



21. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ

УРАВНЕНИЯ



21. 1. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных и производные различных порядков этой функции.



Если искомая функция зависит от одной переменной, то ДУ называется обыкновенным.

Если искомая функция зависит от нескольких переменных, то ДУ называется уравнением в частных производных.



Простейшим примером ДУ является задача о нахождении первообразной $F(x)$ для заданной функции $f(x)$, т.к. ее можно рассматривать как задачу решения уравнения:

$$F'(x) = f(x)$$

В общем случае ДУ можно записать:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

1

Порядок старшей производной, входящей в ДУ, называется порядком ДУ.

Например, дифференциальное уравнение

$$x^2 \cdot (y''')^4 - x \cdot (y')^5 + 8 = 0$$

является уравнением третьего порядка.

Решением ДУ (1) называется такая функция $y=y(x)$, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество.

Например, решением дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0$$

является функция

$$y = \sin x$$

поскольку

$$y' = \cos x \quad y'' = -\sin x$$

Подставляем в уравнение:

$$-\sin x + \sin x = 0$$

ПРИМЕР.

Решить дифференциальное уравнение:

$$y'' = x$$

РЕШЕНИЕ.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x \Rightarrow dy' = x \cdot dx$$

Интегрируем почленно:

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad \text{- где } C_1 \text{ – произвольная постоянная.}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow dy = \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx$$

Еще раз интегрируем:

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

Таким образом, решение ДУ принципиально неоднозначно, поскольку в него входят произвольные постоянные.

ДУ задает семейство интегральных кривых на плоскости. Для выделения определенной интегральной кривой достаточно задать точку, через которую проходит искомая кривая и направление, в котором она проходит через эту точку. Такие условия называются начальными.

Например, если в рассмотренном примере

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$$

то

$$C_1 = 2 \quad C_2 = 1$$

Общим решением ДУ (1) называется решение
$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$$
которое является функцией переменной x и произвольных независимых постоянных.

Частным решением ДУ (1) называется решение, полученное из общего решения при конкретных числовых значениях постоянных.

В рассмотренном примере

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

- общее решение;

$$y = \frac{x^3}{6} + 2x + 1$$

- частное решение;