



Метод координат в пространстве

Разложение вектора по трём некопланарным векторам

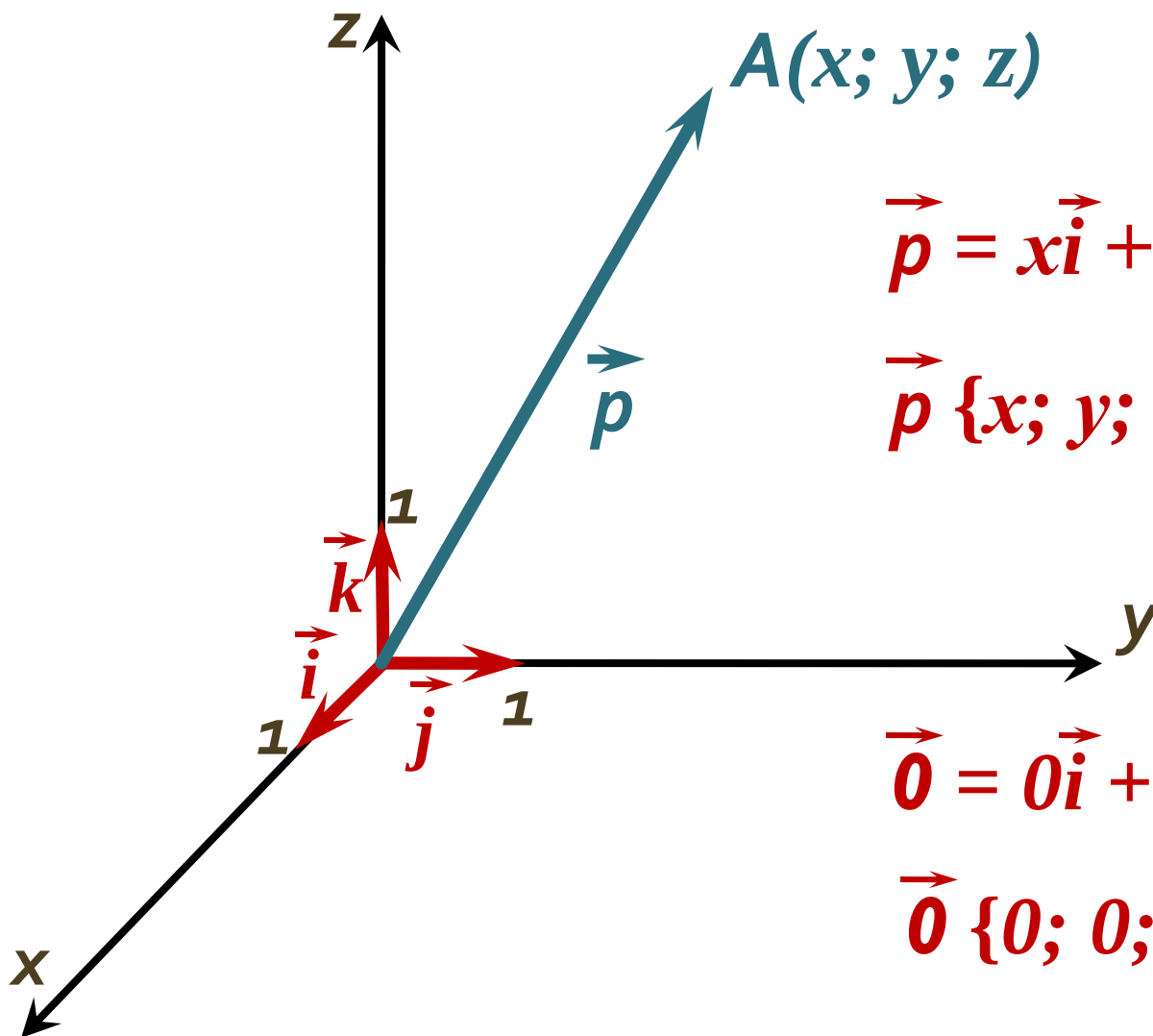
Любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причем коэффициенты разложения x , y , z определяются единственным образом.

Коэффициенты x , y , z в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются **координатами вектора $\vec{a}$** в данной системе координат.

Координаты вектора



$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{p} \{x; y; z\}$$

$$\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{0} \{0; 0; 0\}$$

Действия над векторами

$$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$$

1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

$$\vec{a} + \vec{b} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$$

2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

$$\vec{a} - \vec{b} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$$

Действия над векторами

$$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$$

3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

$$k\vec{a} \{ kx_1; ky_1; kz_1 \}$$

Примеры

Дано: $\vec{a} \{3; -7; 2\}$ $\vec{b} \{-5; 4; 1\}$

Найти: $\vec{p} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ $\vec{q} = -5\vec{a} + 6\vec{b}$

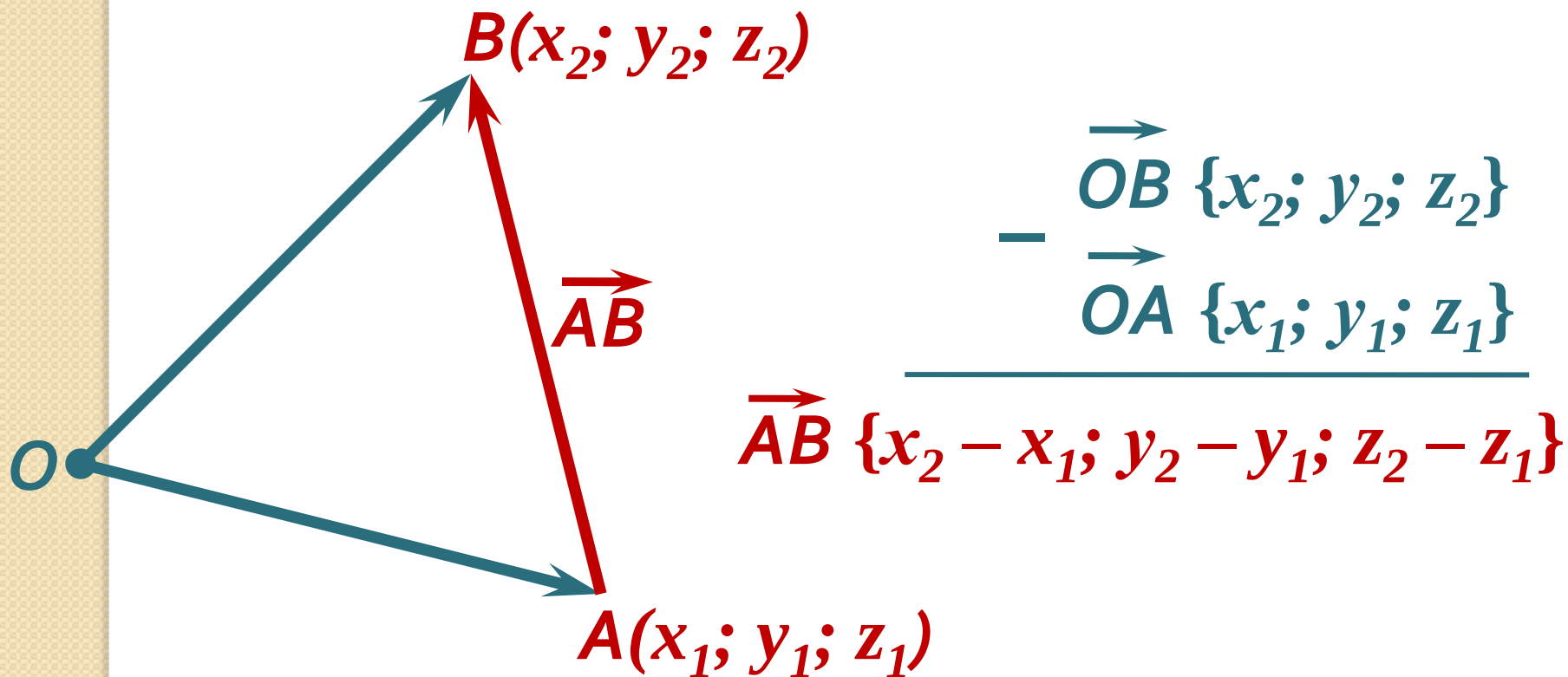
Решение:

$$\begin{array}{r} \vec{3a} \{9; -21; 6\} \\ + \vec{-2b} \{10; -8; -2\} \\ \hline \vec{p} \{19; -29; 4\} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \vec{-5a} \{-15; 35; -10\} \\ + \vec{6b} \{-30; 24; 6\} \\ \hline \vec{q} \{-45; 59; -4\} \end{array}$$

Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$



Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

Примеры

$$A(5; 3; -4), B(-2; 4; 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \{-2 - 5; 4 - 3; 1 - (-4)\}$$

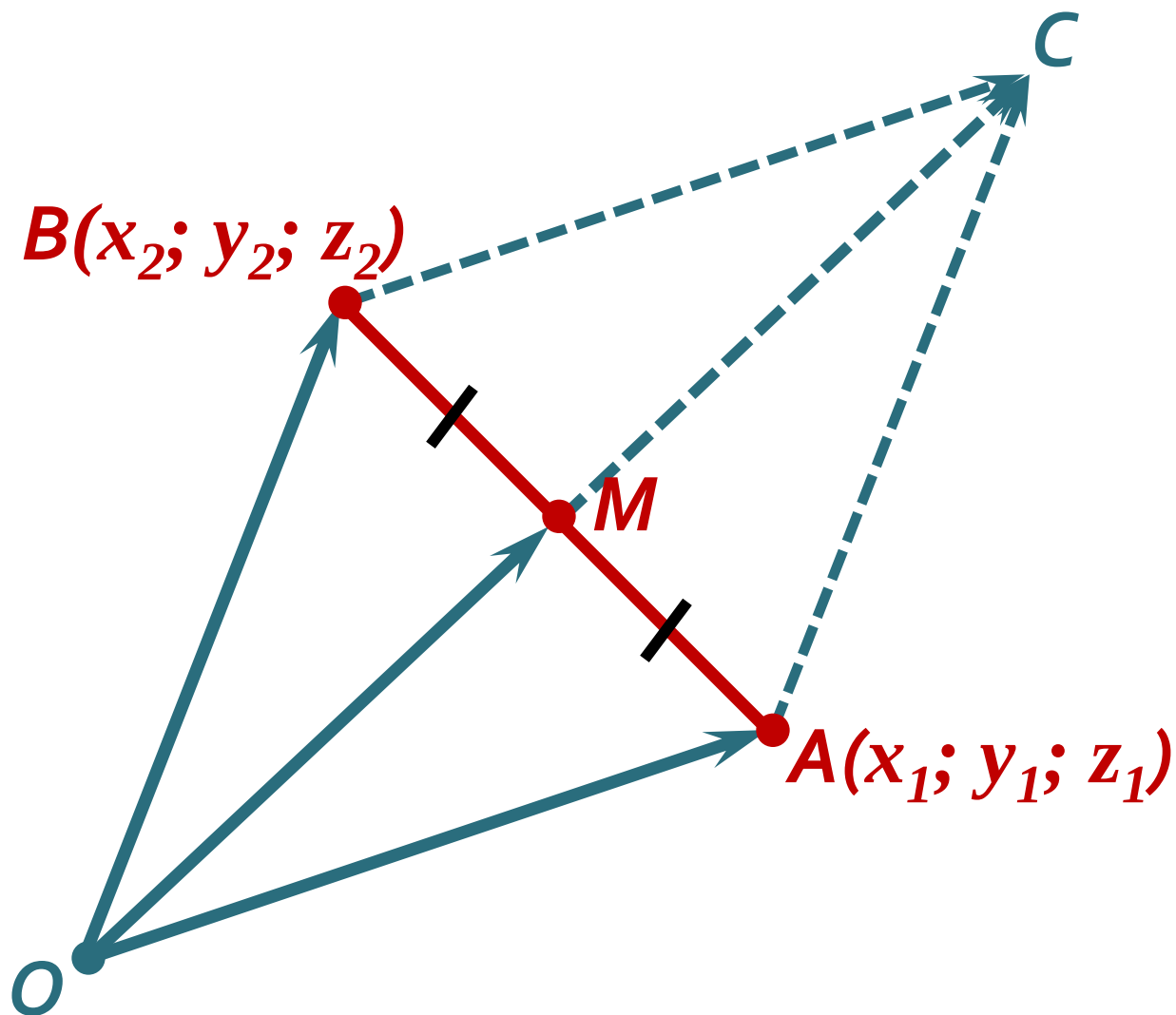
$$\overrightarrow{AB} \{-7; 1; 5\}$$

$$M(-3; 8; 2), N(0; -6; 5)$$

$$\overrightarrow{MN} \{0 - (-3); -6 - 8; 5 - 2\}$$

$$\overrightarrow{MN} \{3; -14; 3\}$$

Координаты середины отрезка

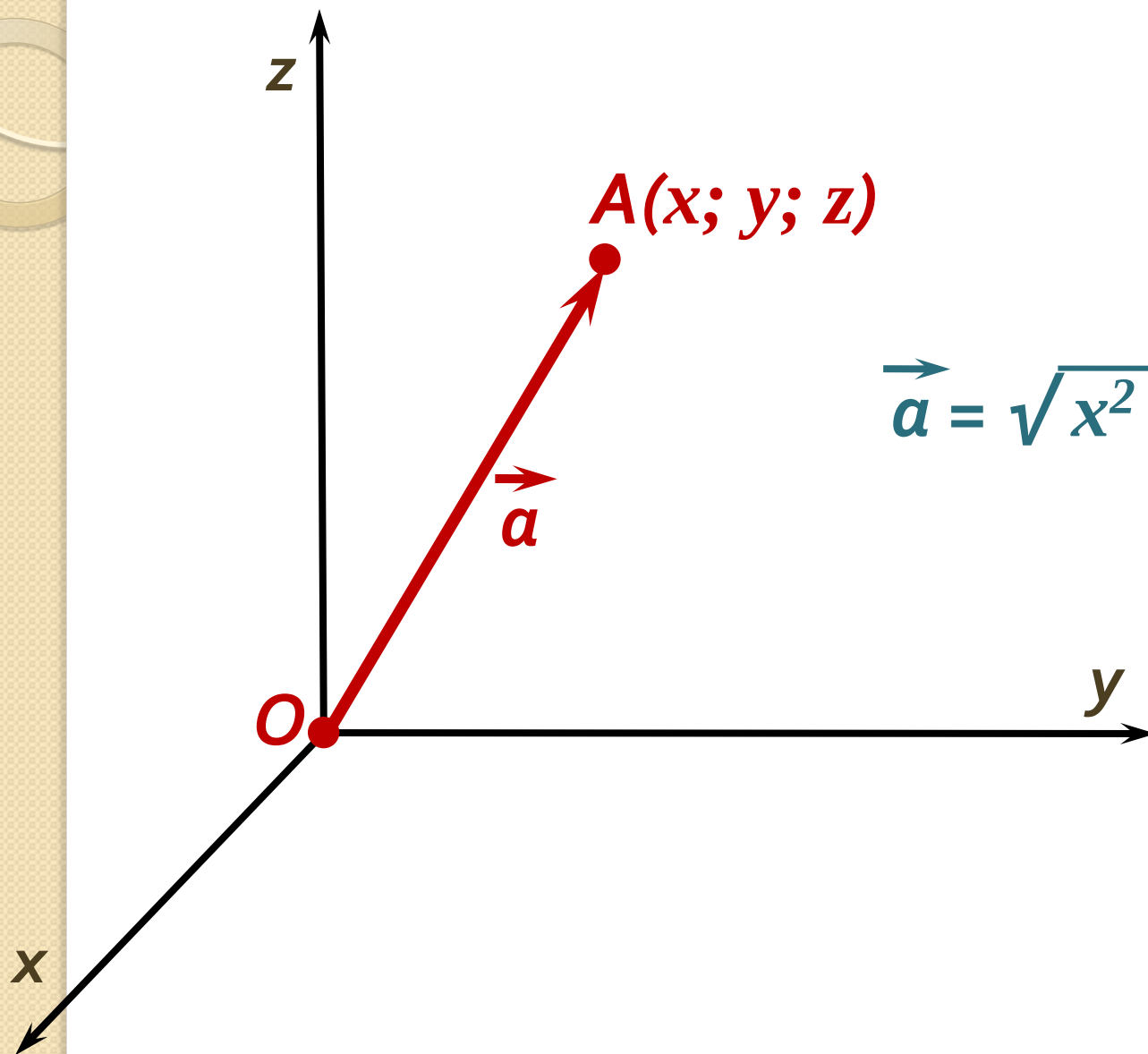


$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Длина вектора

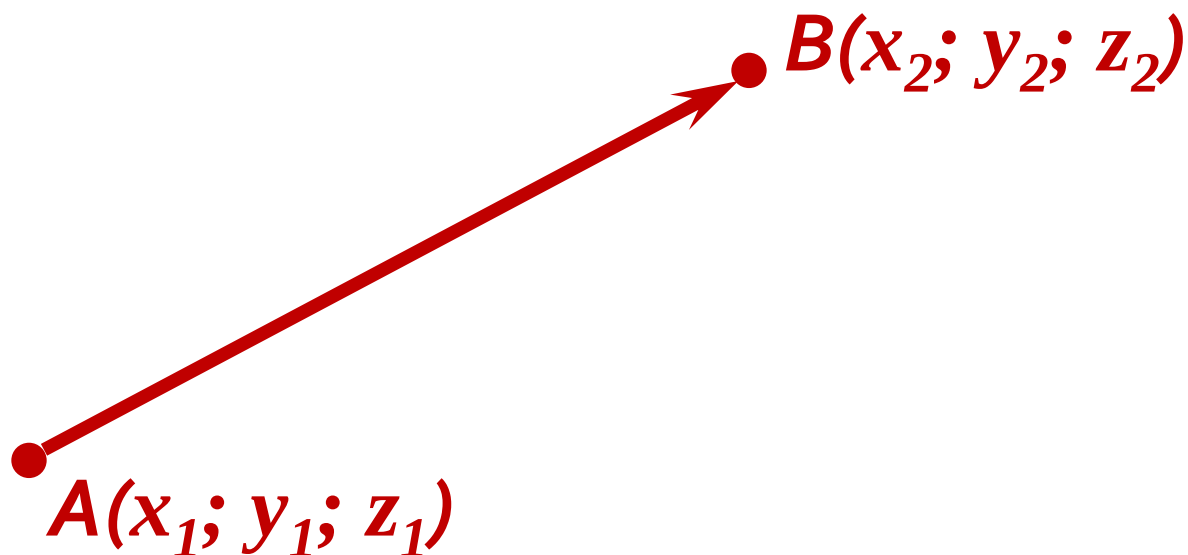


$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

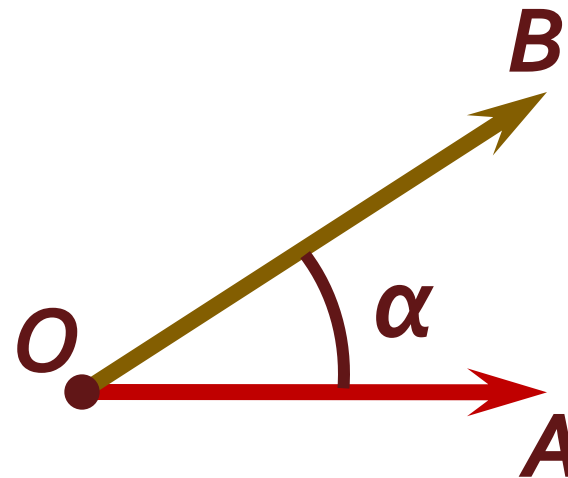
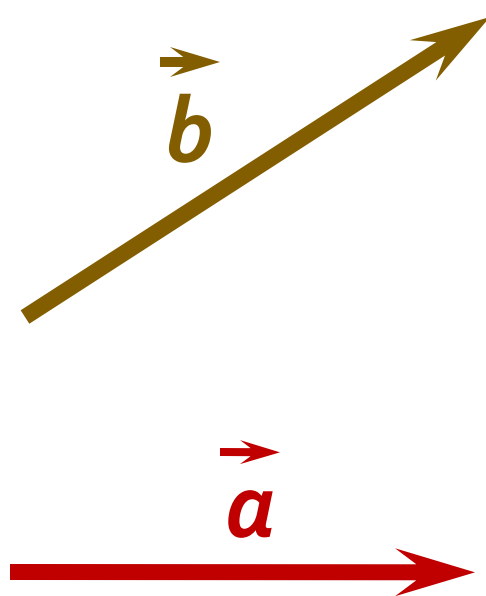
Расстояние между двумя точками

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Угол между векторами



$$(\vec{a}; \vec{b}) = (\vec{OA}; \vec{OB}) = \alpha$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение векторов

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Скалярное произведение векторов

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$ вычисляется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

1. $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq 0$.

2. $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$ (переместительный закон).

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c}$ (распределительный закон).

4. $k(\vec{a} \vec{b}) = (k\vec{a}) \vec{b}$ (сочетательный закон).

Угол между прямыми

Пусть $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$ – направляющие векторы прямых a и b . Косинус угла φ вычисляется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



КОординаты

Вектора