** (например, 12 и 24), либо ***порядком их расположения*** (например, 12 и 21).

Такие соединения называются размещениями.

Определение. Размещениями из m элементов по n элементов (n ≤ m) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число всевозможных размещений из ***m*** элементов по ***n*** элементов обозначают A_m^n

Формула для вычисления:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Задача. Сколькими способами 3 ученика могут занять места в классе, в котором стоят 20 одноместных столов

Решение

Задача сводится к нахождению числа размещений из 20 элементов по 3 элемента в каждом.

Используя формулу для вычисления числа размещений имеем

$$A_{20}^{3} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 18 \cdot 19 \cdot 20 = 6840$$

Ответ. 6840

Задача. В классе изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 6 разных уроков?

Решение

Найдем число размещений из 9 элементов по 6 элементов в каждом.

Применяя формулу получаем: $A_9^6 = \dfrac{9!}{(9-6)!} = \dfrac{9!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 =$

$$= 60480$$

Ответ. 60480

Задача. Сколько существует способов для обозначения вершин данного четырёхугольника с помощью букв A, B, C, D, E, F?

Решение

Задача опять сводится к нахождению числа размещений из 6 элементов по 4 элемента.

Получаем: $A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$

Ответ. 360

Задача. В классе 30 человек. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?

Решение

Для того, чтобы ответить на вопрос задачи найдем число размещений из 30 элементов по 2 элемента в каждом.

$$A_{30}^{2}=\frac{30!}{(30-2)!}=\frac{30!}{28!}=29\cdot 30=870$$

Ответ. 870

Задача. В чемпионате по футболу участвуют 10 команд. Сколько существует различных возможностей занять командам первые три места?

Решение

Найдем размещения из 10 элементов по 3 элемента в каждом.

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Ответ. 720

Сочетания

Задача. Из пяти шахматистов для участия в турнире нужно послать двух. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

Из пяти шахматистов можно составить A_5^2 пар.

Но из этих пар надо выбрать те, которые отличаются составом участников, но не их порядком.

Таких пар в 2 раза меньше, т.е.

$$\frac{A_5^2}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Ответ. 10 способов.

При решении задач из пяти человек были образованы соединения по 2, которые отличаются ***только составом пар***.

Такие соединения называются сочетаниями.

Определение. ***Сочетаниями из m элементов по n элементов ($n \le m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.***

Число всевозможных сочетаний из ***m*** элементов по ***n*** элементов обозначают C_m^n

Формула для вычисления:

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

Задача. Сколькими способами можно делегировать троих студентов на межвузовскую конференцию из 9 членов научного общества.

Решение

Создание групп из трех человек без учета их порядка расположения является сочетанием.

Используя формулу находим $C_9^3 = \dfrac{9!}{6!\cdot 3!} = \dfrac{7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3} = 7\cdot 4\cdot 3 = 84$

Ответ. 84 способа.

Задача. В школьном хоре 6 девочек и 4 мальчика. Сколькими способами можно выбрать из состава хора двух девочек и одного мальчика для участия в выступлении окружного хора?

Решение

Составление пар из числа девочек без учета их порядка расположения – есть сочетание.

$$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 5 \cdot 3 = 15$$

Мальчика можно выбрать 4 способами.

Используя правило умножения, получаем

$$4 \cdot 15 = 60$$

Ответ. 60 вариантов.

Задача. В вазе лежат 5 разных яблок и 6 различных апельсинов. Сколькими способами из них можно выбрать 2 яблока и 2 апельсина.

Решение

Выбор 2 яблок из 5(порядок не важен) – сочетания.

$$C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 2 \cdot 5 = 10$$

Выбор 2 апельсинов из 6(порядок не важен) – сочетания.

$$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 5 \cdot 3 = 15$$

По правилу умножения – 10 · 15=150.

Ответ. 150 способов.

Задача. Имеется 3 разноцветных мяча, 5 разноцветных кубиков и 4 разноцветных скакалки. Сколькими способами можно получить набор из двух мячей, двух кубиков и двух скакалок?

А. 180 Б. 60 В. 23 Г. 12

Решение

Найдем сколько различных вариантов выбора мячей.

$$C_3^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{3}{1} = 3$$

Найдем сколько различных вариантов выбора кубиков.

$$C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 2 \cdot 5 = 10$$

Найдем сколько различных вариантов выбора скакалок.

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 3 \cdot 2 = 6$$

$3 \cdot 10 \cdot 6 = 180.$ ***Ответ. А***