Mavzu. Boshlang’ich funktsiya. Aniqmas integral va uning xossalari.

Reja.

1. Boshlang'ich funktsiya va aniqmas integral
2. Aniqmas integralning asosiy xossalari
3. Aniqmas integrallar jadvali.Misollar

Boshlang'ich funktsiya tushunchasi. Biror intervalda ikki f va F funktsiyalar berilgan bo'lib, ular

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

munosabat bilan bog'langan bo'lsin.

1-Ta'rif. Agar F funktsiya biror intervalda differentsiallanuvchi bo'lib, (1) tenglik bajarilsa, F funktsiya shu intervalda f funktsiya uchun ***boshlang'ich funktsiya*** deyiladi.

1-misol. Ma'lumki, $(sinx)' = cosx$.
Demak,

$$f(x) = cosx$$

funktsiyaning boshlang'ch funktsiyasi

$$F(x) = sinx$$

bo'ladi.

Agar $F(x)$ funktsiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funktsiya bo'lsa , istalgan C o'zgarmasni olsak, $F(x) + C$ funktsiya ham, albatta, yana boshlang'ich funktsiya bo'ladi.

Berilgan f funktsiya uchun boshlang'ich funktsiya topish jarayoni f funktsiyani ***integrallash*** deyiladi. Masalan, $cosx$ funktsiyaning integrallash natijasi $sinx$ funktsiyadir.

2-Ta'rif. Agar $F(x)$ funktsiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funktsiya bo'lsa $F(x) + C$ funktsiya $f(x)$ funktsiyaning aniqmas integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\int f(x)dx.$$

Shunday qilib, $\int f(x)dx = F(x) + C$

Bu yerda C ixtiyoriy o'zgarmas son.

Masalan,

$$\int cosxdx = sinx + C.$$

Aniqmas integralning xossalari

$$1. \left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2. d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

$$3. \int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$$

$\varphi(x)$ funktsiya $\varphi'(x)$. uchun boshlang’ich funktsiya.

4. Agar $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funktsiyalar boshlang'ich funktsiyaga ega bo'lsa u holda $f_1(x)+f_2(x)$ funktsiya ham boshlang'ich funktsiyaga ega bo'ladi:

$$\int (f_1(x)+f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

5. $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$

6. $\int f'(x)dx = f(x)+C$

7. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)]+C$

Aniqmas integrallar jadvali

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

17. $\int shx dx = chx + C$.

18. $\int chx dx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Differentsiallar xossalari

Integrallashda quyidagi xossalardan foydalanish qulaydir:

$$1.\ dx = \frac{1}{a} d(ax)$$

$$2.\ dx = \frac{1}{a} d(ax + b),$$

$$3.\ xdx = \frac{1}{2} dx^2,$$

$$4.\ x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3.$$

Misollar. Integrallarni toping

1. $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right) dx =$

$= \int x^2 dx + \int 2x dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + \ln|x| + C$

2. $\int \frac{10x^8+2}{x^4} dx = \int \frac{10x^8}{x^4} dx + \int \frac{2}{x^4} dx =$

$= 10 \int x^4 dx + 2 \int x^{-4} dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3x^3} + C$

Методы интегрирования

Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\int udv = uv - \int vdu$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin xdx$, где $n = 1,2..k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1,2..k$;

в) $\int x^n arctgxdx$, где $n = 0,\pm 1,\pm 2,...\pm k.$;

г) $\int x^n \ln xdx$, где $n = 0,\pm 1,\pm 2,...\pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1}dx$, а, например $\sin xdx = dv$,тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) обозначают за u функцию $arctgx$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Примеры

Пример. Вычислить $\int x\cos xdx$.

Решение.

$$\int x\cos xdx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos xdx, v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C .$$

Примеры

Пример. Вычислить

$$\int x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x, du=\dfrac{dx}{x} \\ \\ dv = xdx, v=\dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C\,.$$

Метод замены переменной

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi_t' dt$, где $x = \varphi(t)$, а t - новая переменная

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$,

содержащий квадратный трехчлен в знаменателе подынтегрального выражения. Такой интеграл берут также методом подстановки, предварительно выделив в знаменателе полный квадрат.

Пример

Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение. Преобразуем x^2+4x+5,

выделяя полный квадрат по формуле $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тогда получаем :

$$x^2+4x+5 = x^2+2\cdot x\cdot 2+4-4+5 =$$

$$= \left(x^2+2\cdot 2\cdot x+4\right)+1 = (x+2)^2+1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \begin{vmatrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= arctgt + C = arctg(x+2) + C.$$

Пример

Найти $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t,\ x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{1+t}{1+t^2}2tdt =$

$$= 2\int \frac{tdt}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2t - 2arctgt + C =$$

$$= \ln(x+1) + 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C.$$