Mavzu: FAZODA TO`G`RI CHIZIQ VA UNING TURLI KO`RINISHDAGI TENGLAMALARI. TEKISLIK VA TO`G`RI CHIZIQ HAQIDAGI ARALASH MASALALAR

REJA:

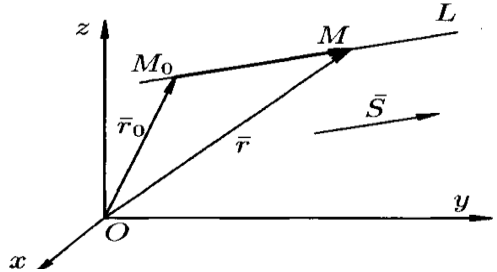
1. FAZODA TO`G`RI CHIZIQ VA UNING TURLI KO`RINISHDAGI TENGLAMALARI.
2. TEKISLIK VA TO`G`RI CHIZIQ HAQIDAGI ARALASH MASALALAR

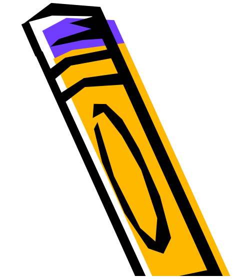
1. FAZODA TO`G`RI CHIZIQ TENGLAMASI .

1. To`g`ri chiziqning vektor tenglamasi.

Fazodagi to`g`ri chiziqning holati bu to`g`ri chiziqda yotuvchi nuqta va bu to`g`ri chiziqga parallel bo`lgan biror vektorni berilishi bilan to`la aniqlanadi. vektor t`g`ri chiziqning yo`naltiruvchi vektori deyiladi.

OXYZ **fazoda L to`g`ri chiziq, unda yotuvchi nuqta** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **va to`g`ri chiziqning yo`naltiruvchi vektori lar berilgan bo`lsin.**





L to\`g\`ri chiziqning tenglamasini topish masalasini qaraylik. Buning uchun L to\`g\`ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani olamiz. M_0 va M nuqtalarning radius vektorlari mos ravishda $\bar{r}_0$ va $\bar{r}$ bo\`lsin. Vektorlarni qo;shish qoidasiga ko\`ra quyidagi tenglik o\`rinlidir:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M} \qquad (15)$$

$\overline{M_0M}$ va $\bar{S}$ vektorlar o\`zaro parallel bo\`lganliklari uchun shunday skalyar t ko\`paytuvchi topiladiki, $\overline{M_0M} = t\bar{S}$ bo\`ladi. Buni (15) tenglamaga qo\`yib quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S} \qquad (16)$$

Bu esa, L to\`g\`ri chiziqning vektor tenglamasi deyiladi.

2. To\`g\`ri chiziqning parametrik tenglamasi. (16) tenglamada $\bar{r} = (x;y;z), \bar{r}_0 = (x_0;y_0;z_0)$ va $\bar{S} = (m;n;p)$ ekanligini e\`tiborga olib, quyidagi tenglamani yozamiz:

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tm)\bar{i} + (y_0 + tn)\bar{j} + (z_0 + tp)\bar{k}.$$

Bundan esa, quyidagi tenglamalar sistemasi kelib chiqadi:

$$
\begin{cases}
x = x_0 + tm, \\
y = y_0 + tn, \\
z = z_0 + tp.
\end{cases}
$$

- Bu tenglamalar sistemasi fazodagi **L** to\`g\`ri chiziqning **parametrik** tenglamalari deyiladi.

3. *To`g`ri chiziqning kanonik tenglamasi.* L to`g`ri chiziqning yo`naltiruvchi vektori $\bar{S} = (m;n;p)$ va bu to`g`ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta berilgan bo`lsin. Agar $M(x, y, z)$ to`g`ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy nuqta bo`lsa, $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ va $\bar{S} = (m;n;p)$ vektorlar o`zaro parallel bo`lib, ularning mos koordinatalari proporsional bo`ladi, ya`ni:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \qquad (18)$$

Bu tenglama fazodagi to`g`ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

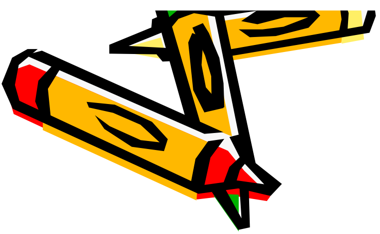
IZOH: 1) fazodagi to`g`ri chiziqning kanonik tenglamasini uning (17) parametrik tenglamalaridan ham bevosita olish mumkin edi. Bu tenglamalarning har biridan ***t*** ni topib, ularni o`zaro tenglasak:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t\,.$$

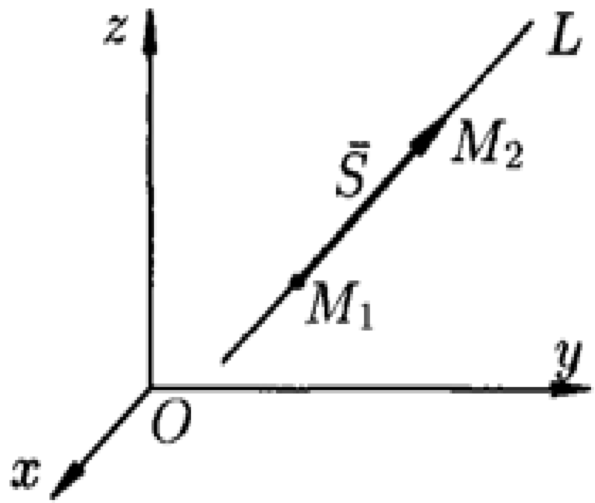
2) (18) tenglamada mahrajlardan birining nolga teng bo`lishi unga mos suratni ham nol bo`lishini keltirib chiqaradi.

4. *Fazoda berilgan ikki nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasi.*

Fazodagi L to`g`ri chiziq berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan o`tsin. U holda bu to`g`ri chiziqning $\bar{S}$ yo`naltiruvchi vektori sifati



$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ vektorni olish mumkin bo`ladi.

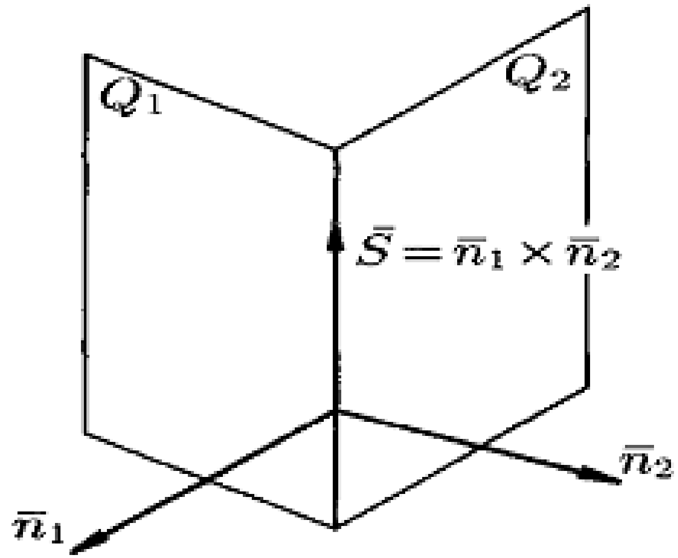


$M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta berilgan to`g`ri chiziqda yotadi, shuning uchun (18) formulada $M_0(x_0, y_0, z_0)$ o`rniga $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ni, $\bar{S} = (m; n; p)$ o`rniga esa, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ ni olib, quyidagi formulaga ega bo`lamiz:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (19)$$

5. Fazoda to`g`ri chiziqning umumiy tenglamasi. Fazoda to`g`ri chiziqni ikkita o`zaro parallel bo`lmagan tekisliklarning kesishish chizig`i sifatida qarash mumkin.

Bu sistemaning har bir tenglamasi fazoda tekislikni tashkil qiladi. Agar bu tekisliklarning $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ va $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ normal vektorlari o`zaro parallel bo`lmasa, u holda (20) tenglamalar sistemasi fazodagi shunday L to`g`ri chiziqni ifodalaydiki, bu to`g`ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqtaning koordinatalari (20) sistemaning har bir tenglamasini qanoatlantiradi:



(20) tenglamalar sistemasi fazodagi **to`g`ri chiziqning umumiy tenglamasi** deyiladi.

To`g`ri chiziqning umumiy tenglamasidan uning kanonik tenglamasiga o`tish mumkin. Buning uchun (20) tenglamalar sistemasida o`zgaruvchilardan biriga ixtiyoriy qiymat berib (masalan z=0 deb olib), M_0 nuqtaning koordinatalarini topamiz.

L to`g`ri chiziq $\bar{n}_1$ va $\bar{n}_2$ vektorlarning har biriga perpendikulyar bo`lgani uchun, u bu vektorlarning vektor ko`paytmasiga parallel boladi. Shuning uchun L to`g`ri chiziqning yo`naltiruvchi $\bar{S}$ vektori sifatida $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ ni olish mumkin:

$$\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

IZOH: to`g`ri chiziqning kanonik tenglamasini topish uchun (20) tenglamalar sistemasidan ikkita $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarning koordinatalarini topib olib, so`ngra (19) formuladan foydalanish ham mumkin.

Misol. Quyidagi tenglamalar sistemasi bilan berilgan to`g`ri chiziqning kanonik tenglamasini toping:

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

Avval z=0 deb olib va $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$ sistemani yechib, $M_1(-2;1;0)$ ni topamiz. So`ngra y=0 deb olib, $M_2(2;0;3)$ ni topamiz. Bu nuqtalar

2. FAZODA TO`G`RI CHIZIQQA DOIR ASOSIY MASALALAR.

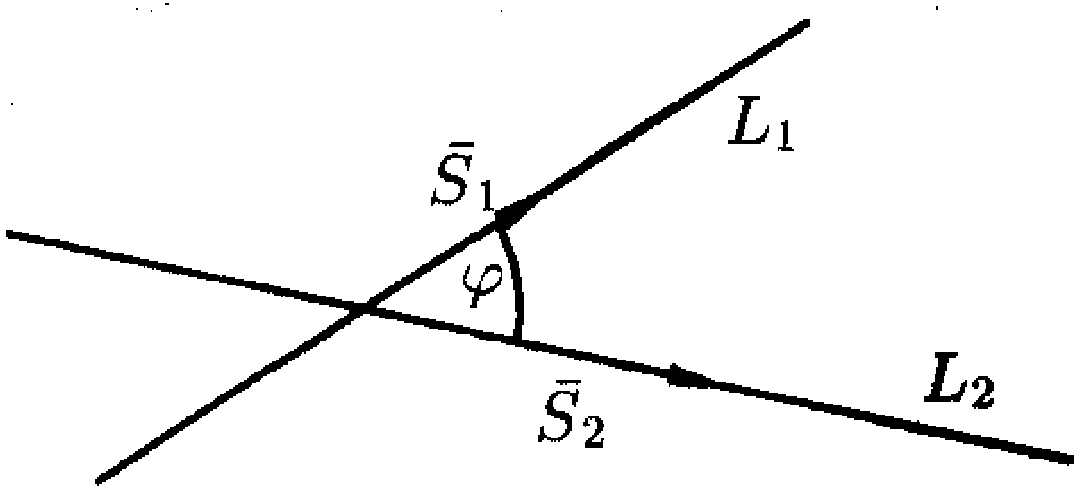
- ***1. Ikki to`g`ri chiziq orasidagi burchak. To`g`ri chiziqlarning parallelik va perpendikulyarlik shartlari.*** Fazoda L_1 va L_2 to`g`ri chiziqlar kanonik tenglamalarin bilan berilgan bo`lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

VA

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

- Bu to`g`ri chiziqlar orasidagi burchak sifatida ularning yo`naltiruvchi vektorlari
- S1=(m1; n1; p1) va S2=(m2; n2; p2) lar orasidagi burchak olinadi:



Shuning uchun vektorlar orasidagi burchak kosinusi formulasiga binoan:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2}{|\bar{S}_1| \cdot |\bar{S}_2|}$$

yoki

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

bo`ladi. $L_1$ va $L_2$ to`g`ri chiziqlar orasidagi o`tkir burchakni aniqlash uchun (22) formula o`ng tomonidagi ifodani modulini olish etarli. $L_1$ va $L_2$ to`g`ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

- L1 va L2 to`g`ri chiziqlarning parallelik sharti: $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$
- **Misol.** Quyuidagi:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

va

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3x + 5 = 0 \end{cases}$$

to`g`ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Taabiyki, $\bar{S}_1 = (2;-1;3)$ va $\bar{S}_2 = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ bu erda $\bar{n}_1 = (2;1;-1)$ va $\bar{n}_2 = (2;-1;3)$. Bundan avval $\bar{S}_2 = (2;-8;-4)$ ekanligini topamiz. So`ngra $\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = 4 + 8 - 12 = 0$ bo`lgani uchun $\varphi = 90°$ deb olamiz.

2. Ikki to`g`ri chiziqning bir tekislikda yotish sharti. L_1 va L_2 to`g`ri chiziqlar quyidagi kanonik tenglamalari bilan berilgan bo`lsin:

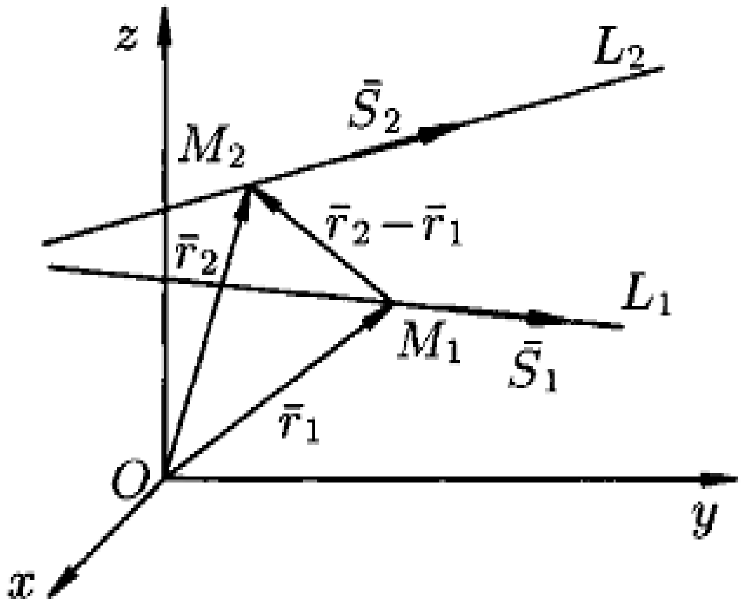
$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

va

$$\frac{x-x_1}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Ularning yo`naltiruvchi vektorlari mos ravishda $\bar{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ va

Ularning yo`naltiruvchi vektorlari mos ravishda $\bar{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ va $\bar{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ lar bo`ladi. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarning radius-vektorlarini mos ravishda $\bar{r}_1$ va $\bar{r}_2$ deb olamiz.



U holda

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

L_1 va L_2 to`g`ri chiziqlar bir tekislikda yotishi uchun $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ va $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{M_1 M_2}$ vektorlarning komplanar bo`lishlari zarur va etarlidir. Bu vektorlar komplanar bo`lishlari uchun esa, ularning aralash ko`paytmasi nol bo`lishi kerak, ya`ni:

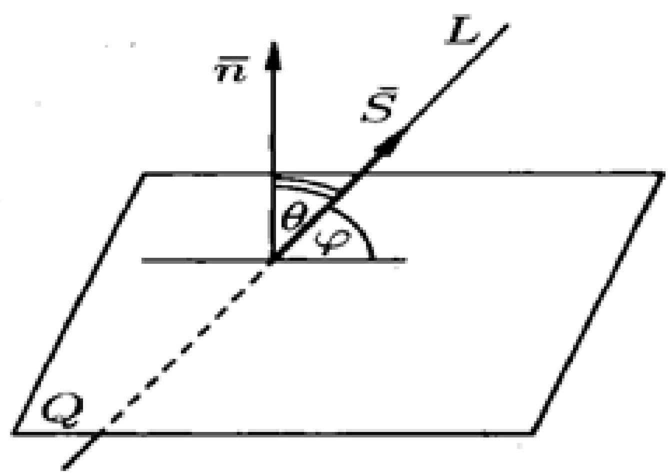
Fazoda to`g`ri chiziq va tekislikka doir asosiy masalalar.

1. To`g`ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. To`g`ri chiziq va tekislikning parallelik va perpendikulyarlik shartlari.

Fazoda Q tekislik $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama bilan va L to`g`ri chiziq esa, $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ tenglama bilan berilgan bo`lsin.

***Ta`rif:*** To`g`ri chiziq va tekislik orasidagi burchak deb, to`g`ri chiziq va bu to`g`ri chiziqning tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi burchakka aytiladi.

Q tekislik va L to`g`ri chiziq orasidagi burchakni φ bilan, $\bar{n} = (A; B; C)$ va $\bar{S} = (m; n; p)$ vektorlar orasidagi burchakni esa, θ bilan nbelgilaylik.



U holda ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasiga ko`ra:

$$cos\theta = \frac{\bar{n}\cdot\bar{S}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{S}|}.$$

φ burchakni $\frac{\pi}{2}$ dan kichik deb olib, $sin\varphi$ ni topaylik:

$sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta$ bo`lgani uchun, to`g`ri chiziq va tekislik orasidagi burchak sinusi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

L to`g`ri chiziq Q tekislikga parallel bo`lsin. U holda $\varphi = 0$ yoki, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $cos\theta = 0$ bo`ladi. Shuning uchun

- **Fazoda to`g`ri chiziq va tekislikning parallelik sharti:**

$$\boldsymbol{Am + Bn + Cp = 0}$$

tenglik bilan beriladi.

L to`g`ri chiziq Q tekislikga perpendikulyar bo`lsin. U holda $\varphi = \frac{\pi}{2}$ yoki $\theta = 0$ ya`ni $\bar{n} = (A; B; C)$ va $\bar{S} = (m; n; p)$ vektorlar o`zaro parallel bo`ladi. Demak

- **Fazoda to`g`ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti:**

Uyga vazifa:

A,B,C va D nuqtalarning koordinatalari berilgan bo`lsa,quyidagilar topilsin:

1) AD to`qri chiziqning kanonik tenglamasini
2) A,B va C nuqtalardan o`tuvchi Q tekislik tenglamasini
3) D nuqtadan o`tib Q tekislikka perpendikulyar bo1lgan to`qri chiziqning kanonik tenglamasini va bu to1qri chiziq bilan Q tekislik kesichlikgacha bo`lgan masofani
5) AD to`qri chiziq bilan Q tekislik orasidagi burchakni

$A(2:-2:1)$	$B(-3:0:-5)$	$C(0:-2:-1)$	$D(-3:4:2)$
$A(5:4:1)$	$B(-1:-2:-2)$	$C(3:-2:2)$	$D(-5:5:4)$
$A(3:6:-2)$	$B(0:2:-3)$	$C(1:-2:0)$	$D(-7:6:6)$
$A(1:-4:1)$	$B(4:4:0)$	$C(-1:2:-4)$	$D(-9:7:8)$
$A(4:6:-1)$	$B(7:2:4)$	$C(-2:0:-4)$	$D(3:1:-4)$
$A(0:6:-5)$	$B(8:2:5)$	$C(2:6:-3)$	$D(5:0:-6)$

E'TIBORINGIZ UCHUN RAHMAT