Определенный интеграл

<u>Опр.</u> Под определенным интегралом

$$\int_a^b f(x)dx$$

от данной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ понимается соответствующее приращение ее первообразной.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Опр. Данная формула называется формулой Ньютона-Лейгенца.

Для того, чтобы найти определенный интеграл, надо найти одну из первообразных функции $f(x)$, т.е. функцию $F(x)$ и найти разность

$F(b)-F(a)$.

Схематично правило выглядит так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

$f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

a - нижний предел интегрирования;

b - верхний предел интегрирования.

Теорема. Определенный интеграл не зависит от выбора первообразной для интегрирования функции.

Теорема. Для всякой, непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции, существует соответствующий определенный интеграл.

Доказательство основано на теореме Коши, т.е. существует определенный интеграл, значит, существует разность значений первообразной.

Свойства определенного интеграла

Пусть на отрезке $(a;b)$ существует определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x)$$

$$1. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

$$2. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Константу как множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

5. Определенный интеграл от суммы конечного числа непрерывных функций равен сумме определенных интегралов от этих функций.

6. Если подынтегральная функция $f(x)$ неотрицательна, то и определенный интеграл от нее неотрицателен.

7. Теорема о среднем

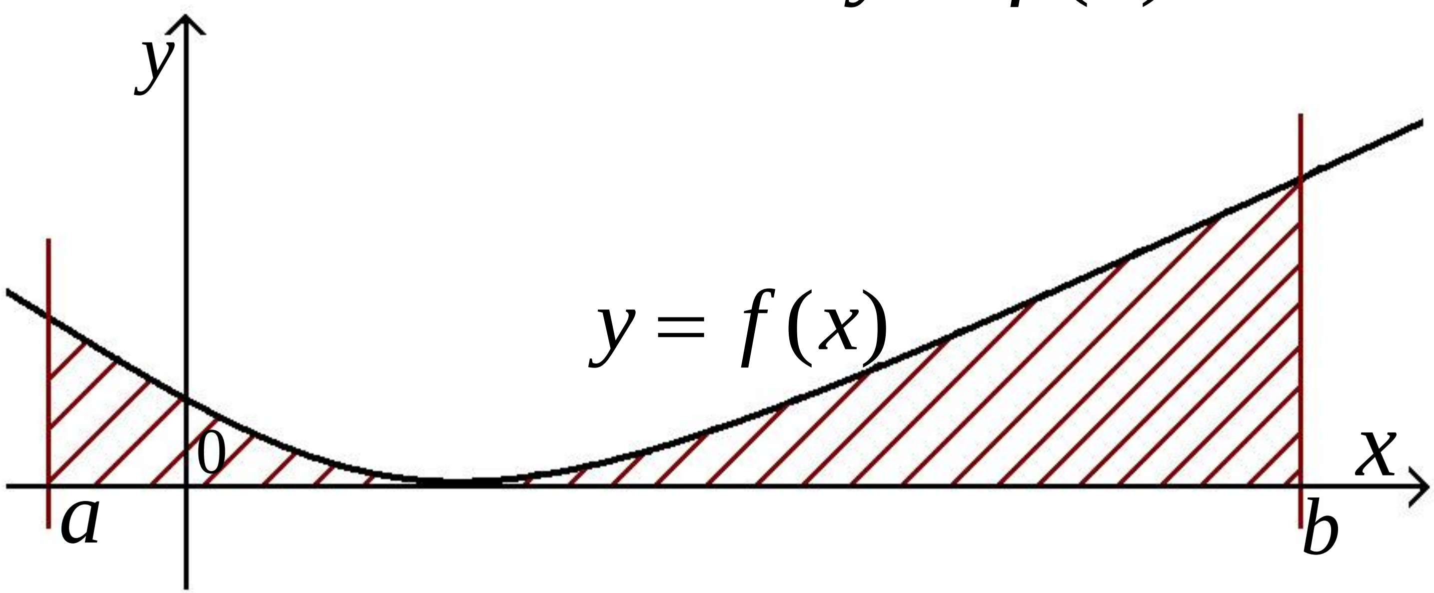
Если $f(x)$ - непрерывная функция, то определенный интеграл равен:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c),\ c \in (a;b)$$

8

Геометрический смысл определенного интеграла

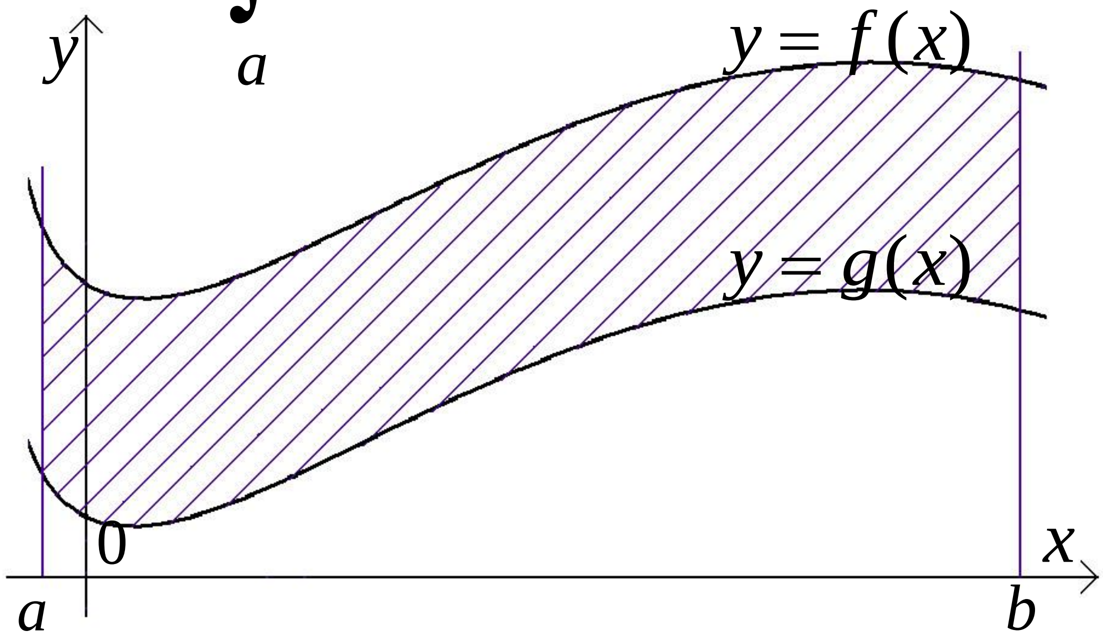
<u>Теорема.</u> Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной неотрицательной $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ численно равен площади прямолинейной трапеции, ограниченной осью *OX*, прямыми $x=a$, $x=b$ и графиком функции $y=f(x)$.



Следствие.

Если линейная трапеция ограничена графиком функции $y = f(x)$, $y = g(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$, $f(x) \geq g(x)$ для $x \in (a;b)$, площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Связь и отличие определенных и неопределенных интегралов

<u>Связь:</u>

Как в неопределенном, так и
в определенном интеграле
нужно находить
первообразную для функции $f(x)$.

Отличие:

Неопределенный интеграл – общее выражение для всех первообразных, определенный интеграл – это число.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x),$$

$$x \in (\alpha;\beta).$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если $u = u(x), v = v(x)$ на отрезке $(a;b)$ - непрерывные дифференцируемые функции, то на этом отрезке справедлива формула:

$$\int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Замена переменной в определенном интеграле

<u>Теорема.</u> Дано: $\int\limits_a^b f(x)dx, \quad f(x) \in (a;b).$

Введем новую переменную,

связанную с x формулой $x = \varphi(t)$,

$\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $(\alpha;\beta)$,

при этом $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b,$

тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \cdot dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| =$$

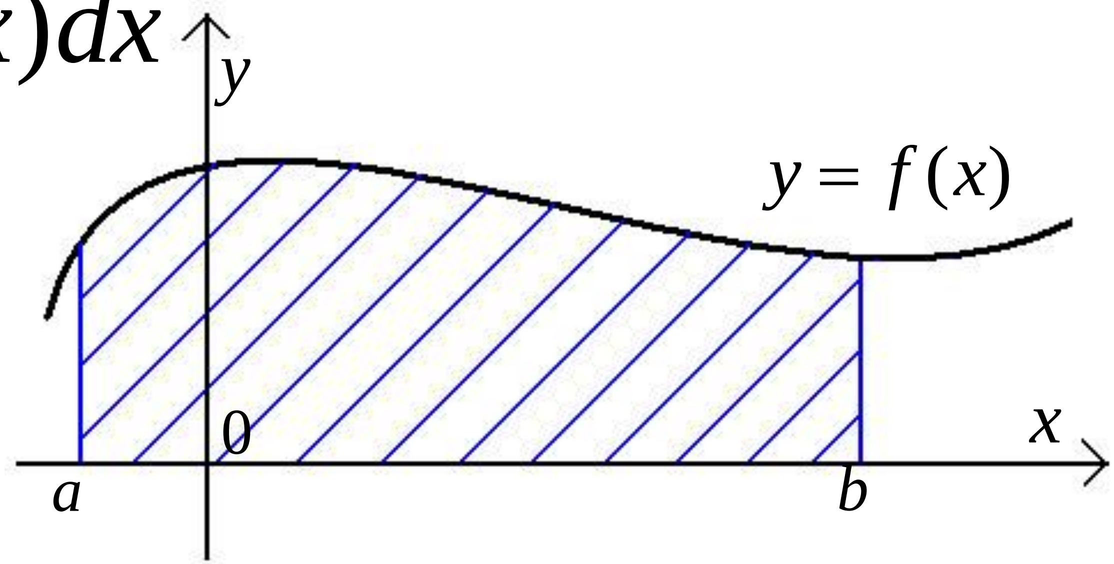
$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

Приложение определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

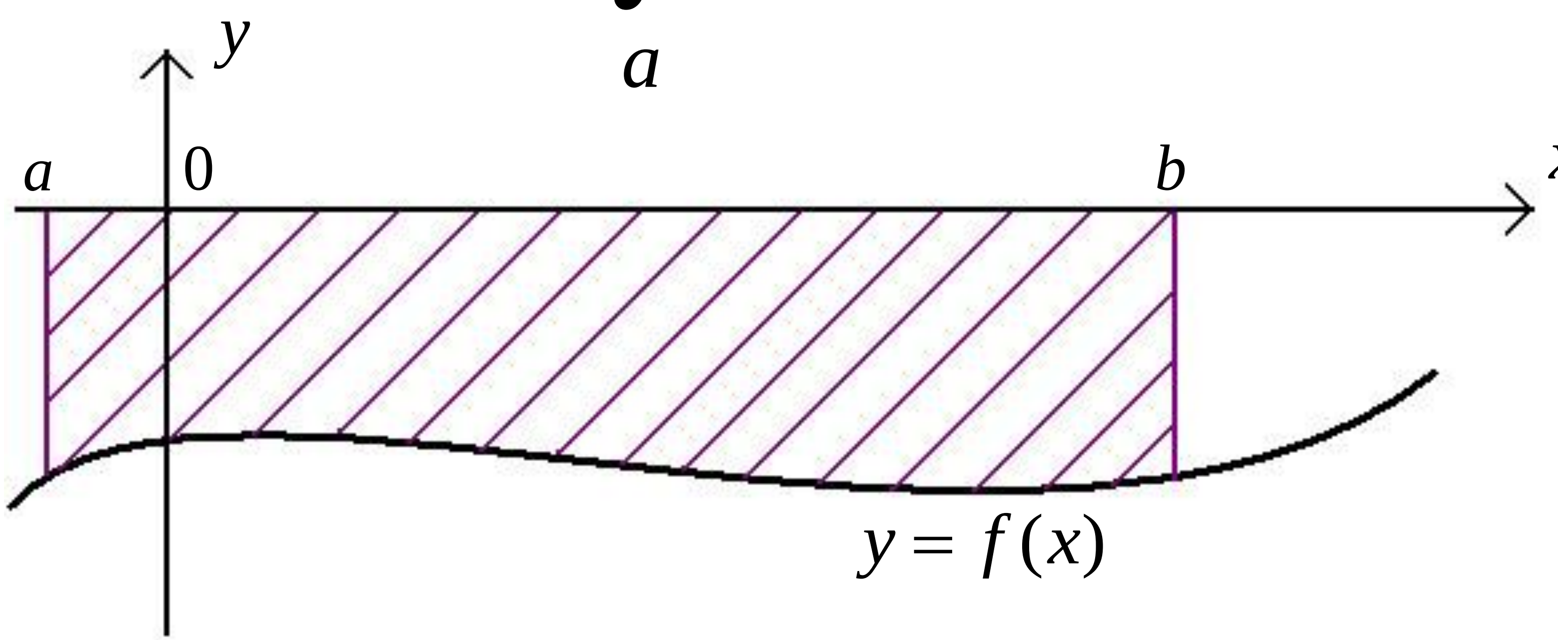
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$, непрерывна), прямыми $x = a,\ x = b$ и осью Ox, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b y dy = \int_a^b f(x) dx$$



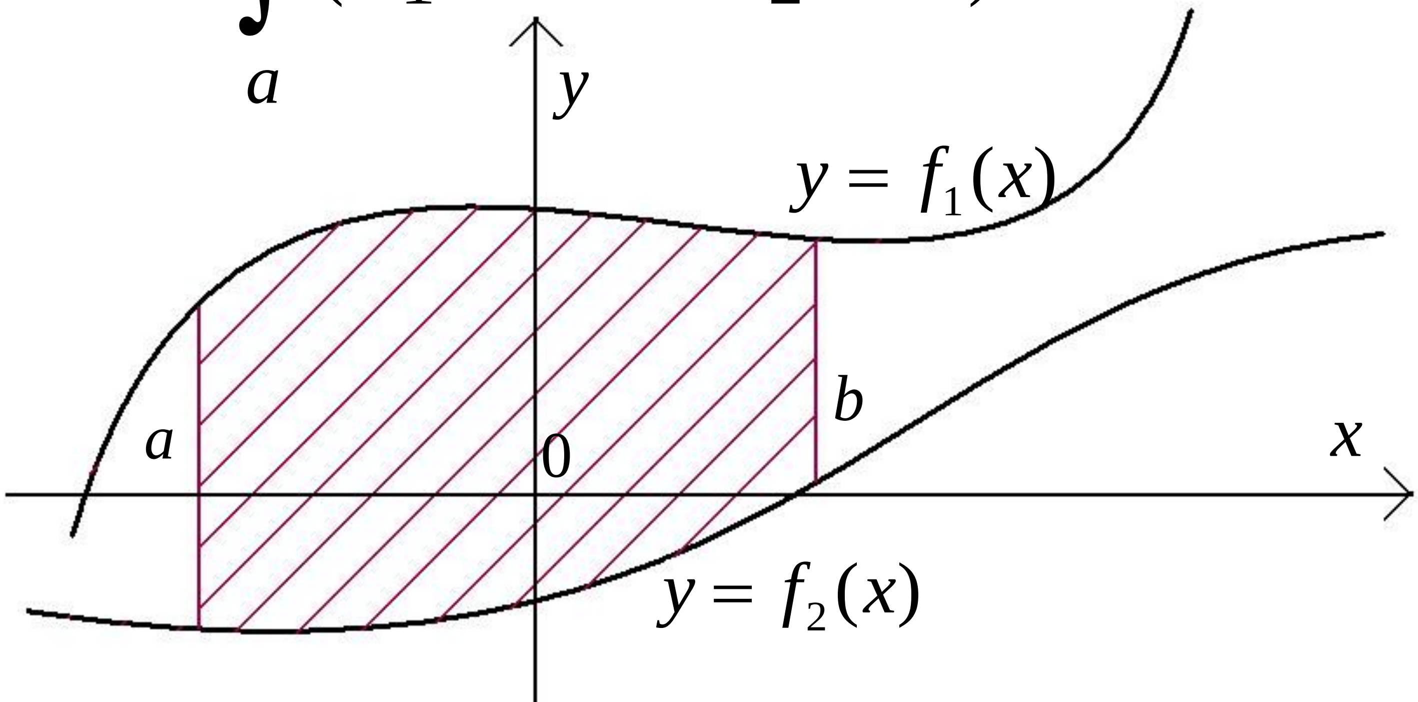
Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$, непрерывна), прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox равна

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

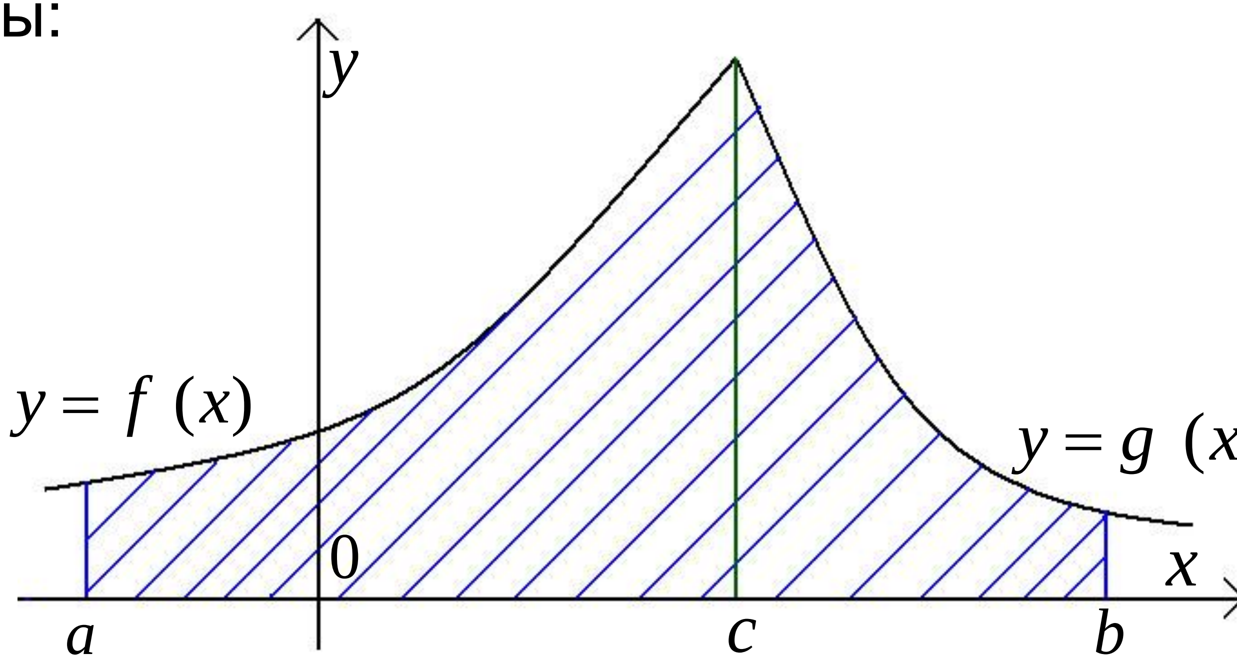


Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $\left(f_1(x) \geq f_2(x)\right)$ и двумя прямыми $x = a, x = b$ находится по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx$$



Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то прямыми, параллельными оси Oy, её следует разбить на части так, чтобы можно было бы применить уже известные формулы:



Здесь непрерывные и неотрицательные функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ пересекаются в точке с абсциссой $x = c$.

$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

Вычисление длины дуги

Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y = f(x)$, то

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

где a, b - абсциссы начала и конца дуги $(a < b)$.

Если кривая задана уравнением $x = g\ (y)$, то

$$l = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\, dy,$$

где $c,\ d$ - ординаты начала и конца дуги $\left(c < d\right)$.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),$ то длина дуги выражается формулой

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2 + \left(y_t^{'}\right)^2}\, dt$$

где $t_1,\ t_2$ - значения параметра, соответствующие концам дуги $\left(t_1 < t_2\right)$.

Вычисление объема тела вращения плоской фигуры

Если тело образуется при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, то любое его плоское сечение, перпендикулярное к оси Oy, будет круг, радиус которого равен соответствующей ординате кривой $y = f(x)$. Объем тела вращения определяется формулой:

$$V_{ox} = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x)dx \quad \left(x_1 < x_2\right)$$

Если тело образуется при вращении криволинейной трапеции, принадлежащей к оси Oy, то объем тела вращения определяется формулой:

$$V_{oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2(y)dy \quad (y_1 < y_2)$$