Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer va Gauss ussullari yordamida yechish.

Reja:

1. Ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi.
3. n noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi.
4. Gauss usuli

1. Ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi.

Ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasining

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

yechimini topish uchun determinantlar nazariyasidan foydalanamiz. Bu yerda x va y noma’lum sonlar, qolgan barcha sonlar esa ma’lum. Noma’lumlar oldidagi ko’paytuvchilar sistema koeffitsientlari, b_1 va b_2 sonlar esa ozod hadlar deb ataladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish, x va y sonlarning shunday to’plamiki, ularni sistema tenglamalarining o’rniga qo’yilganda ular ayniyatga aylanadi. Bunday sonlar to’plamini sistemaning yechimi deb ataymiz.

Kamida bitta yechimga ega bo’lgan sistema birgalikdagi sistema deyiladi.

Bitta yechimga ega bo’lgan birgalikdagi sistema *aniq sistema* deyiladi.

Cheksiz ko’p yechimlarga ega bo’lgan birgalikdagi sistema *aniqmas sistema* deyiladi. Bitta ham yechimga ega bo’lmagan sistema *birgalikda bo’lmagan sistema* deyiladi.

Sistema koeffitsientlaridan quyidagi ikkinchi tartibli determinantni tuzib, uni Δ bilan belgilaymiz va sistema determinant deb ataymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

So'ngra bu determinantda mos ravishda birinchi va ikkinchi ustunlarni ozod hadlar bilan almashtirib, Δ_x , Δ_y bilan belgilanadigan ushbu determinantni tuzamiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (1) sistemaning yechimi

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad (2)$$

formula yordamida topiladi.

Isbot. (1) Sistema birinchi tenglamasining ikkala qismini (a_{22}) ga, ikkinchisini esa $(-a_{12})$ ga ko'paytirib va so'ngra olingan tenglamalarni qo'shib, quyidagini olamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \qquad (3)$$

Shunga o'xshash, (1) sistema birinchi tenglamasining ikkala qismini $(-a_{21})$ ga, ikkinchisini esa (a_{11}) ga ko'paytirib, so'ngra olingan tenglamalarni qo'shib, quyidagini olamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \qquad (4)$$

(3) va (4) formulalarda turgan ayirmalar biz yuqorida kiritgan ikkinchi tartibli determinantlardir.

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_x,$$

$$b_1 a_{21} - b_2 a_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_y$$

Bu belgilashlarda (3) va (4) tenglamalar bunday yoziladi:

$$\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \end{cases} \qquad (6)$$

Uch hol bo'lishi mumkin. a) Agar sistema determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsa, u holda (6) formulalardan (1) sistema birgalikda

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad (7)$$

formulalar bilan aniqlanadigan bitta yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. (2) formula isbot bo'ldi. (7) qoidaga *Kramer qoidasi* deyiladi.

b) Agar sistema determinanti $\Delta = 0$, lekin Δ_x va Δ_y determinantlardan kamida bittasi nolga teng bo'lmasa, u holda (6) formulalardan (1) sistema birgalikda emas, ya'ni bitta ham yechimga ega emasligi kelib chiqadi.

c) Agar sistema determinanti $\Delta = 0$ va $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ bo'lsa u holda (6) formuladan (1) sistema aniqmas, ya'ni cheksiz ko'p yechimlarga ega ekani kelib chiqadi.

1-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Yechish: Determinantni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

Kramer qoidasidan foydalanib x va y ni topamiz:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2; \quad \mathrm{y} = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1.$$

2-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$$

Yechish. Determinantni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

Sistema birgalikda emas, yechimlari yo’q.

3-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4. \end{cases}$$

Yechish. Determinantni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0, \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Sistema aniqmas, cheksiz ko’p yechimga ega. Agar ikkinchi tenglamani 2 ga qisqartirsak, sistema ushbu bitta tenglamaga keladi.

$$3x-y=2.$$

No‘ma’lum x ga ixtiyoriy qiymatlar berib, y ning mos qiymatlarini hosil qilish mumkin.

(1) sistemada ozod hadlar nolga teng bo’lsa sistema bir jinsli sistema deyiladi.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=0 \\ a_{21}x+a_{22}y=0 \end{cases}$$

Bunda $\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}=0$

bo’lganligi uchun bunday sistema $\Delta \neq 0$ bo’lganda aniq yechimga ega yoki $\Delta = 0$ bo’lganda cheksiz ko’p yechimga ega.

2. Uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi.

Endi ushbu uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (8)$$

Ushbu belgilashlarni kiritamiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

(8) sistema koeffitsientlaridan tuzilgan Δ determinantni sistema determinant deb ataymiz. Δ_x, Δ_y, Δ_z determinantlar

Δ determinantdan unda mos ravishda birinchi, ikkinchi yoki uchinchi ustunni b_1, b_2, b_3 ozod hadlar bilan almashtirishdan hosil bo'ladi. $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (8) sistema yechimi ushbu formula yordamida hisoblanadi.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (9)$$

(9) Formula uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasi uchun *Kramer qoidasi* deyiladi.

4-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

Δ , Δ_x, Δ_y, Δ_z determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14, \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 28, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42.$$

Kramer qoidasidan foydalanib, x, y, z larni topamiz.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1, \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2, \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3$$

(8) tenglamalar sistemasiga qaytib, ozod hadlar nolga teng deb hisoblaymiz. Ushbu bir jinsli sistemani qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z=0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z=0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z=0 \end{cases} \qquad (10)$$

Determinantlar $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, chunki ular nollardan iborat ustunga ega. Shu sababli bir jinsli sistema $\Delta \neq 0$ bo'lganda birgina nol yechim $x = 0, y = 0, z = 0$ ga ega yoki $\Delta = 0$ bo'lganda cheksiz ko'p yechimlarga ega.