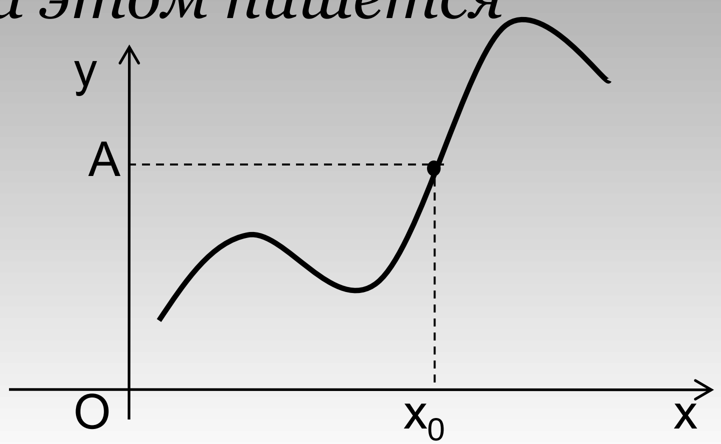
Понятие предела функции

Определение

- *Пусть функция f, принимающая действительные значения, определена в некоторой окрестности точки x_o, кроме, быть может, самой точки x_o.*
- *Функция f имеет предел в точке x_o, если для любой последовательности точек x_n, $n = 1, 2, \ldots, x_n \neq x_o$, стремящейся к точке x_o, последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к одному и тому же числу A, которое и называется пределом функции f в точке x_o, (или при $x \to x_o$) при этом пишется*

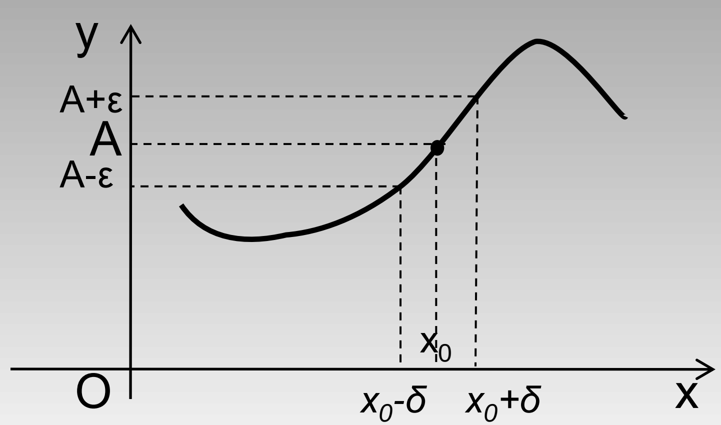
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



Определение

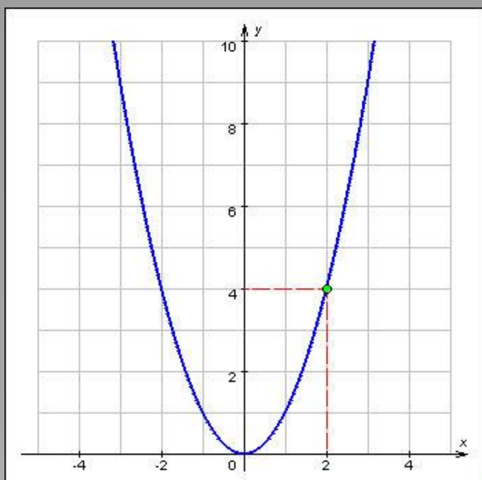
- *Число A называется пределом функции f в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию*
- $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



- *Все основные элементарные функции: постоянные, степенная функция (x^{α}), показательная функция (a^x), тригонометрические функции (sinx, cosx, tgx и ctgx) и обратные тригонометрические функции (arcsinx, arccosx, arctgx и arcctgx) во всех внутренних точках своих областей определения имеют пределы, совпадающие с их значениями в этих точках.*

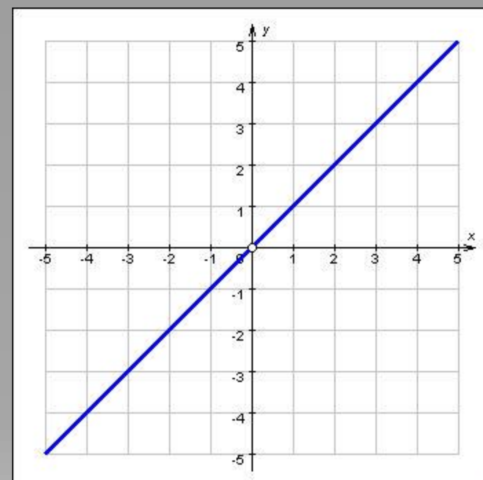
Примеры функций, имеющих предел в точке



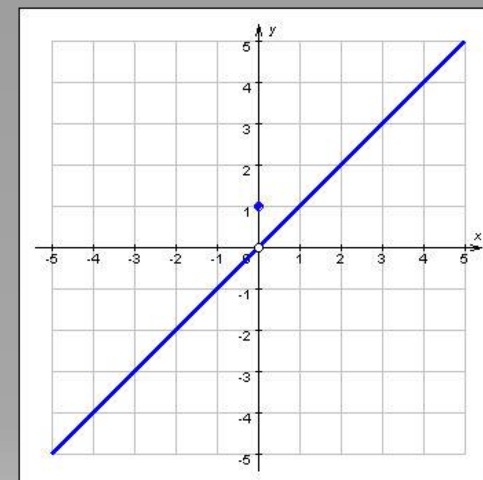
$y = x^2$

$$\lim_{x \to 2} y = 4$$

Предел функции при $x \to 2$ равен 4 (при $x \to 2$ значения функции $\to 4$).



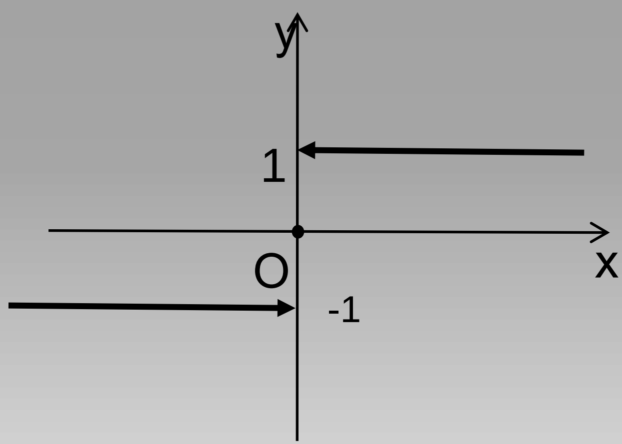
$$y = \frac{x^2}{x}$$

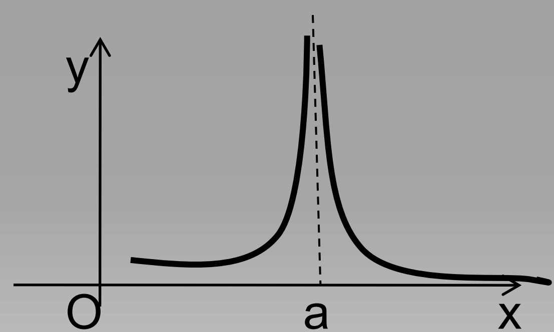


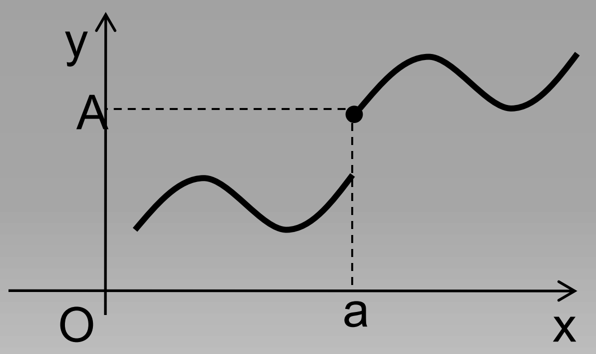
$$y = \begin{cases} x\text{, если } x \neq 0; \\ 1\text{, если } x = 0. \end{cases}$$

Предел функций при $x \to 0$ равен 0.

Примеры функций,
не имеющих предел в точке







Свойства предела функции в точке

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a, причем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$,

То

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = A + B$$

$$\lim_{x \to a} \left(f(x)g(x)\right) = AB,$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B},$$

если $B \neq 0$ и если $g(x) \neq 0$ в δ-окрестности точки a.

Вычисление предела функции в точке

Сначала просто пытаемся подставить число в функцию

$$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$$

Найдем

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x^2-x+4}.$$

Предел числителя

$$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$$

Предел знаменателя

$$\lim_{x\to 3}(x^2-x+4)=9-3+4=10$$

.

Используя теорему о пределе частного, получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x^2-x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+8)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-x+4)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

Найдем

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x-3}.$$

Предел числителя

$$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$$

Предел знаменателя равен нулю, поэтому теорему о пределе частного применять нельзя.

Величина 1/(x-3) является бесконечно большой величиной при x→3.

Тогда

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x-3}=\infty.$$

Раскрытие неопределенности

- При нахождении предела иногда сталкиваются с неопределенностями вида $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty-\infty), (1^{\infty}), (0^{\infty}), (0^{0})(\infty^{0}).$
- Отыскание предела в таких случаях называется раскрытием неопределенности.

Для того, чтобы раскрыть неопределенность ∞/∞ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\dfrac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x}^{\to 0}+\dfrac{15}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{9}{x^3}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\dfrac{6}{x^2}^{\to 0}-\dfrac{3}{x^3}^{\to 0}-\dfrac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$ Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Вычислить предел

:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность 0/0

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенность вида 0/0, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

Очевидно, что можно сократить на (x+1)

$$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Найти предел $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела **это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО предела.**

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Получена неопределенность вида 0/0 , которую нужно устранять

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.**

$$(*) = \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

$$(*)=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right)=-\frac{3}{10}$$

Замечательные пределы

- первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

- второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Примеры

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(2x)}{2x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=$$

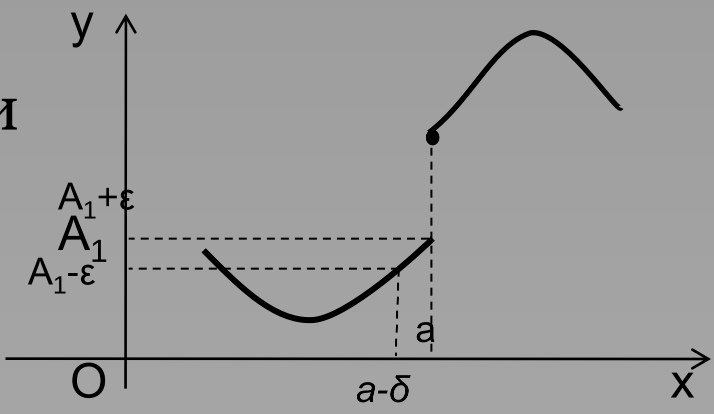
$$=2\cdot 1=2.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\frac{4}{3}}$$

Односторонние пределы

Предел функции слева

- Число A_1 называется ***предилом функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***слева*** в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a - \delta;\ a)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

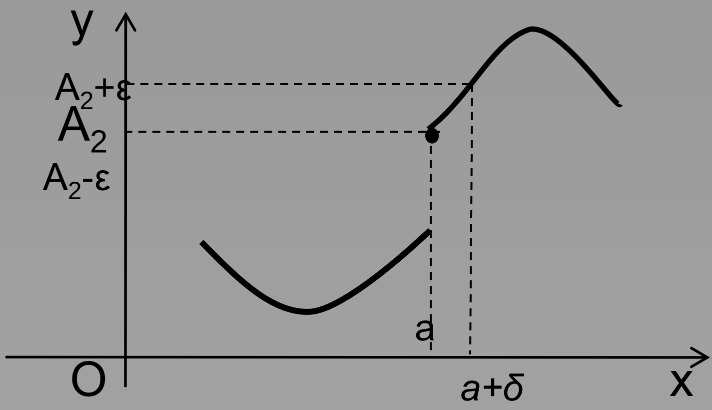


$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A_1$$

- При x приближающихся к а слева, значения функции стремятся к A_1

Предел функции справа

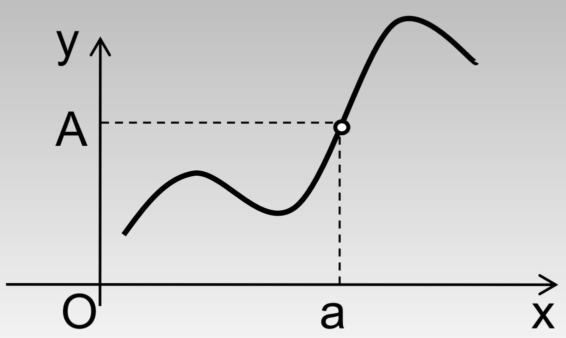
- Число A_2 называется ***пределом функции f (x) справа*** в точке a, если для каждого ε > 0 существует δ > 0 такое, что для всех $x \in (a;\ a+\delta)$ выполняется неравенство $\left|f(x) - A_2\right| < \varepsilon$.



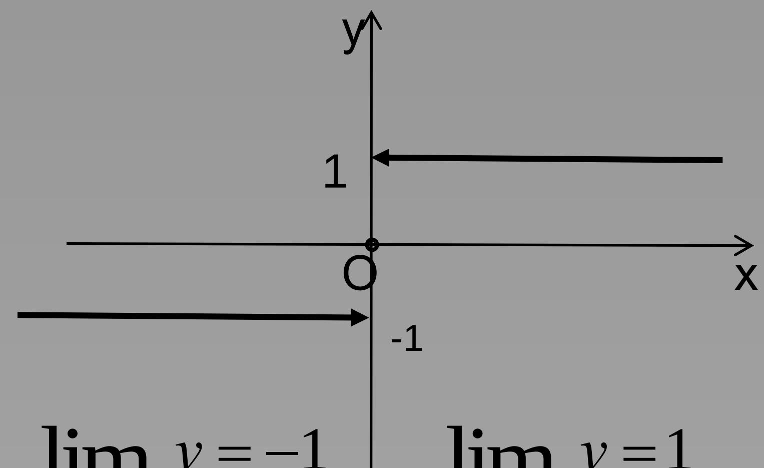
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A_2$$

- При х приближающихся к а справа, значения функции стремятся к A_2

- Функция, определённая в некоторой окрестности точки, имеет предел в точке, если её предел справа равен пределу слева.



$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0-0} y = -1 \qquad \lim_{x \to 0+0} y = 1$$

$$y = \begin{cases} x\,, \text{ если } x \neq 0; \\ 1\,, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -0} y = 0$$

$$\lim_{x \to +0} y = 0$$