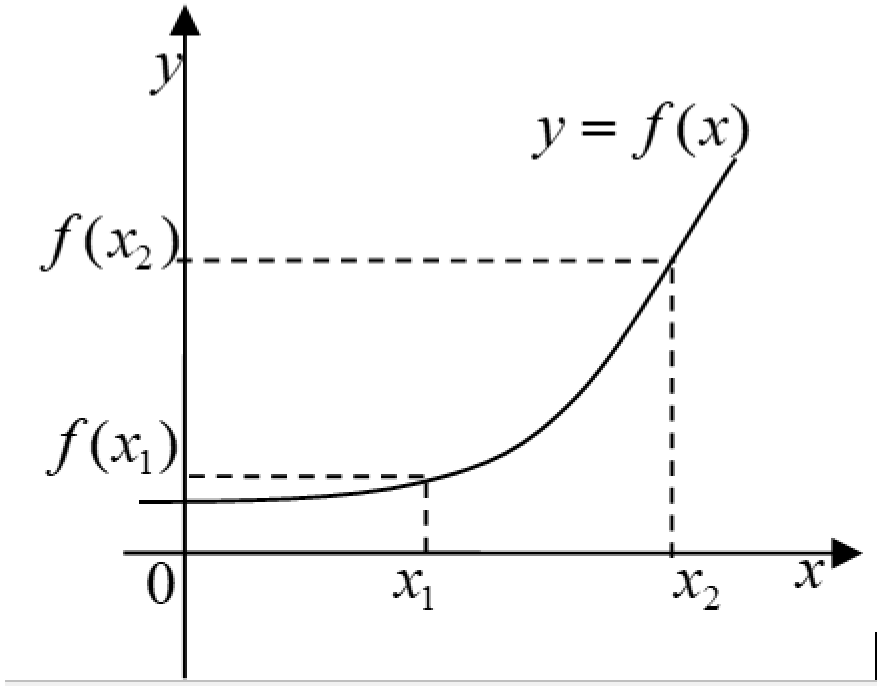
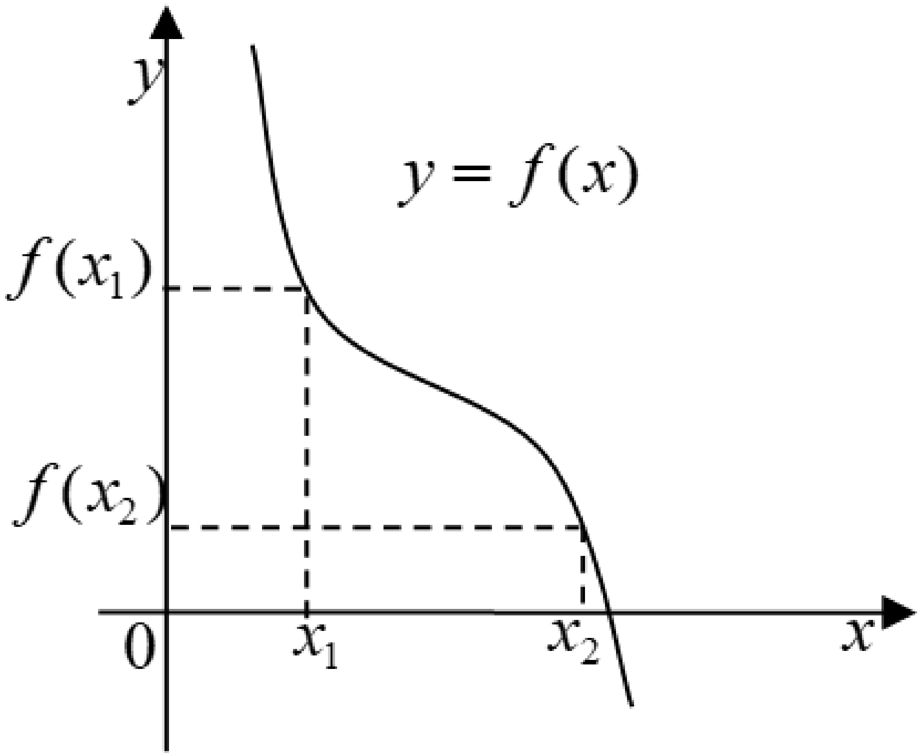
Mavzu: O’suvchi va kamayuvchi funktsiyalar. Funktsiyaning ekstremumi

1. Funktsiyaning o’sishi va kamayishi
2. Funktsiyaning ekstremumi
3. Funktsiyaning oraliqdagi eng katta va eng kichik qiymatlari

$y = f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin.
Agar $x_1 < x_2$ shartni qanoatlantiruvchi barcha
$x_1, x_2 \in [a, b]$ lar uchun $f(x_1) < f(x_2)$ bajarilsa, u holda $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada o'suvchi deyiladi.



Agar $x_1 < x_2$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x_1, x_2 \in [a, b]$ lar uchun $f(x_1) > f(x_2)$ bajarilsa, u holda $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada kamayuvchi deyiladi.



$y = f(x)$ funktsiya faqat o'suvchi yoki faqat kamayuvchi bo'ladigan intervalga funktsiyaning *monotonlik intervali* deyiladi.

Differentsiallanuvchi $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada o'suvchi bo'lishi uchun $f'(x) > 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Differentsiallanuvchi $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada kamayuvchi bo'lishi uchun $f'(x) < 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Funktsiya hosilasi nolga teng bo'ladigan $(f'(x) = 0)$ nuqtalarga funktsiyaning *kritik nuqtalari* deyiladi.

1-Misol. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ funktsiyaning monotonlik intervalini toping.

Yechish: 1)Funktsiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x) = \left(x^3 - 6x^2 + 5\right)' = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

2) Hosilani nolga tenglashtirib kritik nuqtalarni topamiz.

$$3x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0,\ \ x = 4$$

Natijalarni jadvalda ifodalaymiz.

$(-\infty;0)$

	$(-\infty;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

U holda $f(x)$ funktsiya $(-\infty, 0)$ va $(4, \infty)$ oraliqda o’sadi, (0,4) oraliqda kamayadi.

Funktsiyaning ekstremumi

$y = f(x)$ funksiya x_1 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

1-Ta'rif. Agar x_1 nuqtaning biror atrofida $f(x) < f(x_1)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa x_1 nuqta $f(x)$ funktsiyaning *maksimum nuqtasi* deyiladi.

2-Ta'rif. Agar x_2 nuqtaning biror atrofida $f(x) > f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa x_2 nuqta $f(x)$ funktsiyaning *minimum nuqtasi* deyiladi.

Funktsiya maksimum va minimum qiymatlarga erishadigan nuqtalarga funktsiyaning *ekstremum nuqtalari* deyiladi. Funktsiyaning bu nuqtalardagi qiymatlari funktsiyaning *ekstremali* deyiladi.

Ekstremumning zaruriy sharti. Differentsiallanuvchi $y = f(x)$ funktsiya biror $x_0$nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda funktsiyaning shu nuqtadagi hosilasi $f'(x_0) = 0$ teng.

Ekstremumning birinchi yetarli sharti.

$y = f(x)$ funktsiya x_0 kritik nuqtani o'zida saqlovchi biror oraliqda uzluksiz va differentsiallanuvchi bo'lsin.

U holda, agar:

1) $x < x_0$ da $f'(x) > 0$ va $x > x_0$ da $f'(x) < 0$ bo'lsa funktsiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

2) $x < x_0$ da $f'(x) < 0$ va $x > x_0$ da $f'(x) > 0$ bo'lsa funktsiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

Ekstremumning ikkinchi yetarli sharti. Faraz qilaylik $y = f(x)$ funktsiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi nolga teng bo’lsin, ya’ni $f'(x_0) = 0$. Bundan tashqari funktsiya ikkinchi tartibli hosilaga $f''(x)$ ega bo’lsin.

U holda agar:

1) $f''(x_0) > 0$ bo’lsa, funktsiya x_0 nuqtada minimumga ega bo’ladi.

2) $f''(x_0) < 0$ bo’lsa, funktsiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo’ladi.

1-misolda funktsiya $x = 0$ nuqtada maksimumga, $x = 4$ nuqtada esa minimumga erishadi.

Funktsiyaning oraliqdagi eng katta va eng kichik qiymatlari

Barcha funktsiyalar biror kesmaning chetki nuqtalarida yokikesmadagi kritik nuqtalarida eng katta va eng kichik qiymatga erishishi mumkin.

2-Misol. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ funktsiya $[-2;2]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatini toping.

Kritik nuqtalarni topamiz.

$$y' = \left(x^3 - 3x^2 - 9x + 6\right)' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$[-2;2]$ kesmaga faqat bitta $x_1 = -1$ nuqta tegishli. Funktsiyaning kritik nuqtadagi hamda kesmaning chegaraviy nuqtalardagi qiymatlarini topamiz.

$$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 6 = -1 - 3 + 9 + 6 = 11$$

$$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 6 = -8 - 12 + 18 + 6 = 4$$

$$y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 6 = 8 - 12 - 18 + 6 = -16$$

$$y(-1) = 11 - \max \qquad y(2) = -16 - \min$$