DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI.

Reja:

1. **Roll teoremasi**
2. **Lagranj teoremasi**
3. **Koshi teoremasi**

1. Roll teoremasi

Teorema (Roll teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan bo‘lib, quyidagi

1) $[a;b]$ da uzluksiz;

2) $(a;b)$ da differensiallanuvchi;

3) $f(a)= f(b)$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda $f'(c)=0$ bo‘ladigan kamida bitta c $(a<c<b)$ nuqta mavjud bo‘ladi.

Isbot. Ma’lumki, agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda funksiya shu kesmada o‘zining eng katta M va eng kichik m qiymatlariga erishadi. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya uchun ikki hol bo‘lishi mumkin.

1. $M=m$, bu holda $[a,b]$ kesmada $f(x)=sonst$ va $f'(x)=0$ bo‘ladi. Ravshanki, $f'(s)=0$ tenglamani qanoatlantiradigan nuqta sifatida $\forall c\in(a;b)$ ni olish mumkin.

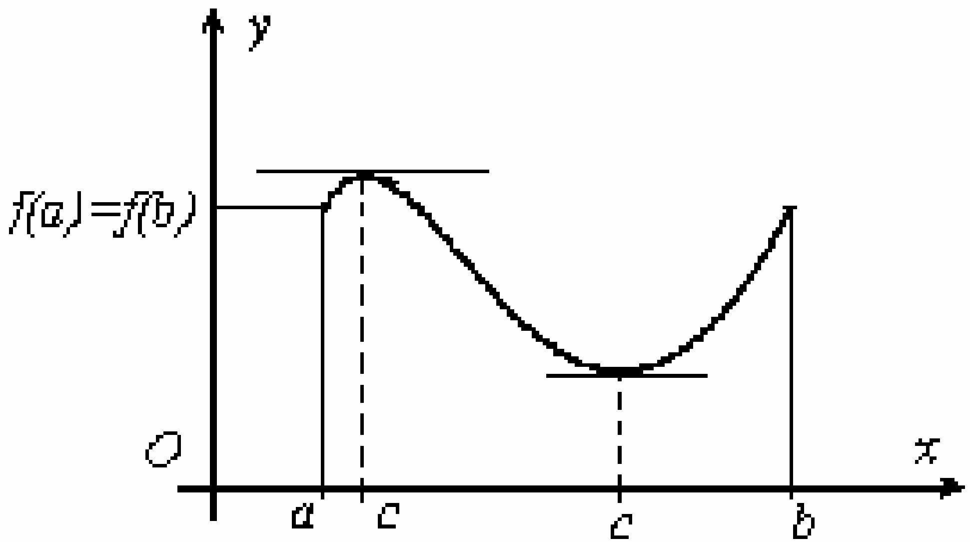
2. $M>m$, bu holda teoremaning $f(a)=f(b)$ shartidan funksiya M yoki m qiymatlaridan kamida birini $[a,b]$ kesmaning ichki nuqtasida qabul qilishi kelib chiqadi. Aniqlik uchun $f(c)=m$ bo‘lsin. Eng kichik qiymatning ta’rifiga ko‘ra $\forall x\in[a,b]$ uchun $f(x)\geq f(c)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Endi $f'(c)=0$ ekanligini ko‘rsatamiz. Teoremaning ikkinchi shartiga ko‘ra $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalning har bir x nuqtasida chekli hosilaga ega. Bu shart, xususan c nuqta uchun ham o‘rinli. Demak, Ferma teoremasi shartlari bajariladi. Bundan $f'(c)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

$f(c)=M$ bo‘lgan holda teorema yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Roll teoremasiga quyidagicha geometrik talqin berish mumkin.

Agar [*a,b*] kesmada uzluksiz, (*a,b*) intervalda differensiallanuvchi *f(x)* funksiya kesma uchlarida teng qiymatlar qabul qilsa, u holda *f(x)* funksiya grafigida abssissasi *x=c* bo‘lgan shunday *C* nuqta topiladiki, shu nuqtada funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma abssissalar o‘qiga parallel bo‘ladi.



Eslatma. Roll teoremasining shartlari yyetarli bo‘lib, zaruriy shart emas.

Masalan,

1) $f(x)=x^3$, $x\in[-1:1]$ funksiya uchun teoremaning 3-sharti bajarilmaydi.

($f(-1)=-1\neq 1=f(1)$), lekin $f'(0)=0$ bo‘ladi.

2) $$f(x)=\begin{cases} x, & agar\ \ 0\le x\le 1, \\ 0, & agar\ \ -1<x<0, \\ 2, & agar\ \ x-1 \end{cases}$$ funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari bajarilmaydi, lekin (-1;0) ning ixtiyoriy nuqtasida $f'(x)=0$ bo‘ladi.

2. Lagranj teoremasi

Teorema (Lagranj teoremasi)**.** Agar *f(x)* funksiya [*a*,*b*] kesmada uzluksiz va (*a*,*b*) da chekli *f'(x)* hosila mavjud bo‘lsa, u holda (*a*,*b*) da kamida bitta shunday *c* nuqta mavjud bo‘lib,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

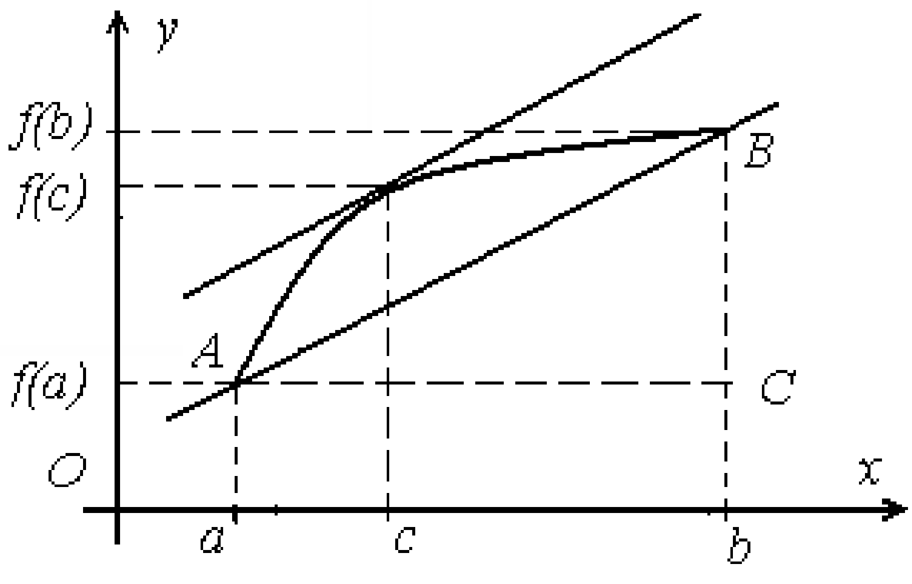
Isbot. Quyidagi yordamchi funksiyani tuzib olamiz:

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Bu *F(x)* funksiyani [*a*,*b*] kesmada uzluksiz va (*a*,*b*) da hosilaga ega bo‘lgan *f(x)* va *x* funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida qarash mumkin. Bundan *F(x)* funksiyaning [*a*,*b*] kesmada uzluksiz va (*a*,*b*) da hosilaga ega ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek

$$F(a)=F(b)=0,$$

demak *F(x)* funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi.



Demak, Roll teoremasiga ko‘ra (a,b) intervalda kamida bitta shunday s nuqta mavjud bo‘ladiki, $F'(c)=0$ bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$$

va bundan esa isbot qilinishi kerak bo‘lgan (1) formula kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

(1) formulani ba’zida Lagranj formulasi deb ham yuritiladi. Bu formula

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad (2)$$

ko‘rinishda ham yoziladi.

Endi Lagranj teoremasining geometrik ma’nosiga to‘xtalamiz. $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantirsin deylik. Funksiya grafigining $A(a;f(a))$, $B(b;f(b))$ nuqtalar orqali kesuvchi o‘tkazamiz, uning burchak koeffitsienti

$$tg\beta = \frac{BC}{AC} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

bo‘ladi.

Hosilaning geometrik ma’nosiga binoan $f'(c)$ - bu $f(x)$ funksiya grafigiga uning $(s;f(s))$ nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti: $tg\beta = f'(c)$ Demak, (1) formula (a,b) intervalda kamida bitta shunday *c* *nuqta mavjudligini ko‘rsatadiki,* $f(x)$ funksiya grafigiga $(c;f(c))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma *AB* *kesuvchiga paralell bo‘ladi*.

Isbot qilingan (1) formulani boshqacha ko‘rinishda ham yozish mumkin. Buning uchun $a<c<b$ tengsizliklarni e’tiborga olib, $\frac{c-a}{b-a}=\theta$ belgilash kiritamiz, u holda $c=a+(b-a)\theta$, $0<\theta<1$ bo‘lishi ravshan. Natijada (1) formula ushbu $f(b) - f(a) = f'(a+\theta(b-a))(b-a)$ ko‘rinishga keladi.

Agar (1) formulada $a=x_0$; $b=x_0+\Delta x$ almashtirishlar bajarsak, u

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x \qquad (3)$$

bu erda $x_0 < c < x_0+\Delta x$, ko‘rinishga keladi. Bu formula argument orttirmasi bilan funksiya orttirmasini bog‘laydi, shu sababli (3) formula chekli orttirmalar formulasi deb ataladi.

Agar (1) Lagranj formulasida $f(a)=f(b)$ deb olsak, Roll teoremasi kelib chiqadi, ya’ni Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holi ekan.

3. Koshi teoremasi

Teorema (Koshi teoremasi). Agar [*a*,*b*] kesmada *f(x)* va *g(x)* berilgan bo‘lib,

1) [*a*,*b*] da uzluksiz;

2) (*a*,*b*) intervalda *f’(x)* va *g‘(x)* mavjud, hamda $g'(x)\neq 0$ bo‘lsa, u holda hech bo‘lmaganda bitta shunday *c* ($a<c<b$) nuqta topilib,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (4)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Ravshanki, (4) tenglik ma’noga ega bo‘lishi uchun *g(b)≠g(a)* bo‘lishi kerak. *Bu esa teoremadagi g‘(x)≠*0, *x*∈(*a;b*) shartdan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar *g(a)=g(b)* bo‘lsa, u holda *g(x)* funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirib, biror *c∈(a;b)* nuqtada *g‘(c)=0* bo‘lar edi. *Bu esa* ∀*x∈(a;b)* da *g‘(x)≠0* shartga ziddir. Demak, *g(b)≠g(a)*.

Endi yordamchi

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left(g(x) - g(a)\right)$$

funksiyani tuzaylik.

Shartga ko‘ra *f(x)* va *g(x)* funksiyalar [*a*,*b*] da uzluksiz va (*a*,*b*) intervalda differensiyalanuvchi bo‘lgani uchun *F(x)* birinchidan [*a*,*b*] kesmada uzluksiz funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida uzluksiz, ikkinchidan (*a*,*b*) intervalda

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$$

hosilaga ega.

So‘ngra *F(x)* funksiyaning *x=a* va *x=b* nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: *F(a)=F(b)=*0. *Demak*, *F(x)* funksiya *[a*,*b*] kesmada Roll teoremasiinng barcha shartlarini qanoailantiradi. Shuning uchun hech bo‘lmaganda bitta shunday *c* (*a*<*c*<*b*) nuqta topiladiki, *F’(c)=*0 bo‘ladi.

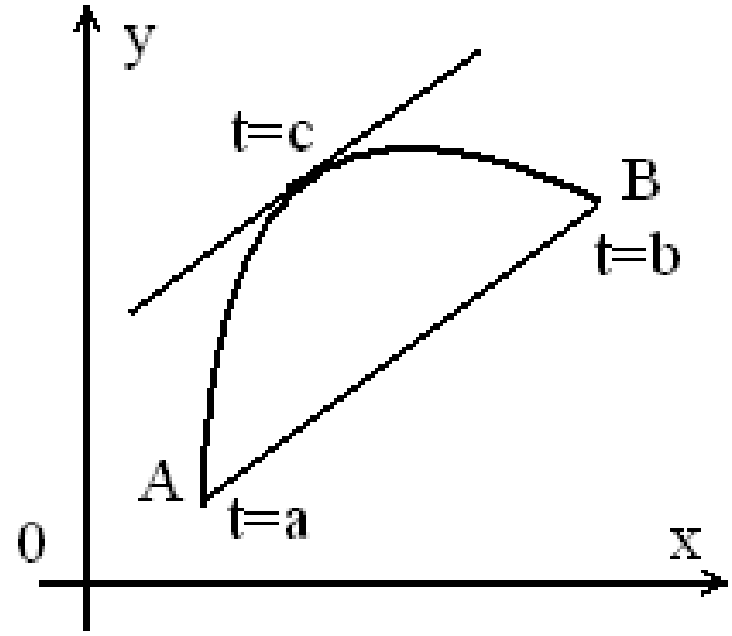
Shunday qilib,

$$0 = \Phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$$

va bundan (4) tenglikning o‘rinli ekani kelib chiqadi. Isbot tugadi.

Endi Koshi teoremasining geometrik ma'nosini aniqlaymiz. Aytaylik $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$, $a\le t\le b$ tekislikdagi chiziqning parametrik tenglamasi bo‘lsin. Shuningdek chiziqda $t=a$ ga mos keluvchi nuqtani $A(\varphi(a),f(a))$, $t=b$ ga mos keluvchi nuqtani $B(\varphi(b),f(b))$ kabi belgilaylik.

U holda (4) formulaning chap qismi AB vatarning burchak koeffitsientini, o‘ng tomoni esa egri chiziqqa parametrning $t=c$ qiymatiga mos keladigan nuqtasida *o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini anglatadi. Demak, Koshi formulasi AB yoyning AB vatarga parallel bo‘lgan urinmasining mavjudligini ta'kidlaydi ekan.*



Misol. Ushbu $f(x)=x^2$ va $\varphi(x)=\sqrt{x}$ funksiyalar uchun [0,4] kesmada Koshi formulasini yozing va s ni toping.

Yechish. berilgan funksiyalarning kesma uchlaridagi qiymatlari va hosilalarini topamiz: $f(0)=0$, $f(4)=16$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(4)=2$; $f'(x)=2x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Bulardan foydalanib Koshi formulasini yozamiz:

$\frac{16-0}{2-0}=\frac{2c}{\frac{1}{2\sqrt{c}}}$ bundan $4s\sqrt{c}=8$ yoki $s\sqrt{c}=2$. Demak $s=\sqrt[3]{4}$

Misollar.

1. Ushbu $f(x)=x^3+5x^2-6x$ funksiya [0;1] kesmada berilgan. Bu funksiyaga shu kesmada Roll teoremasini tatbiq qilib bo‘ladimi? Agar tatbiq qilish mumkin bo‘lsa, teoremadagi *s* nimaga teng?

2. Ushbu $f(x)=x^2-4x-5$ funksiya ildizlari orasida uning hosilasining ildizi mavjudligini isbotlang, uni toping. Bu natijaga geometrik talqin bering.

3. Ushbu $x^3+3x+5=0$ tenglamaning haqiqiy ildizi yagona ekanligini isbotlang.

4. Ushbu $f(x)=lnx$ funksiya [1;*e*] kesmada berilgan. Bu funksiyaga shu kesmada Lagranj teoremasini tatbiq qilib bo‘ladimi? Agar tatbiq qilish mumkin bo‘lsa, Lagranj formulasidagi *s* nimaga teng?

5. Berilgan $y=4-x^2$ egri chiziqning qaysi nuqtasida o‘tkazilgan urinmasi *A*(-2;0) va *B*(1;3) nuqtalardan o‘tadigan vatariga parallel bo‘ladi?

6. Nima uchun $y=x+|sinx|$ funksiyaga [-1;1] kesmada Lagranj teoremasini tatbiq qilib bo‘lmaydi? Chizmasini chizing.

7. Lagranj formulasidan foydalanib $x_2>x_1$ bo‘lganda $arxtgx_2-arctgx_1\leq x_2-x_1$ ekanligini isbotlang.

8. Agar $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2+1$ bo‘lsa, u holda bu funksiyalar uchun [1;2] kesmada Koshi formulasini yozish mumkinmi? Yozish mumkin bo‘lsa, *s* ni toping.