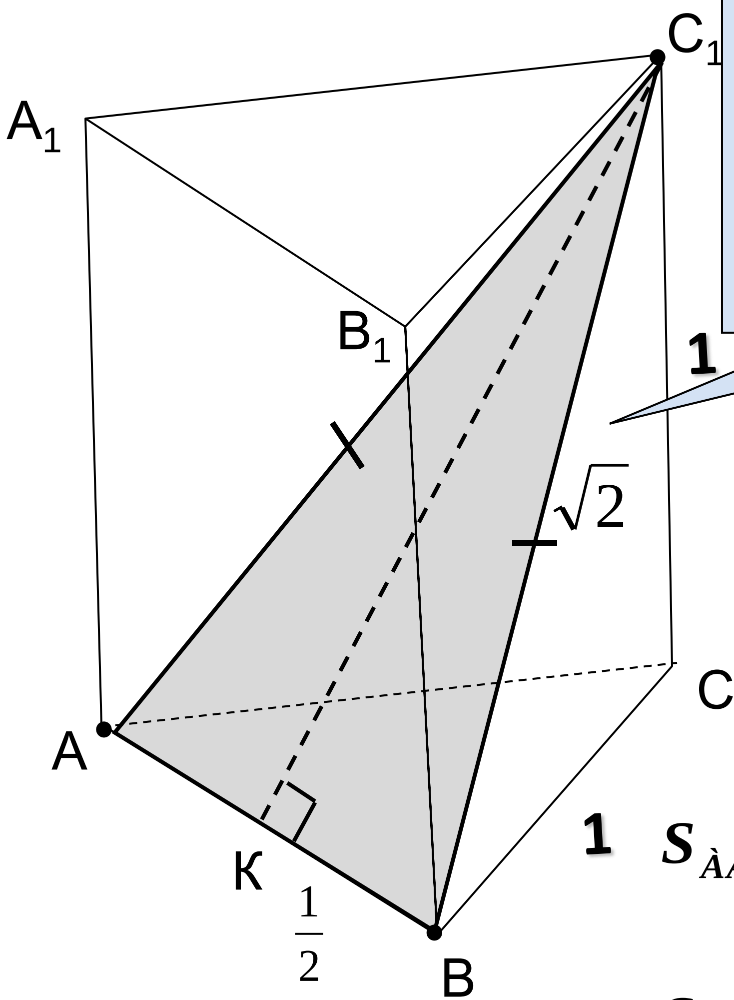
Задачи на нахождение площади сечения многогранника

Найти площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины A, B и C_1.



AC = CB; CC_1 - общая
Δ ACC_1 = Δ BCC_1 (по двум катетам)
Значит $AC_1 = BC_1$
Δ ABC_1 - равнобедренный

ения, проходящее

с $\Delta\, \hat{A}\hat{E}\tilde{N}_1$:

$$\tilde{N}_1^{\,2} = \hat{A}\tilde{N}_1^{\,2} - \hat{A}\hat{E}^{\,2};$$

$$B\tilde{N}_1^{\,2} = B\tilde{N}^2 + \tilde{N}\tilde{N}_1^{\,2};$$

$$B\tilde{N}_1^{\,2} = 1^2 + 1^2;$$

$$B\tilde{N}_1^{\,2} = 2;$$

$$B\tilde{N}_1 = \sqrt{2}.$$

$$\hat{E}\tilde{N}_1^{\,2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\hat{E}\tilde{N}_1^{\,2} = 1\frac{3}{4};$$

$$\hat{E}\tilde{N}_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$S_{\grave{A}\hat{A}\tilde{N}_1} = \frac{1}{2}\grave{A}\hat{A} \cdot \hat{E}\tilde{N}_1$$

$$S_{\grave{A}\hat{A}\tilde{N}_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

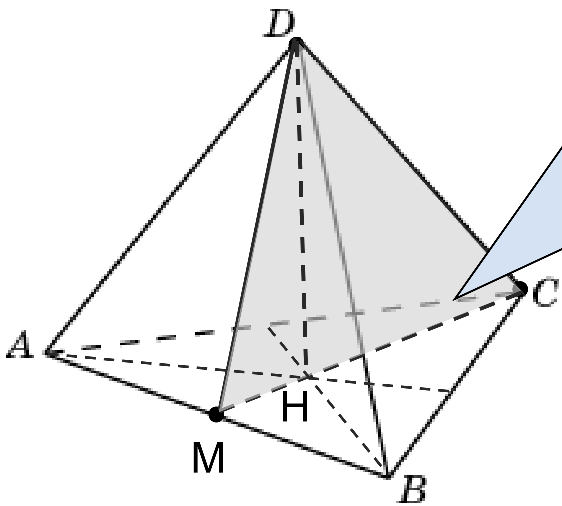
ABCD – правильная тр… торой равны 1. Найти площа… , проходящей через точ… оны AB.

Построим плоск… С и М.

Н – точка пересечения медиан.
Применим свойство медиан: медианы треугольника пересекаются в отношении 2 к 1, считая от вершины
CH : HM = 2 : 1.
Вся медиана СМ – это 3 части.

$CH = \frac{2}{3}CM$ (2 части)

$HM = \frac{1}{3}CM$ (1 часть)



$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$DH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2;$

$DÍ^2 = \frac{2}{3};$

$DÍ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

$S_{DÑÌ} = \frac{1}{2} ÑM \cdot DH$

$S_{DÑÌ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Найти площадь сечения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину A и середины ребер BB_1 и DD_1.

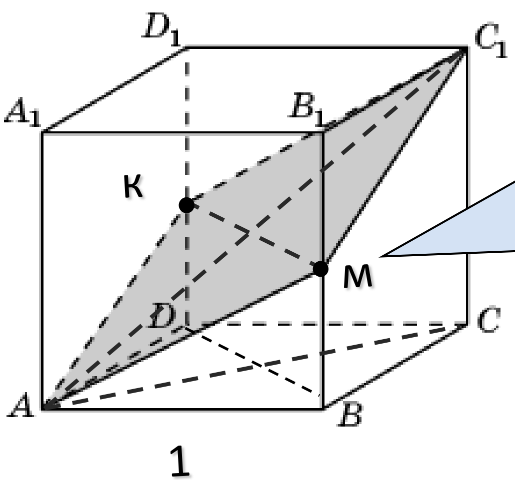
Построим плоскость сече … К и М.

AKC_1M – *параллелограмм*

$$\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp CC_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (ACC_1) \Rightarrow BD \perp AC_1$$

$$KM \| BD \Rightarrow KM \perp AC_1$$

$$\textit{Çíà÷èò} \quad \textit{ÀÊÑ}_1\textit{Ì} \;\; – \textit{ðîìá}$$



$$\textit{ÊÌ}$$

$$2$$

$$\textit{ÀÑ}_1{}^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2;$$

$$\textit{ÀÑ}_1{}^2 = 5;$$

$$\textit{ÀÑ}_1 = \sqrt{5}.$$

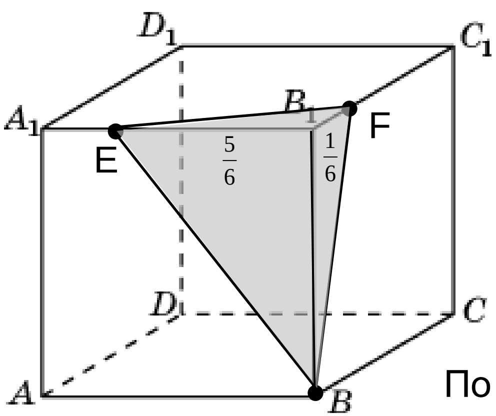
$$S_{\textit{ÀÊÑ}_1\textit{Ì}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ответ. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Найти площадь сечения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину B и точки E и F на ребрах A_1B_1 и B_1C_1 соответственно, если $B_1E = 5A_1E$ и $C_1F = 5B_1F$.

Построим плоскость сечения, проходящее через вершины *B*, *E* и *F*.

Δ BEF - произвольный



$$\text{Èç } \Delta \hat{A}_1EF: EF^2 = EB_1^2 + B_1F^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{26}{36} \quad EF = \frac{\sqrt{26}}{6}$$

$$\text{Èç } \Delta B\hat{A}_1F: BF^2 = BB_1^2 + B_1F^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{37}{36} \quad BF = \frac{\sqrt{37}}{6}$$

$$\text{Èç } \Delta B\hat{A}_1E: BE^2 = BB_1^2 + B_1E^2 = 1^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{61}{36} \quad BE = \frac{\sqrt{61}}{6}$$

По теореме косинусов: $BE^2 = BF^2 + EF^2 - 2BF \cdot FE \cdot \cos BFE$

$$\cos BFE = \frac{BF^2 + EF^2 - BE^2}{2BF \cdot EF} = \frac{1}{\sqrt{962}}$$

$$\sin BFE = \sqrt{1 - \cos^2 BFE} = \sqrt{1 - \frac{1}{962}} = \frac{31}{\sqrt{962}}$$

$$S_{BEF} = \frac{1}{2} BF \cdot EF \cdot \sin BEF$$

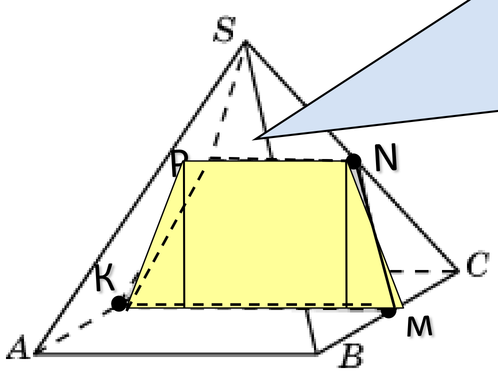
$$S_{BEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{37}}{6} \cdot \frac{\sqrt{26}}{6} \cdot \frac{31}{\sqrt{962}} = \frac{31}{72}$$

Ответ. $\dfrac{31}{72}$

Найти площадь сечения пирамиды *SABCD*, все ребра которой равны 1, проходящее через середины ребер *AD*, *BC* и *SC*.

Построим плоскость сече

КМ



$KM \,||\, CD \Rightarrow KM \,||\, (SCD) \Rightarrow KM \,||\, PN$

$\left.\begin{array}{l} PN \,||\, CD \\ CN = NS \end{array}\right\} \Rightarrow PN -$ ñðåäíÿÿ ëèíèÿ $\Delta SCD \Rightarrow$

$\Rightarrow DP = PS$

$\Delta KDP = \Delta MCN$ (ïî äâóì ñòîðîíàì è óãëó ìåæäó íèìè) $\Rightarrow KP = MN$

KPSM – *равнобедренная трапеция*

P N

$\frac{1}{2}$

К $\frac{1}{4}$ Н М

$ÐÍ^2 = \frac{3}{16};$

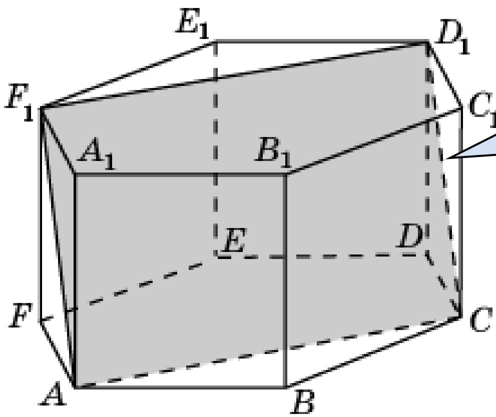
$ÐÍ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

$S_{KPNM} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

Найти площадь сечения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины A, C и D_1.

Построим плоскость сечения, проходящее через точки A, C и D_1.



$\text{ÀÑ}D_1F_1 - \text{ïàðàëëåëîãðàìì}$

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp AF \\ AC \perp AA_1 \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (AA_1F) \Rightarrow AC \perp AF$$

$\text{Çíà÷èò} \quad \text{ÀÑ}D_1F_1 - \text{ïðÿìîóãîëüíèê}$

$\text{À}F_1^2 = 1^2 + 1^2,$

$\text{À}F_1^2 = 2;$

$\text{À}F_1 = \sqrt{2}.$

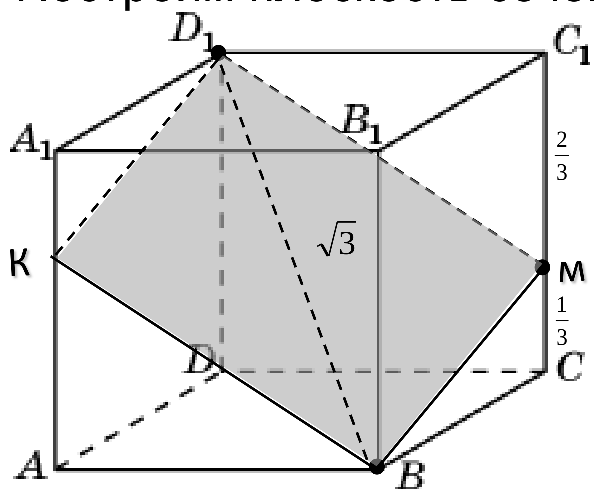
$$S_{\text{ÀÑ}D_1F_1} = \text{ÀÑ} \cdot AF_1$$

$$S_{\text{ÀÑ}D_1F_1} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

Ответ. $\sqrt{6}$

Найти площадь сечения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1 и D и точку M на ребре CC_1, если $C_1M = 2CM$.

Построим плоскость сечения, проходящее через вершины B, D_1 и M.



Сечением является параллелограмм BMD_1K.

$$\text{Èç } \Delta \hat{A}MC : \hat{A}\grave{I}^2 = B\tilde{N}^2 + MC^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9} \qquad BM = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{Èç } \Delta MC_1D_1 : \grave{I}D_1^2 = C_1D_1^2 + M\tilde{N}_1^2 = 1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9} \qquad MD_1 = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

По теореме косинусов: $BD_1^2 = BM^2 + MD_1^2 - 2BM \cdot MD_1 \cdot \cos BMD_1$

$$\cos BMD_1 = -\frac{2}{\sqrt{130}}$$

$$\sin BMD_1 = \sqrt{1 - \cos^2 BMD_1} = \sqrt{1 - \frac{4}{130}} = \sqrt{\frac{63}{65}}$$

$$S_{BMD_1K} = BM \cdot MD_1 \cdot \sin BMD_1$$

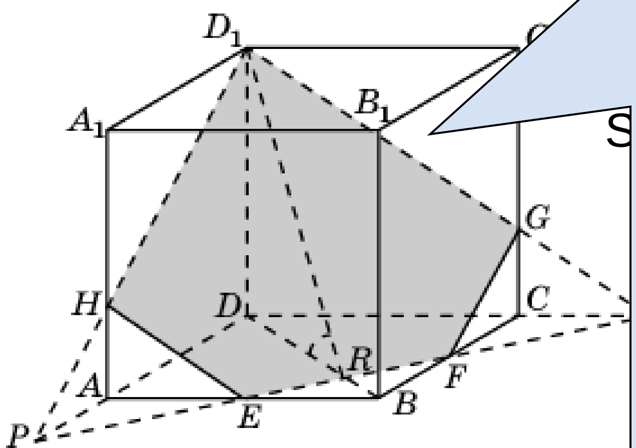
$$S_{BMD_1K} = \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \sqrt{\frac{63}{65}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

Ответ. $\frac{\sqrt{14}}{3}$

Найти площадь сечения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину D_1 и середины ребер AB, BC.

Построим плоскость сече

Сечением является пятиу



S

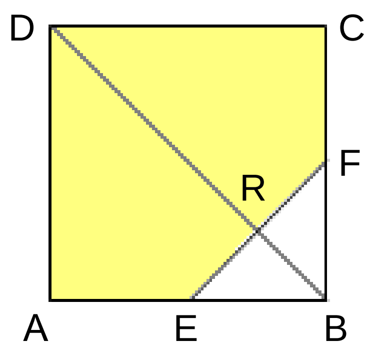
Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника:

Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

$$S_{ïð} = S_{ñå÷} \cdot \cos\alpha$$

ãäåα – óãîë ìåæäó ïëîñêîñòüþ ñå÷åíèÿ è ïëîñêîñòüþ åãî ïðîåêöèè

$RD_1 = \left(\quad 4 \quad \right) + 1;$



$$RD_1^2 = \frac{34}{16};$$

$$RD_1 = \frac{\sqrt{34}}{4}.$$

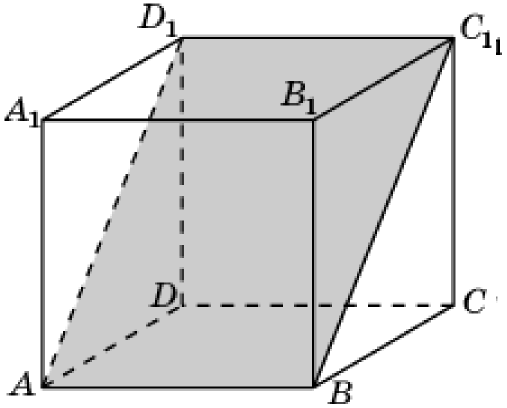
По теореме о площади ортогональной проекции многоугольника

$$S_{EFGD_1H} = \frac{S_{ADCFE}}{COS\angle DRD_1} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$$

Ответ. $\dfrac{7\sqrt{17}}{24}$

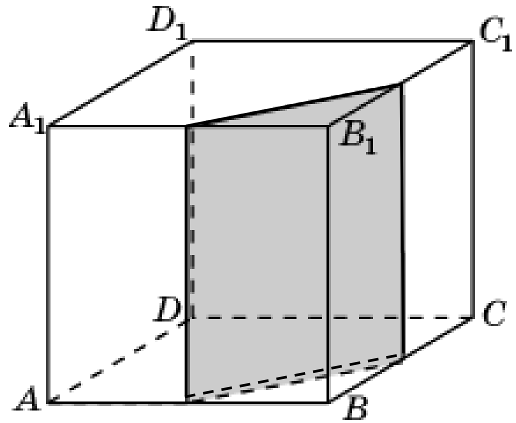
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найдите площадь сечения единичного куба *$ABCDA_1B_1C_1D_1$*, проходящее через вершины *A*, *B*, *C_1*.



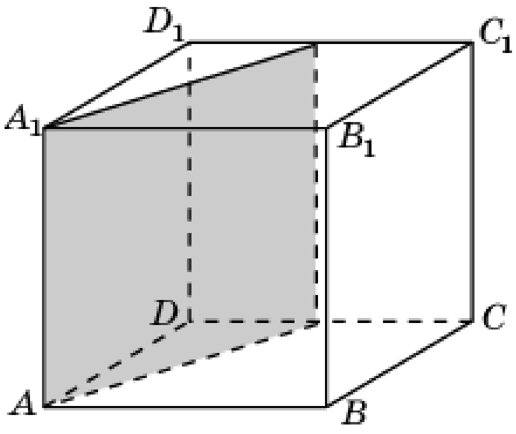
Ответ. $\sqrt{2}$

Найдите площадь сечения единичного куба *$ABCDA_1B_1C_1D_1$*, проходящее через середины ребер *AB*, *BC*, *A_1B_1*.



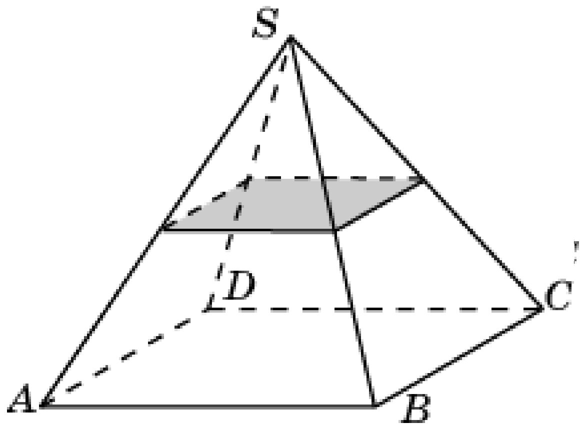
Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Найдите площадь сечения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину A и середины ребер CD, C_1D_1.



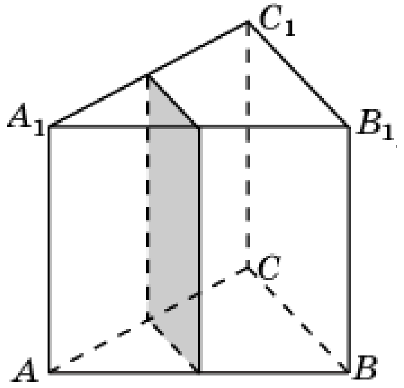
Ответ. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Найдите площадь сечения пирамиды *SABCD*, все ребра которой равны 1, проходящее через середины ребер *SA*, *SB* и *SC*.



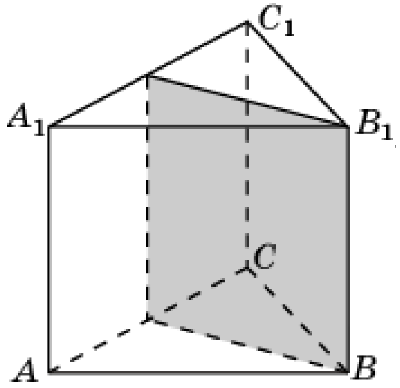
Ответ. 0,25.

Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через середины ребер AA_1, BB_1, CC_1.



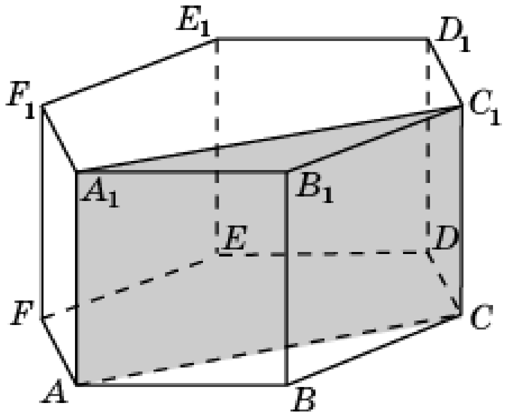
Ответ. 0,5.

Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины B, B_1 и середину ребра AC.



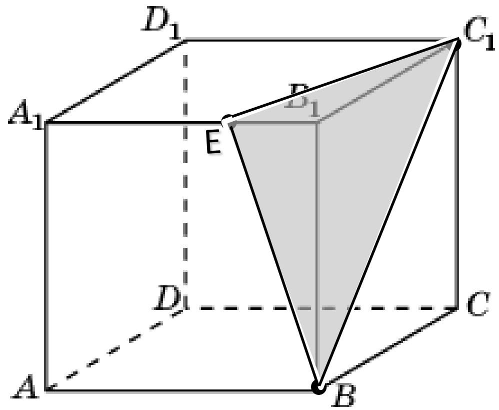
Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдите площадь сечения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины A, C и C_1.



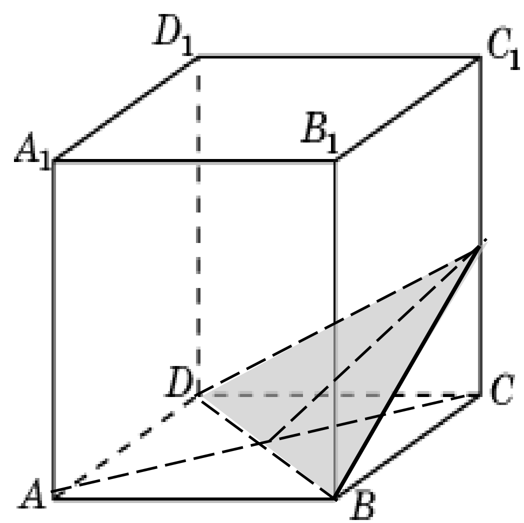
Ответ. $\sqrt{3}$

1. Найти площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 плоскостью, проходящей через вершины C_1 и B и точку E на ребре A_1B_1, если $B_1E = 0{,}4\ A_1E$.



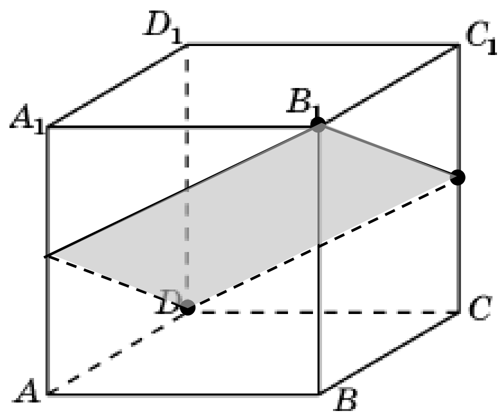
Ответ. $\dfrac{6\sqrt{11}}{7}$

В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 4 см. Через диагональ основания под углом 45 к плоскости основания проведена плоскость, пресекающая боковое ребро. Найти площадь сечения.



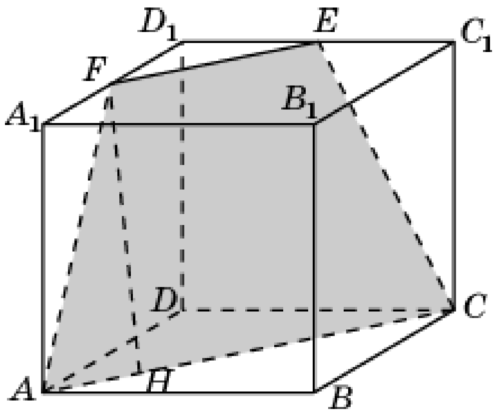
Ответ. $8\sqrt{2}$

Найти площадь сечения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1 и D и середину ребра CC_1.



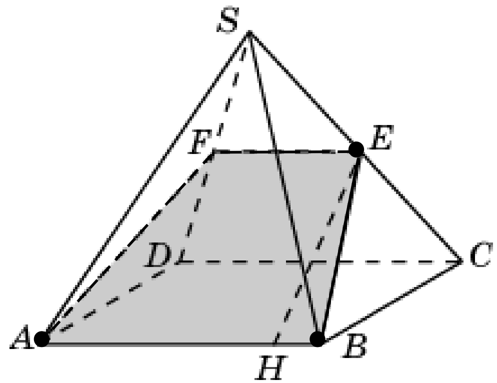
Ответ. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Найдите площадь сечения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершины A, C и середину ребра C_1D_1.



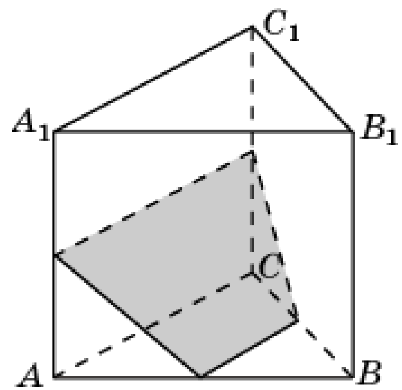
Ответ: $1\frac{1}{8}$

Найдите площадь сечения пирамиды *SABCD*, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины *A*, *B* и середину ребра *SC*.



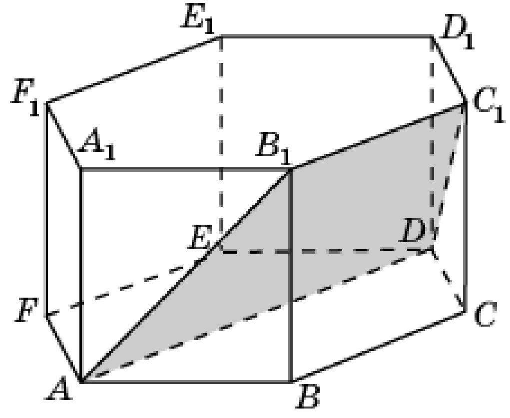
Ответ: $\dfrac{3\sqrt{11}}{16}$

Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через середины ребер AB, BC и CC_1.



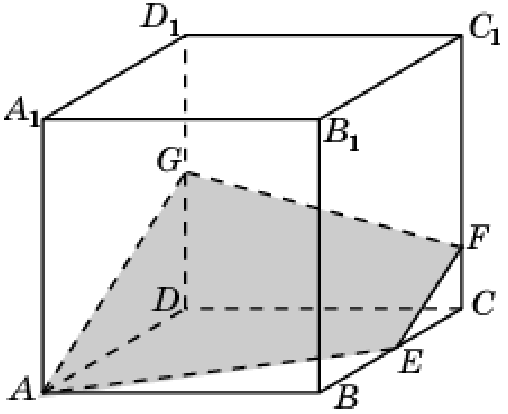
Ответ: $\dfrac{3\sqrt{7}}{16}$

Найдите площадь сечения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины A, D и C_1.



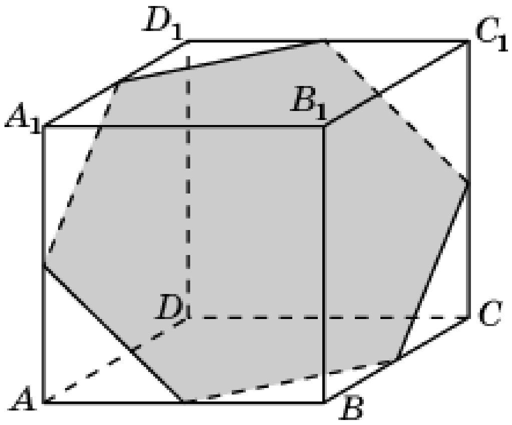
Ответ: $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$

Найдите площадь сечения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину A и середины ребер BC, DD_1.



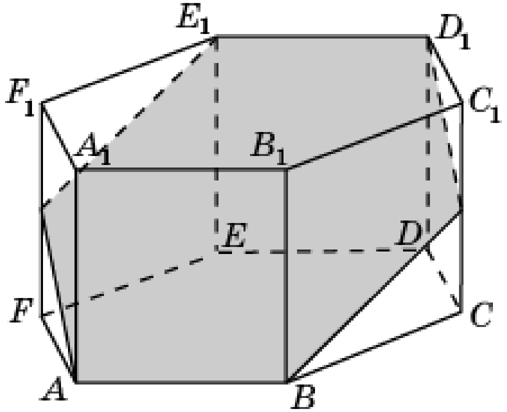
Ответ: $\dfrac{3\sqrt{21}}{16}$

Найдите площадь сечения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер AB, BC, CC_1.



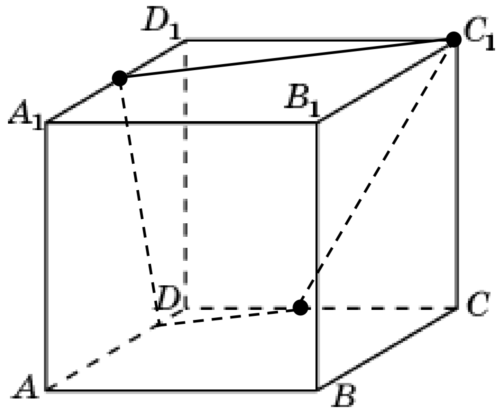
Ответ. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

Найдите площадь сечения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины A, B и D_1.



Ответ: 3

Найти площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 плоскостью, проходящей через вершину C_1 и середины ребер A_1D_1 и CD.



Ответ. $\dfrac{3\sqrt{21}}{4}$