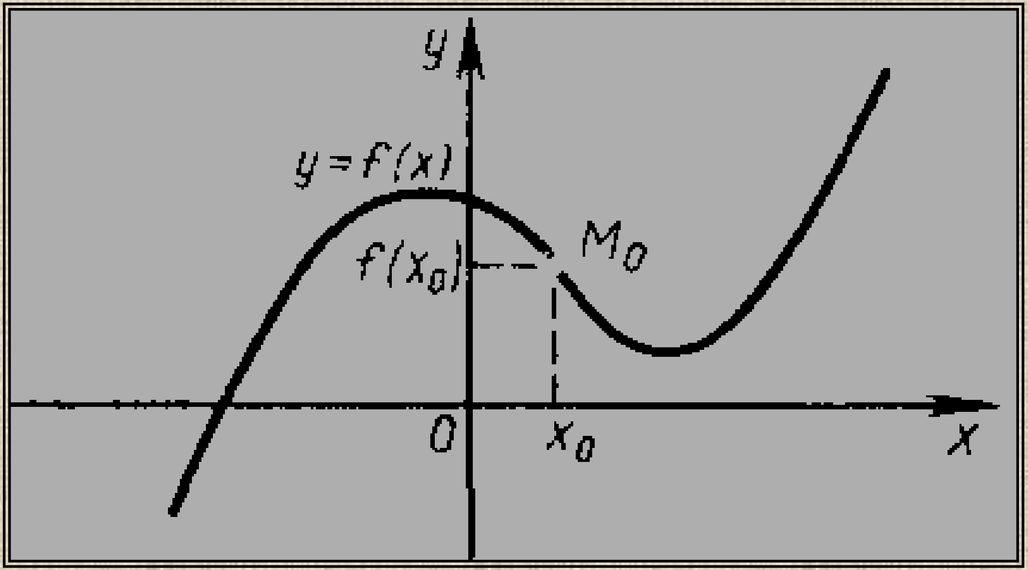
FUNKSIYA MONOTONLIGINI ANIQLASHDA HOSILANING TADBIG'I. FUNKSIYA EKSTRIUMNI ANIQLASHDA HOSILANING TADBIGI



1-teorema.

- **Faraz qilaylik *f(x)* funksiya (*a;b*) intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu funksiya (*a;b*) intervalda kamaymaydigan (o‘smaydigan) bo‘lishi uchun $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) tengsizlikning o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli.**

2-teorema.

- Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi va $\forall x \in (a;b)$ uchun $f'(x)>0$ ($f(x)<0$) bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qat’iy o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi.

- ***1-misol***. Ushbu $f(x)=2x^2-\ln x$ funksiyaning monotonlik intervallarini toping.
- ***Yechish***. Funksiya $(0;+\infty)$ intervalda aniqlangan. Uning hosilasi $f'(x)=4x-1/x$ ga teng. Yuqoridagi yetarli shartga ko‘ra, agar $4x-1/x>0$ bo‘lsa, ya’ni $x>1/2$ bo‘lsa, o‘suvchi; agar $4x-1/x<0$ bo‘lsa, ya’ni $x<1/2$ bo‘lsa funksiya kamayuvchi bo‘ladi. Shunday qilib, funksiya $(0;1/2)$ intervalda kamayuvchi, $(1/2;+\infty)$ intervalda o‘suvchi bo‘ladi.

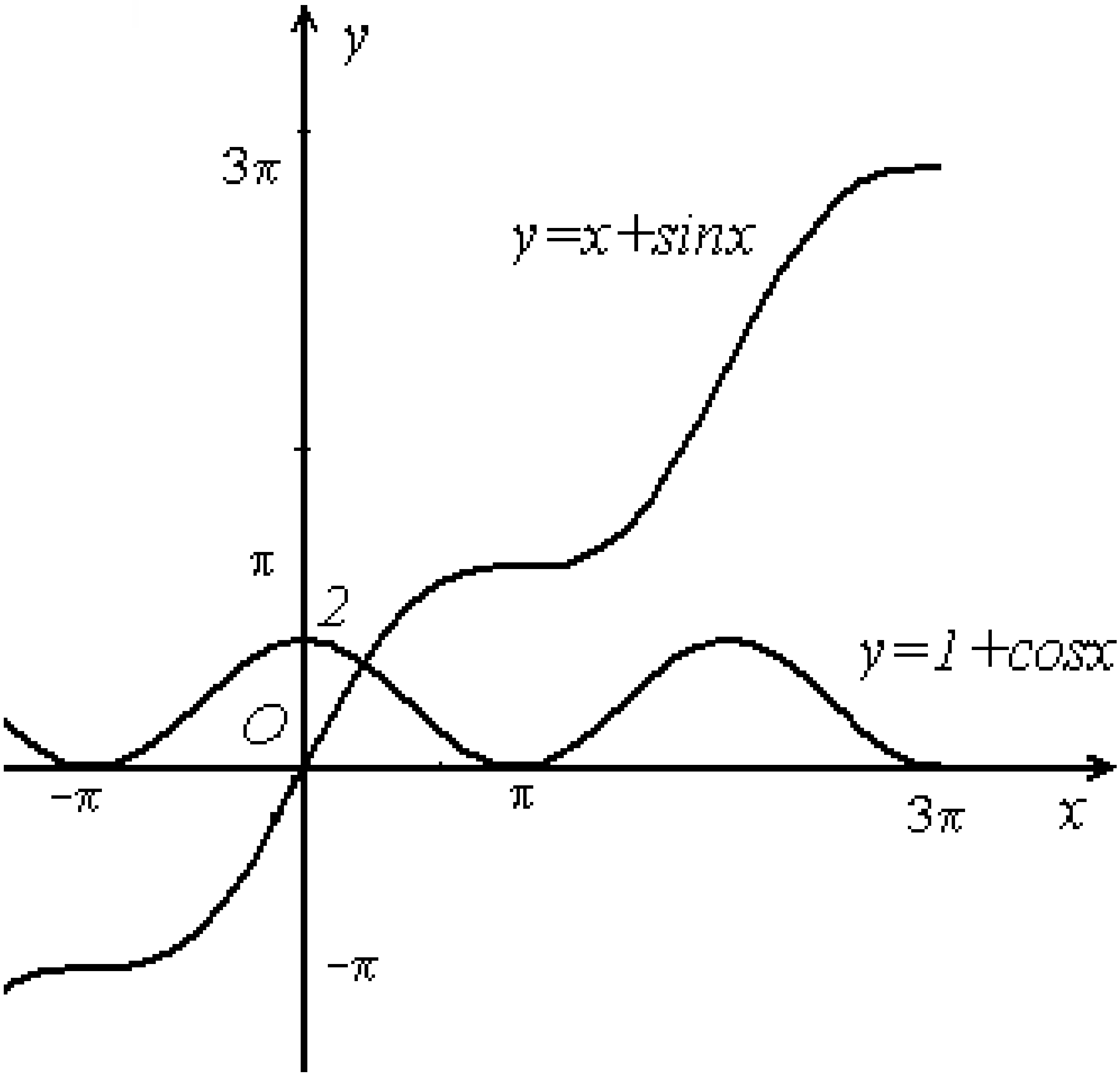
2-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+14x-6}{2x^2}$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ dan iborat. Funksiyaning hosilasini topamiz:

$f'(x)=\dfrac{x^3-7x+6}{x^3}=\dfrac{(x+3)(x-1)(x-2)}{x^3}$, bundan

$(-\infty;-3]\cup(0;1]\cup[2;\infty)$ to'plamda $f'(x)\geq 0$, $[-3;0)\cup[1;2]$ da esa $f'(x)\leq 0$ bo'lishini aniqlash qiyin emas.

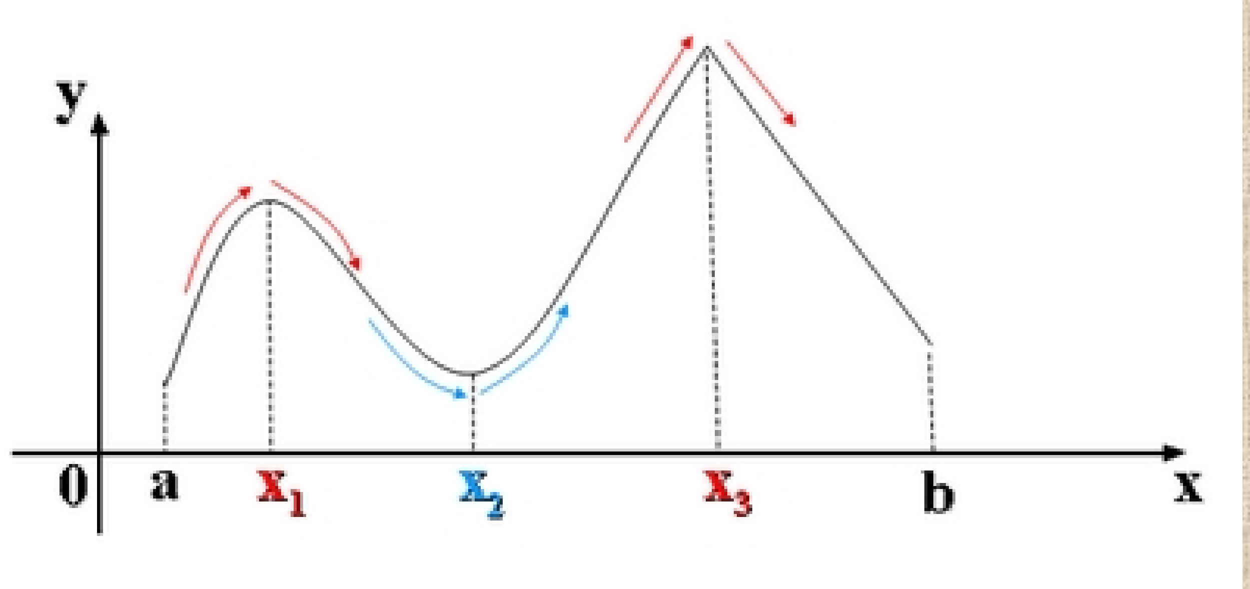
Demak, berilgan *f(x)* funksiya $[-\infty;-3]$, $(0;1]$ va $[2;\infty)$ oraliqlarning har birida o'suvchi; $[-3;0)$ va $(1;2]$ oraliqlarning har birida kamayuvchi bo'ladi.


y
3π
y=x+sinx
π
2
y=1+cosx
O
−π
π
3π
x
−π

Funksiyaning maksimumi va minimumi

1-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ atrofi mavjud boʻlib, shu atrofdan olingan ixtiyoriy x uchun $f(x)\leq f(x_0)$ ($f(x)\geq f(x_0)$) tengsizlik oʻrinli boʻlsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *maksimum* (*minimum*) *nuqtasi*, $f(x_0)$ esa *funksiyaning maksimumi* (*minimumi*) deb ataladi.

2-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday atrofi $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ mavjud boʻlib, shu atrofdan olingan ixtiyoriy $x\neq x_0$ uchun $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) tengsizlik oʻrinli boʻlsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat'iy maksimumga (minimumga) ega deyiladi.



3-ta'rif. Funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar yoki hosila mavjud bo'lmaydigan nuqtalar funksiyaning *kritik nuqtalari* deb ataladi. Funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtalar *statsionar nuqtalar* deb ataladi.

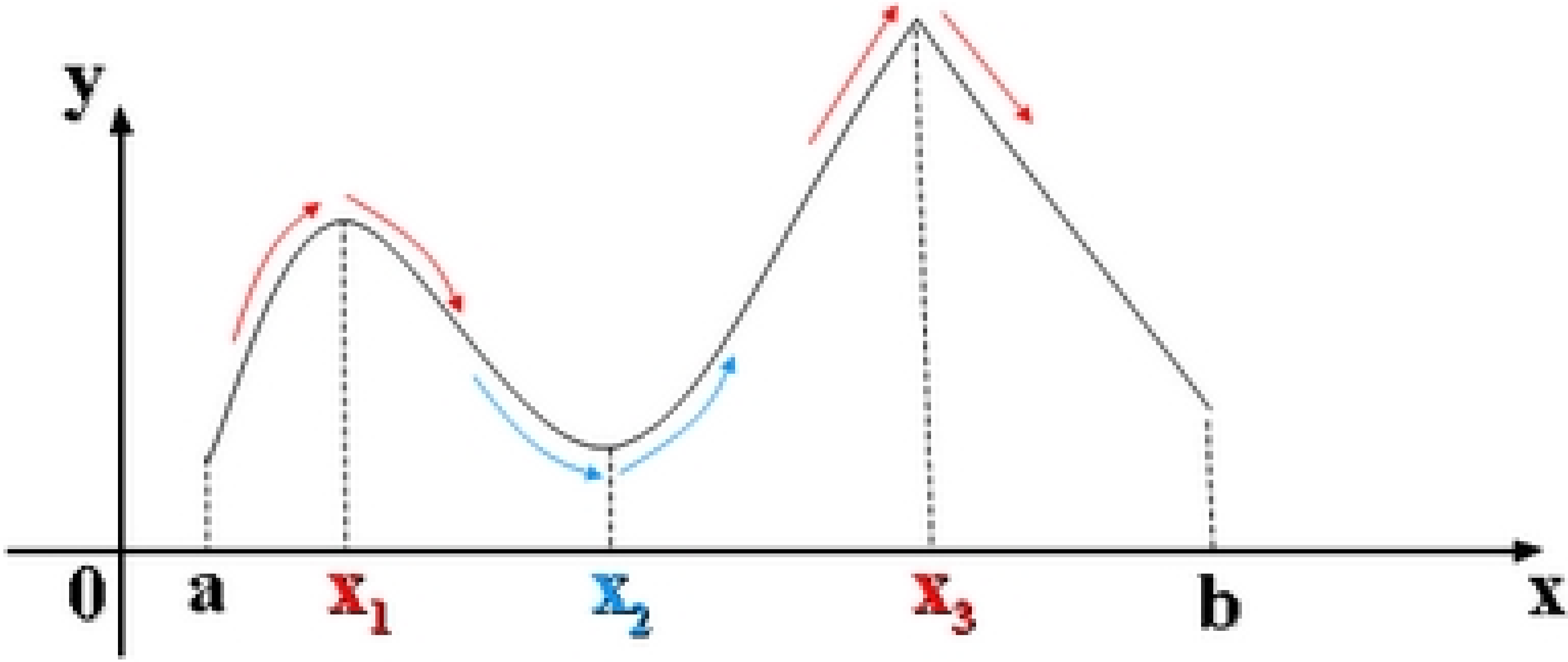
Har qanday kritik nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lavermaydi.

Masalan, $f(x)=(x-1)^3$, $f'(x)=3(x-1)^2$, $f'(1)=0$ bo'lib, $x_0=1$ kritik nuqta. Lekin $x_0=1$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida $f(1)=0$ eng kichik, yoki eng katta qiymat bo'la olmaydi. Chunki har bir atrofda noldan kichik va noldan katta qiymatlar istalgancha bor.

Demak, $x=1$ nuqtada ekstremum yo'q.

Misol. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada cheksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda bu nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'la olmasligini ko'rsating.

Yechish. Faraz qilaylik $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ bo'lsin. U holda $\forall\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ son topilib, $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ dan olingan ixtiyoriy $x\neq x_0$ lar uchun $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\dfrac{1}{\varepsilon}$ tengsizlik bajariladi. Bundan esa $x>x_0$ da $f(x)>f(x_0)$,



Chizmada y = f(x) funksiya (a;b) oraliqning x_3 nuqtada maksimumga, x_2 nuqtada minimumga erishmoqda

Yuqori tartibli hosilalar yordamida funksiyani ekstremumga tekshirish Ikkinchi tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshirish.

3-teorema. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega va $f'(x_0)=0$ bo‘lsin. U holda agar $f''(x_0)<0$ bo‘lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi, agar $f''(x_0)>0$ bo‘lsa, minimum nuqtasi bo‘ladi.

f(x) funksiya ekstremini topish algoritmi

1) $f'(x)=0$ tenglamaning barcha yechimlarini topamiz;
2) har bir statsionar nuqtada (ya'ni hosilani nolga aylantiradigan nuqtada) $f''(x_0)$ ni hisoblaymiz. Agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, x_0 maksimum nuqtasi, $f''(x_0)>0$ bo'lsa, x_0 minimum nuqtasi bo'ladi.
3) ekstremum nuqtalar qiymatini $y=f(x)$ qo'yib, $f(x)$ ning ekstremum qiymatlarini topamiz.
Umuman aytganda, bu qoidaning qo'llanish doirasi torroq masalan, u birinchi tartibli chekli hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarga qo'llanila olmasligi o'z-o'zidan ravshan. Ikkinchi tartibli hosila nolga aylangan yoki mavjud bo'lmagan nuqtada ham qoida aniq natija bermaydi.

misol. Ikkinchi tartibli hosila yordamida $y=2\sin x+\cos 2x$ funksiya ekstremumlarini aniqlang.

Yechish. Funksiya davriy bo‘lganligi sababli $[0;2\pi]$ kesma bilan cheklanishimiz mumkin

Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x(1-2\sin x)$; $y''=-2\sin x-4\cos 2x.$

Ushbu $2\cos x(1-2\sin x)=0$ tenglamadan funksiyaning $[0;2\pi]$ kesmaga tegishli bo‘lgan kritik nuqtalarini topamiz: $x_1=\pi/6$; $x_2=\pi/2$; $x_3=5\pi/6$; $x_4=3\pi/2$. Endi har bir kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila ishorasini aniqlaymiz va tegishli xulosa chiqaramiz:

$y''(\pi/6)=-3<0$, demak $x_1=\pi/6$ nuqtada $y(\pi/6)=3/2$ maksimum mavjud.

$y''(\pi/2)=2>0$, demak $x_2=\pi/2$ nuqtada $y(\pi/2)=1$ minimum mavjud.

$y''(5\pi/6)=-3<0$, demak $x_3=5\pi/6$ nuqtada $y(5\pi/6)=3/2$ maksimum mavjud.

$y''(3\pi/2)=6>0$, demak $x_4=3\pi/2$ nuqtada $y(3\pi/2)=-3$ minimum mavjud.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyaning ekstremumi nima?
2. Funksiyaning ekstremum nuqtasi va ekstremum qiymati deganda nimani tushunasiz?
3. Ekstremumning zaruriy sharti nimadan iborat?
4. Ekstremumning yetarli sharti haqidagi teoremani ayting.
5. Birinchi tartibli hosila yordamida ekstremum qanday izlanadi?
6. Ikkinchi tartibli hosila yordamida ekstremum qanday izlanadi?
7. Yuqori tartibli hosila yordamida ekstremum qanday izlanadi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi funksiyalarni ekstremumga tekshiring.

a) $y=x^3-6x+4$; b) $y=(x-1)^2(x-2)^3$; c) $y=x/(x^2+1)$; d) $y=\sin 2x-x$;

e) $y=x^2e^{-x}$; f) $y=\ln(x^2+2x-3)$.

2. Berilgan funksiyaning ko‘rsatilgan kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

a) $y=x^3/(x^2-2x-1)$, [4;6]; b) $y=\ln x/x$, [1;4];

c) $y=e^{-x}x^3$, [-1;4]; d) $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$, $[-1;3]$.

3. $f(x)=x\ln x-x\ln 5$ funksiyaning (1;5] oraliqdagi eng kichik qiymatini toping.

4. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3}$ funksiyaning (-∞;+∞) oraliqdagi eng katta qiymatini toping.

5. $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+1}$ funksiyaning [-5;0) oraliqdagi eng katta qiymatini toping.

6. Berilgan aylanaga ichki chizilgan teng yonli uchburchaklar ichida teng tomonli uchburchak eng katta perimetriga ega ekanligini ko‘rsating.

7. $M(1,2)$ nuqta berilgan. Bu nuqtadan shunday to‘g‘ri chiziq o‘tkazingki, u birinchi kvadrantda a) eng kichik yuzli uchburchak; b) eng kichik uzunlikli kesma ajratsin.